

# 自持磁约束电子云的数值计算\*

黄佳昌

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

## 摘 要

本文以流体理论为基础,用数值计算方法研究了轴对称自持磁约束电子云。通过一种简化的方法计算出电子的密度分布、电位分布、漂移角频率和温度,其中准平衡态近似是必不可少的。计算结果基本上与实验符合。

## 一、引 言

在电场和磁场的联合作用下,许多电子可以被约束在一定区域内形成磁约束电子云。这是一种内部存在着不可忽略的空间电荷场的非中性等离子体,对它的研究在理论和应用方面都很有价值。

电子云中的空间电荷场是径向的<sup>[1]</sup>,外磁场是轴向的,整个电子云围绕对称轴漂移。同时,电子还绕磁力线作 Larmor 运动。剩余气体原子与电子云中的电子碰撞使电子向外扩散,最后碰壁而损失掉。损失的电子可用许多方法补充,常用的一种方法是使装置中发生自持 Penning 放电<sup>[1,2]</sup>。补充的电子大部分来源于气体分子电离,也有少量电子是由离子轰击金属壁而产生。当产生的电子和损失的电子达到平衡时,电子云处于稳定状态,从而形成自持磁约束电子云。

## 二、电子运动的流体方程组

电子运动的流体方程组有以下形式<sup>[3]</sup>:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) = Zn; \quad (1)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m}(\nabla U - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{mn} \nabla(nkT) - \nu\mathbf{v}; \quad (2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \frac{5}{2} kT \right) = e\mathbf{v} \cdot \nabla U - Z \left( \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + \frac{5}{2} kT + E_i \right) - \frac{1}{n} \nabla \cdot \mathbf{q}; \quad (3)$$

$$\nabla^2 U = \frac{en}{\epsilon_0}; \quad (4)$$

本文 1991 年 6 月 12 日收到。

\* 国家自然科学基金资助。

$$\frac{5nkT}{2m} \nabla(kT) + \frac{e}{m} \mathbf{q} \times \mathbf{B} + \nu \mathbf{q} = 0. \quad (5)$$

式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)分别是电子的连续性方程、动量方程、能量方程、Poisson方程和热传导方程。 $m$ 、 $e$ 、 $n$ 、 $T$ 、 $\nu$ 、 $\mathbf{q}$ 分别是电子的质量、电量、密度、温度、扩散速度和热流密度， $\mathbf{B}$ 为磁场强度， $U$ 为电位， $\epsilon_0$ 为真空介电常数， $k$ 为 Boltzmann 常数， $\nu$ 为电子和约束装置中气体原子碰撞的有效动量传输频率， $Z$ 为气体原子的电离频率， $\nu' = \nu + Z$ ， $E_i$ 为气体原子的电离能。

此方程组是把磁约束电子云作为一种带电流体处理，通过解方程组可以研究其运动的许多特征。以下只处理轴对称情况，采用圆柱坐标系  $(r, \varphi, z)$ ，方程组也存在以下的积分形式<sup>[3]</sup>：

$$\oint \nu v_N dA = \iiint Z_n dV; \quad (6)$$

$$\oint \nu v_N (m\omega r^2 - e r A_\varphi) dA = - \iiint n (\nu m \omega r^2 + Z e r A_\varphi) dV; \quad (7)$$

$$\oint \nu v_N \left( \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 + 2kT_s - eU \right) dA = - \iiint Z n (eU + E_i) dV. \quad (8)$$

式右边对约束区域积分， $dV$ 为体元。式左边对约束区域边界面积分， $dA$ 为面元。 $A_\varphi$ 为磁场矢势的 $\varphi$ 向分量， $T_s$ 为边界面上的电子温度， $\omega$ 为漂移角速度， $v_N$ 为边界面上电子的法向扩散速度，以向外为正。设 $\alpha$ 为磁力线与边界的夹角，

