

快报

微扰 Dirac 理论的含混性

吴丹迪*

(中国科学院高能物理研究所,北京100039)

摘 要

自由 Dirac 方程正、负宇称电子解的简并性可造成计算一级微扰能量的不确定性。以纯宇称解作为微扰场论的零级波函数虽然直接,但缺乏有力的理论根据。选择零级电子波函数的任意性是推导泡利方程和做 Foldy-Wouthuysen 变换不确定性的根源。

众所周知,自由 Dirac 方程有正、负宇称两种电子解(本文取 Bjorken-Drell 表示,除非另外声明)

$$(\not{p} - m)u = 0, (E > 0), \quad (1)$$

$$u_+(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$u_-(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{E-m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E-m} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\gamma_0 u_{\pm}(-\mathbf{p}) = \pm u_{\pm}(\mathbf{p}). \quad (4)$$

这里(1)是动量空间的 Dirac 方程,(2),(3)式分别为电子的正、负宇称的解,如(4)式所示。 φ 是二分量泡利旋量,我们假定 φ 的宇称为正。特殊情况下, φ 可以为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。注意在非相对论近似下,负宇称态并不消失。在场论微扰计算中取方程(1)的解作为费米子的零级波函数,因此场论是量子力学中所谓的简并微扰问题^[2]。如果某人认定 u_+ 与 u_- 的一个线性组合态是零级波函数,他做微扰计算的结果,例如一级微扰能量 $E' = \langle f | H' | f \rangle$ 就与他选定的自由费米子波函数中的混合角有关。

在标准场论教科书中选用 u_+ 作为自由费米子的波函数。尽管这个选择的正确与否可以由计算结果与实验符合得坏来评判,但是理论上,该选择的理由未免单纯,比如说“因为 Dirac 方程有空间反演不变性,所以选纯宇称态 u_+ ”。问题是既然空间反演不变性没有排除 u_+ 和 u_- 混合的解,它又怎能排斥选择这种解作为零级波函数的正当性呢?更何况我们有时要处理宇称不守恒的相互作用。

量子力学解决二度简并微扰问题的标准方法有两个。

本文于 1991 年 6 月 22 日收到。

* 现在美国 SSC 理论组。

1) 对角化. 先在简并的零级波函数中选两个互相正交的波函数 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$, $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$, 然后计算矩阵元 $\langle\phi_i|H'|\phi_j\rangle$ ($i, j = 1, 2$), (5)
 对角化这个微扰能量矩阵, 找到两个一级微扰能量本征值和相应的本征波函数.

2) 变分法. 令 $|\phi(\alpha)\rangle = \cos\alpha|\phi_1\rangle + \sin\alpha|\phi_2\rangle$, 计算

$$E'(\alpha) = \langle\phi(\alpha)|H'|\phi(\alpha)\rangle, \quad (6)$$

$$\text{那末一级本征能量应满足 } \frac{\partial E'(\alpha)}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} E'(\alpha) \neq 0. \quad (7)$$

两个方法都用于有互相正交的两个波函数的例题. 对于自由 Dirac 方程困难在于 u_+ 和 u_- 不交. 而且, 令 $u' = au_+ + bu_-$ (8)
 其中 a, b 可为任意复数, 那末 $u'^\dagger u_+ = 0$ 仅在 $a = b = 0$ 时有解. 不仅如此, 不交关系相当复杂, $u_+^\dagger u_- = \varphi^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \varphi$.

在尚未找到选择正确零级波函数的指导原则的情况下, 以具体例子来看问题的严重性也许是有益的. 为此让我们考虑如下特殊的单参数 Dirac 方程解系

$$\tilde{u}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2E(E+m\cos 2\beta)}} \left[\begin{pmatrix} (E+m)\varphi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi \end{pmatrix} \cos\beta - i \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \varphi \\ (E-m)\varphi \end{pmatrix} \sin\beta \right], \quad (9)$$

这里 β 是正、负宇称态的混合角. 当电子被置于外电磁场中

$$H' = \bar{\psi} e \mathbf{A} \psi, \quad (10)$$

$$E'(\beta) = \langle e | H' | e \rangle = \tilde{u}^\dagger(\beta) e \gamma_0 \mathbf{A} \tilde{u}(\beta). \quad (11)$$

