第16卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 9
1992年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1992

量子代数 $SL_q(3)$ 的不可约表示和 Wigner 系数*

于 祖 荣[1)]
（同济大学物理系，上海 200092）

摘 要

本文给出了确定量子代数 $SL_q(3)$ 的不可约表示和 Wigner 系数的方法. 文中引入满足 Serre 类关系的两辅助元素，指出它们以及另两个元素是 $SL_q(2)$ 的 1/2 阶张量算符，它们的约化矩阵元可由一组"递推公式"算出. 从这些公式也可导出 $SL_q(3)$ 的同位旋标量因子的递推公式. 这也意味着对于 $SL_q(3)$, Racah 因子分解定理也适用.

一、引 言

在前一篇文章[1]（此后称 I)中，我们已给出了一个构造 $SL_q(3)$ 代数不可约表示的技术. 这个方法几乎完全平行于文献[2]在处理经典 Lie 代数 $SU(3)$ 所用的技术. 它的基本思想是将 $SL_q(3)$ 的某些生成元看作是 $SL_q(2)$ 的 1/2 阶类张量. 这样在类 Elliott 基上的矩阵元就容易标出.

此文主要用上述结果导出 $SL_q(3)$ 的 Wigner 系数. 文献 [3] 也考虑了这个问题，但是他们仅仅给出了少数数值表，而我们将导出一个轮换公式，从它可以算出所有的 $SL_q(3)$ 的 Wigner 系数，包括文献[3]的数值表. 实际上，我们的轮换公式是针对所谓 $SL_q(3)$ 的标量因子 (SF) 的，它对于 $SL_q(2)$ 不变，这意味着对于 $SL_q(3)$ 的 Wigner 系数，Racah 的因子分解定理也成立.

为了完备起见，本文在第二节中，重新写出量子代数 $SL_q(3)$ 和它的 Boson 实现，特别是引入了两个辅助元素 $e_{\pm3}$. 指出 $e_{\pm3}$ 和 $SL_q(3)$ 的两生成元 $e_{\pm2}$ 是 $SL_q(2)$ 的 1/2 阶类张量. 在此还修正了文献[1]中某些不正确的表达式. 第三节将给出计算 Wigner 系数的方法，并指出必须修正关于张量积的作用以及指明通常 Lie 代数的 Racah 因子分解定理对 $SL_q(3)$ 也正确. 由此我们得到关于 SF 的轮换公式. 在第四节，对于 $e_{\pm3}$ 作了某些讨论，并对全文作了小结.

本文 1991 年 9 月 7 日收到.
* 国家自然科学基金资助.
1) 中国科学院理论物理研究所，北京100080.

二、$SL_q(3)$ 代数

代数 $SL_q(3)$ 是一个结合代数，如文献[1]中，我们取 Chevalley 基[4]:

$$h_1 = N_1 - N_2, \quad h_2 = N_2 - N_3$$

$$e_1 = a_1^+ a_2, \quad e_{-1} = a_2^+ a_1, \quad e_2 = a_2^+ a_3, \quad e_{-2} = a_3^+ a_2$$

它们遵守下列代数规则

$$[h_i, e_{\pm i}] = \pm 2 e_{\pm i}, \quad i = 1,2 \tag{1a}$$

$$[h_i, e_j] = \mp e_j, \quad i \neq j; \; i,j = 1,2 \tag{1b}$$

$$[e_i, e_{-i}] = [h_i], \quad i = 1,2 \tag{1c}$$

以及 Serre 关系

$$e_{\pm1}^2 e_{\pm2} + e_{\pm2} e_{\pm1}^2 = [2] e_{\pm1} e_{\pm2} e_{\pm1}, \tag{1d}$$

其中 $a_i^+(a_i, i = 1,2,3)$ 是 3 个独立的 q boson 算符，它们满足众知的对易规则．$N_i(i=1,2,3)$ 是 boson 数算符，但是 $N_i \neq a_i^+ a_i$． $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})\, x$ 是一个数或者一个算符．