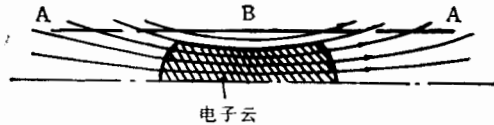


图1 简化的电子云磁约束装置

图1为简化的电子云磁约束装置。A为阴极，B为阳极。电子沿磁力线运动比垂直于磁力线运动容易得多，但由于阴极排斥电子，它们只能沿通过阳极边缘的磁力线逃逸。定义最大泄漏电子流为 $j_m$ ，等效泄漏宽度

$$v_N = \sqrt{\frac{kT_s}{2\pi m}} \sin \alpha. \quad (9)$$

$$\Delta = \frac{\oint \nu v_N dA}{4\pi R j_m} = \frac{\iiint Z_n dV}{4\pi R j_m}, \quad (10)$$

式中 $R$ 为约束装置半径。由装置的几何尺寸和磁场分布可确定电子云半径 $a$ 。

若略去碰撞，即 $\nu = 0$ ， $Z = 0$ ，电子云将处于平衡态，此时 $T$ 、 $\omega$ 为常数<sup>[4]</sup>。可引入磁约束因子<sup>[5]</sup>

$$\Gamma = \frac{2m\epsilon_0\omega(Q - \omega)}{e^2 n_0}, \quad (11)$$

式中 $n_0$ 为 $n$ 的最大值，电子回旋频率

$$Q = \frac{eB}{m}. \quad (12)$$

$\Gamma$ 的引入可说明电子热运动与电磁场的平衡关系， $\Gamma > 1$ 是形成稳态电子云的必要条件。 $\Gamma$ 越小，场的约束作用越弱，电子云就越大。

在自持磁约束电子云中,  $\nu, Z$  不等于 0, 因此不处于平衡态。但一般  $\nu, Z$  远小于  $\Omega$ , 且扩散速度较小, 仍可认为电子云处于准平衡态, 由平衡态所得的一些结论可用于分析准平衡态。例如在准平衡态中式(11)仍有效,  $\Gamma$  和  $\omega$  可以决定  $n_0$ 。  $\Gamma$  是比 1 稍大的正数, 便于在计算中使用。  $\omega$  可以近似认为是常数<sup>[6]</sup>。平衡态理论无法确定  $\Gamma, \omega, \bar{T}$  ( $\bar{T}$  是电子温度的平均值), 而在准平衡态中由  $\nu, Z, E_i$  可定出  $\Gamma, \omega, \bar{T}$ 。

### 三、数值计算方法

在一定边界条件下求解流体方程组可以计算出轴对称自持磁约束电子云中各物理量的分布, 但求解很困难。实际计算中采用了一种简化的方法<sup>[3]</sup>:

#### (1) 选初值 $\Gamma, \omega, \bar{T}$

解流体方程组求准平衡态电子云参量的实质是在一定电磁场条件下由  $Z, \nu, E_i$  定出  $\Gamma, \omega, \bar{T}$ 。而实际计算是先给初值  $\Gamma, \omega, \bar{T}$ , 再由相应的  $Z, \nu, E_i$  求出新的  $\Gamma, \omega, \bar{T}$ 。但  $\Gamma, \omega, \bar{T}$  的微小变化就会导致  $Z, \nu$  的显著变化, 从而使计算值偏离初值太远, 计算结果极不合理。因此, 实际计算相当困难。若  $\Gamma, \omega, \bar{T}$  选取不合适, 计算将失去意义, 因为稳态电子云的  $\Gamma, \omega, \bar{T}$  在一定边界条件下有一定的关联, 不是独立的。我们是根据实验结果和计算经验选定初值  $\Gamma, \omega, \bar{T}$ 。此外, 也可由近似理论来选初值<sup>[6]</sup>。