标准教科书取 $\beta = 0$ 的朴素解从而得到

$$E'_i = \varphi^\dagger \left\{ e\Phi - \frac{e\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p}}{2E(E+m)} + \frac{ie\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}}{2E(E+m)} \right\} \varphi. \quad (12)$$

如果某作者 B 取 β 不为零的一个解, 他就发现

$$E'(\beta) = \varphi^\dagger \left\{ e\Phi - \frac{e\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}}{E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}}{2E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p}}{2E(E+m_1)} + \frac{ie\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}}{2E(E+m_1)} - \frac{em_2\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}}{2E(E+m_1)} \right\} \varphi, \quad (13)$$

这里 $m_1 = m \cos 2\beta$, $m_2 = m \sin 2\beta$. 作者 B 与标准答案的主要差别在 (13) 式最后一项——电偶极矩 (EDM) 作用. B 经过再三思考, 也许会引用电磁哈密顿量(10)的空间反演不变性来限制 EDM (注意, 这比一开始就选用 u_+ 要谨慎得多, 因为有时不同宇称态的混合并不导致可测的字称破坏效应^[2]), 他因此得到 $\sin 2\beta = 0$, 条件是他坚信电磁作用不引起字称(和时间反演)的动力学自发破坏(这大概难以严格证明). 即便如此, 他允许 $\cos 2\beta = \pm 1$.

因此作者 B 仍有一半机会与标准答案在第四和第五项上发生争执. 值得一提的是在非相对论极限下, (13)式中的 EDM 等于 $\frac{+e}{2m} \text{tg}\beta$, 相应的能量对 β 没有极值.

自由 Dirac 方程的以上缺陷, 在与其有关的一切微扰计算中产生不确定性. 以下是重要的三例.

1) 微扰计算的结果与选择 Dirac 矩阵的表示有关。

以手征表示为例。手征表示的定义为

$$\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \underline{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \underline{\gamma}_3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (14)$$

用手征表示的作者 B 倾向于用手征表示下自由 Dirac 方程的朴素解当作零级波函数。他不认识作者 A, 所以不知道作者 A 选用解系(9)的那一个 β 值, 更不会将作者 A 选用的波函数变换到手征表示中来, 并以此为出发点进行工作。这就导致作者 A、B 计算微扰能量结果不同。手征表示下 Dirac 方程 $(\boldsymbol{p} - m)\boldsymbol{u} = 0$ 的朴素解是(\boldsymbol{h} 是 φ 的涡旋度,

$$\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|) \quad \boldsymbol{u} = \frac{m}{\sqrt{2E(E + \boldsymbol{h}p)}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} + E}{m} \varphi \end{pmatrix}, \quad (15)$$

相应的一级电磁能量为

$$\underline{\varepsilon}' = \varphi^\dagger \left\{ e\Phi - \frac{e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}{E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}}{2E} - \frac{ie\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}}{2E} \right\} \varphi. \quad (16)$$

这个电磁能量与(13)式相距甚远。原因是(15)式变到 B-D 表示后不属解系(9)。相应的么正变换矩阵是 $\begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix}$, 读者可自己试验。

2) 泡利方程的含混性

泡利方程是二分量旋量 φ 满足的方程。如果认为 Dirac 方程是更基本的, 那末由 Dirac 方程可以推出泡利方程^[1]。仍以电磁作用为例

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) + e\Phi + \gamma_0 m] \psi \equiv H\psi. \quad (17)$$

令 $\psi = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$, 在定态情形我们有

$$(E + \varepsilon) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + e\Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

这里 ε 是电磁能量, 显然它的领头项与 e 成比例。到 e 的一次方, (18) 式的第二行为

$$\chi = \frac{1}{E + m} \left(1 - \frac{\varepsilon - e\Phi}{E + m} \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}) \varphi. \quad (19)$$