我们引入两个辅助算符

$$e_3 = a_1^+ a_3, \quad e_{-3} = a_3^+ a_1$$

它们满足

$$[h_i, e_{\pm3}] = \pm e_{\pm3}, \quad i = 1,2 \tag{1e}$$

$$[e_3, e_{-3}] = [h_1 + h_2], \tag{1f}$$

并且可以证明有类 Serre 关系

$$e_{\mp1}^2 e_{\pm3} + e_{\pm3} e_{\mp1}^2 = [2] e_{\mp1} e_{\pm3} e_{\mp1}, \tag{1g}$$

为了以下的目的，我们重新定义 $SL_q(3)$ 的生成元

$$J_0 = h_1/2, \quad J_\pm = e_{\pm1} \tag{2a}$$

$$Q = -(h_1 + 2h_2) \tag{2b}$$

以及

$$T_{\frac{1}{2}} = -e_{-2}, \quad T_{-\frac{1}{2}} = e_{-3}, \quad V_{-\frac{1}{2}} = e_2, \quad V_{\frac{1}{2}} = e_3 \tag{2c}$$

显然

$$V_s = (-1)^{\frac{1}{2}-s} (T_{-s})^+, \quad s = \pm \frac{1}{2} \tag{3}$$

它们满足

$$[Q, J_0] = [Q, J_\pm] = 0, \tag{4a}$$

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2[J_0] \tag{4b}$$

$$[J_0, J_s] = sT, \quad [J_0, V_s] = sV_s, \quad s = \pm 1/2 \tag{4c}$$

$$[Q, T_s] = 3T, \quad [Q, V_s] = -3V_s, \quad s = \pm 1/2 \tag{4d}$$

和

$$J_\mp^2 T_{\pm\frac{1}{2}} + T_{\pm\frac{1}{2}} J_\mp^2 = [2] J_\mp T_{\pm\frac{1}{2}} J_\mp. \tag{5}$$

在 $q \to 1$，关系式(1)—(5)转变成通常 $SU(3)$ 的形式．

如果 q 不是单位根,则 $SL_q(3)$ 的有限维不可约表示可以用两个整数 λ 和 μ 标记[3]。而在不可约表示空间 L 中的正交归一基矢量可以用 Elliott 类基 $|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle$,即

$$Q|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle = \varepsilon|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle, \tag{6a}$$

$$J^2|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle = \begin{cases}[j][j+1]|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle, & \text{若 } j = \text{整数}\\ [j+1/2]^2|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle, & \text{若 } j = \text{半整数}\end{cases} \tag{6b}$$

$$J_0|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle = m|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle. \tag{6c}$$

用关系式(5),我们可以得到 (I12) 式(即为 I 中的 $eq.$(12))。解 (I12) 式,我们有

$$\langle\varepsilon+3, j'm'|T|\varepsilon jm\rangle = \frac{\langle\varepsilon+3j'\|T\|\varepsilon j\rangle}{\sqrt{[2j'+1]}} q^{A/2} C_q\left(jm\,\frac{1}{2}\,s\middle|j'm'\right), \tag{7a}$$

其中

$$A = (-1)^{s+j-j'}(j-(-1)^{j'-j-s}m'+1/2),$$

$$j' = j \pm \frac{1}{2},\quad s = \pm\frac{1}{2} \tag{7b}$$

这里 $C_q(jm\,1/2\,s|j'm')$ 是 $SL_q(2)$ 的 Wigner 系数[5-7]。(7) 式可以认作类 Wigner-Eckart 定理,T_s 和 V_s 可以看作是 $SL_q(2)$ 的 1/2 阶类张量。最后我们有

$$\langle\varepsilon' j'm'|J_\pm|\varepsilon jm\rangle = \sqrt{[j\mp m][j\pm m+1]}\,\delta_{\varepsilon'\varepsilon}\delta_{j'j}\delta_{m'm\pm1}, \tag{8}$$

和

$$\left|\left\langle \varepsilon_{\max}-3(a+b), j_0+\frac{a-b}{2}\middle\|T\middle\|\varepsilon_{\max}-3(a+b+1), j_0+\frac{a-b+1}{2}\right\rangle\right|^2$$
$$= [1+a][2j_0+2+a]\left[\frac{\varepsilon_{\max}}{2}-j_0-a\right], \tag{9a}$$

$$|\langle\varepsilon_{\max}-3(a+b), j_0+(a-b)/2\|T\|\varepsilon_{\max}-3(a+b+1), j_0+(a-b-1)/2\rangle|^2$$
$$= [1+b][2j_0-b][\varepsilon_{\max}/2+j_0+1-b], \tag{9b}$$