#### (2) 求电位 $U$ 和电子密度 $n$ 的分布

利用非线性迭代法解方程(13)求  $U$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \exp \left[ \frac{e}{kT} \left( U - U_0 - \omega r A_\phi + \frac{m\omega^2 r^2}{2e} + \beta \right) \right], \quad (13)$$

同时计算出  $n$ , 由  $n$  分布计算出  $a$ 。式中  $\beta$  是一个修正因子, 对于准平衡态近似为 0。  $U_0$  为  $n_0$  处的电位。  $T$  用  $\bar{T}$  代替。

#### (3) 在约束区域内求各物理量的相应积分

利用(10)、(7)、(8)重新计算约束区域的  $\Delta, \omega, T_s$ 。再由  $T_s$  和  $T_0$  算出  $\bar{T}$ 。电子云中心温度<sup>[7]</sup>

$$T_0 = \frac{3}{5} (reU_0 - E_i) \quad (14)$$

电子云中的电场主要是沿径向的, 对称轴附近具有较高的离子密度<sup>[8]</sup>, 这些离子在两端轴向电场作用下流向阴极, 离子落到阴极上将打出电子。定义  $\gamma$  为一个离子轰击阴极所产生的电子数。这些二次电子将沿磁力线在电场加速下, 带着不可忽略的能量回到电子云中, 使电子云温度升高。由式(14)可知, 若  $\gamma = 0$ , 则  $T_0 < E_i$ , 此时轴附近的电子云将无法维持, 因而  $\gamma$  不能忽略。

由于  $T$  与  $r^2$  近似成线性关系<sup>[6]</sup>, 令

$$T = T_0 + Cr^2, \quad (15)$$

式中

$$C = \frac{T_s - T_0}{a^2}. \quad (16)$$

对  $T$  取平均,

$$\bar{T} = \frac{\iiint nT dV}{\iiint ndV}, \quad (17)$$

式中积分区域半径为  $a$ 。

(4) 若计算所得  $\omega$ 、 $\bar{T}$  与初值相近, 且计算得出的  $a$  与预期值相近则结束计算。否则修改  $\Gamma$ 、 $\omega$ 、 $\bar{T}$  返回重新计算。图 2 为整个计算程序的框图。

程序中还要处理好  $\nu$ 、 $Z_0$  在约束装置中, 气体的主要成份为  $N_2$ 。发生 Penning 放电后, 出现大量  $N_2^+$ <sup>[9]</sup>。计算中  $Z$  主要由  $N_2 + e \rightarrow N_2^+ + 2e$  定出, 且有下式:

$$Z = n_0 \left( \frac{P}{P_0} \right) \sigma_z \sqrt{\frac{3eT}{m}}, \quad (18)$$

式中  $n_0 = 2.6868 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$ ,  $P_0$ 、 $P$  分别为标准大气压和约束装置中的气压,  $m$  为电子质量,  $\sigma_z$  为电离截面, 其数值可由电子温度  $T$  对电离截面的关系曲线