代入(18)第一行得

$$\varepsilon\varphi = \left\{ e\Phi - \frac{e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}{E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}}{2E} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p}}{2E(E + m)} + \frac{i\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{p}}{2E(E + m)} \right\} \varphi. \quad (20)$$

这就是电子的泡利方程, 它给出电子在外电磁场中的运动规律。但是, φ 也许是一个宇称

混合态, 例如, 令 $\varphi = \sqrt{\frac{E + m}{E + m_1}} \left(\cos\beta - i \sin\beta \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{E + m} \right) \varphi'$. (21)

将此式代入(20)得到 φ' 的方程

$$\varepsilon\varphi' = \left\{ e\Phi - \frac{e\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}}{2E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}}{2E} - \frac{e\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{p}}{2E(E + m_1)} + \frac{i\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{p}}{2E(E + m_1)} - \frac{m_2 e\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E}}{2m(E + m_1)} + \dots \right\} \varphi'. \quad (22)$$

有什么原则来判断究竟应当用那个旋量描写电子, φ 还是 φ' ? 读者可以尝试在手征表示中寻找泡利方程, 并发现完全不同的泡利方程(正好是对(16)式的 φ' 微商).

3) Foldy-Wouthuysen 变换的不唯一性.

F-W 变换可以将四分量相缠的 Dirac 哈密顿量变成上两分量和下两分量分离的方块对角的哈密顿量. 没有相互作用时, 分离是完全的; 有相互作用时, 只能在非相对论近似下做到近似地分离. 对近似分离的情形, 变换矩阵有任意性. 以(17)式中的哈密顿量为例. 为了将斜对角的项 $\theta = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})$ 压到 $1/m$ 次, 最一般的变换是

$$S = -i(\gamma_0 + i\beta\gamma_5)\theta/2m, \quad (23)$$

$$H' \equiv e^{iS} H e^{-iS} = H + i[S, H] + \dots$$

$$= \gamma_0 m + e\phi + \frac{e\gamma_0}{2m} [\theta, \phi] + \frac{\gamma_0}{m} \theta^2 + \frac{i e \beta \gamma_5}{m} [\theta, \phi] + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad (24)$$

(24)中方块斜对角的项已压到 $1/m$. 令 H' 中所有这些方块斜对角项为 θ' , 那么下一个么正变换 $H'' = e^{iS'} H' e^{-iS'}$ 中的 S' 为 $S' = -i(\gamma_0 + i\beta\gamma_5)\theta'/2m$. (25) H'' 将只有 $1/m^2$ 级的方块斜对角项. 依此类推, 我们可以将方块斜对角的项推到 $(1/m)$ 的任意高次方, 但是所得的近似方块对角的哈密顿量含有任意参数 $\beta, \beta' \dots$. 以前关于 F-W 变换任意性的讨论只涉及特殊的相互作用^[9]. 以上的分析表明, 任意性是普遍的.

本文涉及 Dirac 理论的含混性, 皆与自由 Dirac 方程正负宇称解简并有关. 在不涉及自由 Dirac 方程解的例题中, 例如解氢原子或正负电子偶素的相对论能谱的问题中, 正负宇称态一开始就不简并, 或者虽然简并, 却是正交的, 本文讨论的含混性则不存在.

参 考 文 献

- [1] E. g. J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Theory* (McGraw-Hill, 1964) p. 12.
 [2] E. g. L. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1949) p157.
 [3] D. L. Pursey, *Nucl. Phys.*, **13**(1958), 595; E. Eriksen, *Phys. Rev.*, **111**(1958), 1011; M. V. Barnhill III, *Nucl. Phys.*, **A131**(1969), 106.

Ambiguity of Perturbative Dirac Theory

WU DANDI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

(*Present Address: SSC Theory Group, Dallas, Texas 75327, U. S. A.*)

ABSTRACT

Degeneracy of parity even and odd electron solutions of the free Dirac equation may cause uncertainties in first order calculation of the perturbative energy. Choosing the even parity solution to start perturbation is though direct, not theoretically well supported. The arbitrariness in choosing lowest order electron wave functions causes uncertainties in the Foldy-Wouthuysen transformations and the reduction of the Pauli equation from the Dirac equation.