为简便起见,这里已略去了量子数 $(\lambda\mu)$。从(3)式还可导得

$$\langle\varepsilon-3, j'\|V\|\varepsilon j\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+j-j'}\langle\varepsilon j\|T\|\varepsilon-3, j'\rangle, \tag{10}$$

(9)式中,$\varepsilon_{\max} = 2\lambda+\mu$。$j_0 = \mu/2$,它是对应于 $\varepsilon_{\max}$ 的唯一的 j 值,以及

$$a = 0,1,2\cdots\cdots\lambda;\ b = 0,1,2,\cdots,\mu \tag{11}$$

这里 a, b 与 (I20) 式中的 n, i 有关系: $n = a+b, i = b$。

我们选约化矩阵元 $\langle\varepsilon' j'\|V\|\varepsilon j\rangle$ 为实的和正的。

例如

(1) $(\lambda,\mu) = (20)$, $\varepsilon_{\max} = 4$, $j_0 = 0$

表 1a $\langle\varepsilon' j'\|V\|\varepsilon j\rangle$ 的值

ε'	j'	ε	j	$\langle\varepsilon' j'\|V\|\varepsilon j\rangle$
1	1/2	4	0	[2]
−2	1	1	1/2	[2][3]

表 1b　$Z=\langle\varepsilon'j'm'|V_{-1/2}|\varepsilon jm\rangle$ 的非零值

ε'	j'	m'	ε	j	m	Z
1	1/2	−1/2	4	0	0	[2]
−2	1	−1	1	1/2	1/2	[2]
−2	1	0	1	1/2	−1/2	1

(2) $\langle\lambda\mu\rangle=\langle 21\rangle$，$\varepsilon_{\max}=5, j_0=1/2$

表 2a　$\langle\varepsilon'j'\|V\|\varepsilon j\rangle$ 的值

ε'	j'	ε	j	$\langle\varepsilon'j'\|V\|\varepsilon j\rangle$
2	1	5	1/2	[2][3]
2	0	5	1/2	[4]
−1	3/2	2	1	[2][4]
−1	1/2	2	1	[4]
−1	1/2	2	0	[2][3]
−4	1	−1	3/2	[4]
−4	1	−1	1/2	[2][4]

表 2b　$Z=\langle\varepsilon'j'm'|V_{-1/2}|\varepsilon jm\rangle$ 的非零值

ε'	j'	m'	ε	j	m	Z
2	−1	1	5	1/2	−1/2	[2]
		0			1/2	1
	0	0			1/2	[4]/[2]
−1	3/2	−3/2	2	1	−1	[2]
		−1/2			0	[2]/[3]
		1/2			1	[2]/[3]
	1/2	1/2			1	[4]/[3]
		−1/2			0	[4]/[2][3]
		−1/2		0	0	[3]
−4	1	1	−1	3/2	−1/2	1
		0			1/2	[2]/[3]
		−1			−1/2	1/[3]
		−1		1/2	−1/2	[2][4]/[3]
		0			1/2	[4]/[3]

这些结果与文献[3]的相同，这似乎表明我们选取的 $e_{\mp 3}$ 是合适的。

借助最高权态 $|(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}j_0m\rangle$ 的帮助，所有的基矢量$|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle$ 均可得到。这是因为

$$J_{\pm}|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle=\sqrt{[j\mp m][j\pm m+1]}\,|(\lambda\mu)\varepsilon jm+1\rangle, \tag{12a}$$

$$|(\lambda\mu)\varepsilon-3jm\rangle=(-1)^{\frac{1}{2}+j-j'}N(\varepsilon j'j)\times\sum_{ms}C_q\left(jm\,\frac{1}{2}s\,\middle|\,j'm'\right)V_s|(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle, \tag{12b}$$

其中 $N(\varepsilon j'j)$ 是归一化常数，

$$\{N(\varepsilon j'j)\}^{-1}=\langle\varepsilon j\|T\|\varepsilon-3j'\rangle/\sqrt{[2j'+1]}$$
$$\times\sum_{ms}\left\{C_q\left(jm\ \frac{1}{2}s\middle|j'm'\right)\right\}^2q^{A/2}. \tag{13}$$