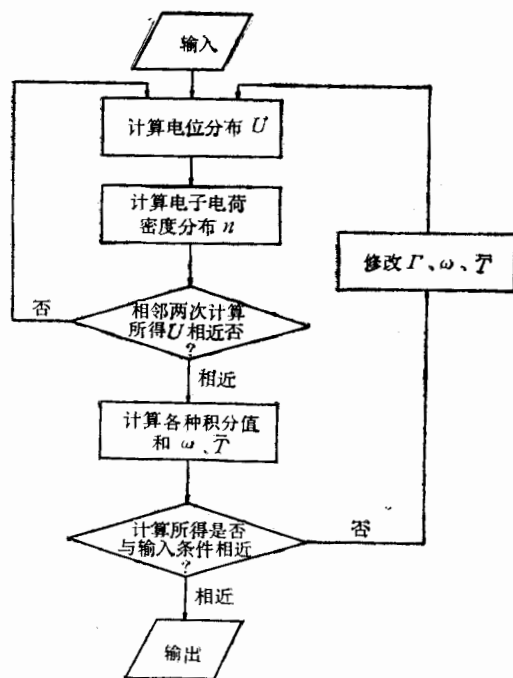


图 2 计算磁约束电子云参量的框图

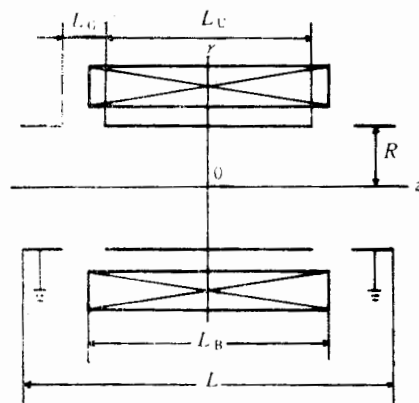


图 3 模拟计算中采用的对称结构图

得出<sup>[9]</sup>。对于碰撞频率  $\nu$  也有一个类似的公式:

$$\nu = n_0 \left( \frac{P}{P_0} \right) \sigma_\nu \sqrt{\frac{3eT}{m}}, \quad (19)$$

式中  $\sigma_\nu$  为电子对  $N_2$  的碰撞截面, 可以查电子温度对碰撞截面的数值表<sup>[10]</sup>。  $\sigma_\nu$ 、 $\sigma_z$  没有统一适用的由电子温度决定的计算公式, 这给计算带来不便。

#### 四、数值计算实例

表 1 给出几个计算实例。例 1、2、3、4、5 是采用图 3 的对称结构。  $L$ 、 $L_U$ 、 $L_G$ 、 $L_B$  分别是电极总长、中间电极长、电极间隙长和磁场线圈长度。  $R$  为电极半径, 对称轴  $z$  为轴向坐标, 中心点  $O$  为原点,  $r$  为径向坐标。  $U_m$ 、 $B_m$  分别是总电压和原点处磁场强度。  $U_0$ 、

$U_s$  分别为电子云中心和表面电压。  $N$  为被约束的电子总数。 例 6 采用五个等间隙电极的对称结构。 中间三个电极长度依次为  $L_u, L_U, L_u$ , 对应  $L_U$  的电极接地, 因而形成了双电子云。

表 1 磁约束电子云模拟计算结果

例	1	2	3	4	5	6
$L(\text{m})$	0.160	0.160	0.160	0.160	0.100	0.160
$L_U(\text{m})$	0.115	0.115	0.115	0.115	0.078	0.016
$L_G(\text{m})$	0.010	0.010	0.010	0.010	0.006	0.008
$L_B(\text{m})$	0.128	0.128	0.128	0.112	0.072	0.128
$R(\text{m})$	0.016	0.016	0.016	0.016	0.020	0.016
$U_m(\text{kV})$	2.00	2.40	2.40	2.40	2.40	2.40
$B_m(\times 10^{-2}T)$	3.00	3.00	3.78	3.00	3.00	3.00
$n_0(\times 10^{13}/\text{m}^3)$	1.49	1.56	1.53	0.84	1.14	1.21
$\omega(\times 10^9/\text{s})$	5.17	5.52	4.11	3.59	4.56	4.75
$\bar{T}(\text{eV})$	132	153	189	124	182	130
$U_s(\text{kV})$	0.70	1.07	1.01	1.88	1.30	1.53
$U_G(\text{kV})$	1.83	2.23	2.21	2.23	2.20	1.93
$\Delta(\times 10^{-6}\text{m})$	2.96	3.70	5.04	1.21	1.49	1.52
$j_m(\times 10^{21}/\text{m}^2\text{s})$	2.00	1.60	0.774	1.35	0.878	1.40
$N(\times 10^{10})$	6.93	6.83	8.03	1.96	2.30	2.54
$\Gamma$	1.03	1.05	1.06	1.31	1.20	1.17

注: 例 6 中  $L_u = 0.046\text{m}$ 。

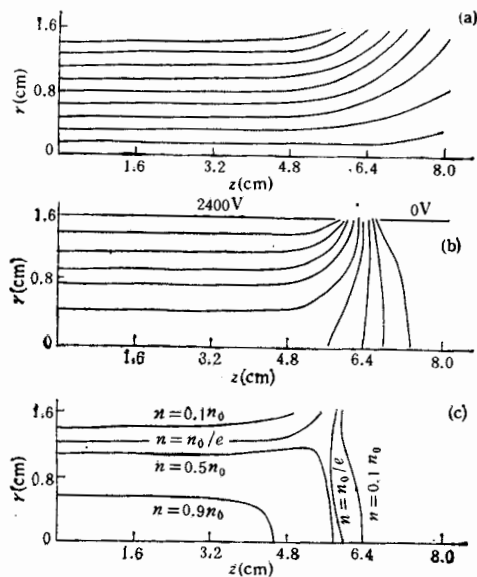


图 4 例 2 的磁力线(a)、等位线(b)和等密度线(c)

例 1、2、3 几何结构相同, 例 1、2 的磁场分布相同而电压不同, 例 2、3 的电压相同而磁场分布不同。 图 4 为例 2 的磁力线、等位线和等密度线。 从图 4(b) 可以看

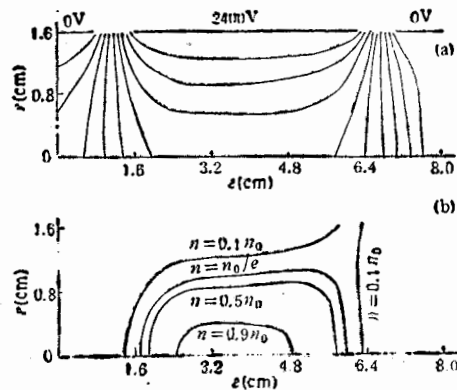


图 5 例 6 的等位线(a)和等密度线(b)

出, 除两端为轴向电场外, 中间电场在长约 9.0cm 区域内是径向的, 从空间电荷透镜的角度看, 这是具有聚焦作用的区域。 图 4 (c) 绘出了电子云  $n = 0.1n_0$ 、 $n = n_0/e$ 、 $n = 0.5n_0$  和  $n = 0.9n_0$  四条等密度线。 可以认为  $n = 0.1n_0$  为电子云的外边界线, 而  $n =$

$0.9n_0$ 为电子云的中心区边界。例4与例2相似,但磁场线圈的长度缩短了,因而磁力线更弯曲了。例5是设计用于聚焦束流的空间电荷透镜。例6采用五电极产生双电子云,

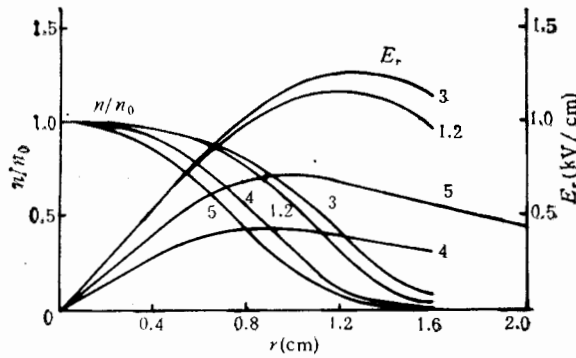


图6 例1—5  $z=0$  平面上电场和电子密度的径向分布

其磁场分布与例2相同,图5是相应的等位线和等密度线。从图5(b)可看出电子云外侧半径较大,内侧密度较大。图6是例1—5  $z=0$  平面上电场和电子密度的径向分布。电子云的中心区密度较均匀且电场在很大半径内呈线性变化,在电子云边缘电场强度达到极大值,在电子云外电场强度沿径向缓慢下降。电子云中的线性电场可以用作空间电荷透镜起聚焦作用。

## 五、结 论

表1中例1—3是对文[11]的三个实验点进行的模拟计算。表2列出了电子密度  $n_0$ 、电子云中心电位  $U_0$  和表面电位  $U_s$  的计算值与实验值的比较。 $n_0$  由射频法测出,  $U_0$ 、 $U_s$  利用阻止场法得出。由表2可看出  $n_0$ 、 $U_s$  的计算值与实验值相符,而  $U_0$  的计算值与实验值有一定偏差,这一方面是由于计算中对  $T$  求平均值,另一方面是由于阻止场法本身就有误差。

表2 电子密度、电子云中心和表面电位的计算值与测量值

	$n_0(10^{13}/m^3)$		$U_0(kV)$		$U_s(kV)$	
	计算值	实验值	计算值	实验值	计算值	实验值
例1	1.49	1.36	0.70	0.90	1.83	1.90
例2	1.56	1.57	1.07	1.32	2.23	2.30
例3	1.53	1.47	1.01	1.53	2.21	2.30

由表1可以看出,磁场相同,电场增加时,电子密度增加。计算中还发现,电场相同,磁场增加,电子密度也增加。磁场值太高或太低时,电子云无法保持稳态。当其它条件相同,而电场增加时,电子温度也增加。这些都与实验相符<sup>[11]</sup>。在表1中例1—4的  $\Gamma$  值得出以下结论,即磁力线越弯曲,要约束住电子云,  $\Gamma$  的取值就越大。此外,当其它条件不变而磁力线更弯曲时,电子密度和温度将减小。

我们已经研究了电子云参数的数值计算方法,并得出了合理的计算结果。但由于磁约束电子云的内部机制十分复杂,涉及到等离子体物理的基本理论,有些问题尚待解决。例如:本论文对  $\omega$ 、 $T$  只求出了平均值;电磁场的形状对电子云的影响还难以得出较定量的结论;电子云稳定性的充要条件有待进一步研究。这些将是今后待解决的重要问题。

作者感谢郁庆长先生的指导, 邱宏先生的帮助, 以及陈鉴璞、李继纲、舒传玉和梁笳鸣诸位先生的支持。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] R. Booth, et al., *N. I. M.*, **151**(1978), 143.
- [ 2 ] H. W. Lefevre, et al., *IEEE Trans*, NS-26(1979), 3115.
- [ 3 ] 郁庆长, 高能物理与核物理, **14**(1990), 973; **14**(1990), 1067
- [ 4 ] T. M. O'Neil, et al., *Phys. Fluids*, **22**(1979), 266.
- [ 5 ] 郁庆长, 原子能科学技术, **21**(1987), 666.
- [ 6 ] Yu Qingchang, Relations Between Parameters Of Self-sustaining Magnetically Confined Electron Cloud And External Conditions, *Chinese J. Nucl. Phys.*, to be published.
- [ 7 ] 黄佳昌, 磁约束电子云中的温度问题, 中国科学院高能物理所, 内部资料, 1991.
- [ 8 ] G. E. Sieger, et al., *Phys. Fluids*, **27**(1984), 291.
- [ 9 ] H. Tawara, et al., *Atom. Nucl. Data*, **36**(1987), 206.
- [ 10 ] S. Trajmar, et al., *Phys. Reports.*, **97**(1983), 263.
- [ 11 ] 郁庆长等, 高能物理与核物理, **15**(1991), 13.

## Numerical Computation of Self-sustaining Magnetically Confined Electron Clouds

HUANG JIACHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

### ABSTRACT

In this paper the axisymmetrical self-sustaining magnetically confined electron clouds are studied by means of the numerical computational method on the basis of the fluid theory. The electron density distribution, electric potential distribution, drift angular frequency and electron temperature can be calculated with a simplified method in which the near-equilibrium state approximation is necessary. The results are, in principle, in agreement with the experiments.