三、$SL_q(3)$ 的 Wigner 系数

Wigner 系数出现在张量积 $(\lambda_a\mu_a)\otimes(\lambda_b\mu_b)$ 的分解中，象经典情况一样，首先必须定义生成元在张量积空间 $L\otimes L$ 中的作用．我们尝试将算符 $H=Q, J_0$ 或它们的线性组合定义为

$$H(f\otimes g)=Hf\otimes g+f\otimes Hg,\quad f\otimes g\in L\otimes L \tag{14}$$

当H作用到 $L\otimes L$，我们写

$$\Delta(H)=H\otimes 1+1\otimes H, \tag{15}$$

映射Δ称余积 (Coproduct)，它在 Hopf 代数[4]中定义．从(15)式，我们有

$$\Delta(q^{\beta H})=q^{\beta H}\otimes q^{\beta H}, \tag{16}$$

对于 $\Delta(T_{1/2})$和 $\Delta(V_{-1/2})$，我们应当如此定义使得 $SL_q(3)$同态于 $SL_q(3)\otimes SL_q(3)$，特别是应当要求

$$[\Delta(T_{\frac{1}{2}}),\Delta(V_{-\frac{1}{2}})]$$
$$=(q^{-(Q/2+J_0)}\otimes q^{-(Q/2+J_0)}-q^{(Q/2+J_0)}\otimes q^{(Q/2+J_0)})/(q-q^{-1}), \tag{17}$$

我们发现一个与(15)式相似的定义与(17)式不相容，而必须将 $\Delta(T_{1/2})$和 $\Delta(V_{-1/2})$定义为

$$\Delta(T_{\frac{1}{2}})=T_{\frac{1}{2}}\otimes q^{\frac{1}{2}(Q/2+J_0)}+q^{-\frac{1}{2}(Q/2+J_0)}\otimes T_{\frac{1}{2}}, \tag{18a}$$

$$\Delta(V_{-\frac{1}{2}})=V_{-\frac{1}{2}}\otimes q^{\frac{1}{2}(Q/2+J_0)}+q^{-\frac{1}{2}(Q/2+J_0)}\otimes V_{-\frac{1}{2}}, \tag{18b}$$

令 $|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle$ 是 $L\otimes L$ 的正交归一基，则

$$|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle$$
$$=\sum_{\varepsilon_a\varepsilon_bj_aj_b}\begin{pmatrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) & \Big\|\ (\lambda\mu)\alpha\\ \varepsilon_aj_a & \varepsilon_bj_b & \Big\|\ \varepsilon j\end{pmatrix}|\varepsilon_aj_a\varepsilon_bj_bjm\rangle, \tag{19}$$

其中 α 标记约化 $(\lambda_a\mu_a)\otimes(\lambda_b\mu_b)\to(\lambda\mu)$ 的多重性．称 $\begin{pmatrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) & \Big\|\ (\lambda\mu)\alpha\\ \varepsilon_aj_a & \varepsilon_bj_b & \Big\|\ \varepsilon j\end{pmatrix}$ 为 $SL_q(3)$ 的标量因子 (SF)，它是 $SL_q(2)$ 的不变量．而 $|\varepsilon_aj_a\varepsilon_bj_bjm\rangle$ 定义为

$$|\varepsilon_aj_a\varepsilon_bj_bjm\rangle$$
$$=\sum_{m_am_b}C_q(j_am_aj_b|jm\rangle|(\lambda_a\mu_a)\varepsilon_aj_am_a\rangle|(\lambda_b\mu_b)\varepsilon_bj_bm_b\rangle, \tag{20}$$

因此

$$|\alpha(\lambda\mu)\varepsilon jm\rangle$$
$$=\sum_{\substack{\varepsilon_aj_am_a\\ \varepsilon_bj_bm_b}}\begin{pmatrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) & \Big|\ (\lambda\mu)\alpha\\ \varepsilon_aj_am_a & \varepsilon_bj_bm_b & \Big|\ \varepsilon jm\end{pmatrix}|(\lambda_a\mu_a)\varepsilon_aj_am_a\rangle|(\lambda_b\mu_b)\varepsilon_bj_bm_b\rangle, \tag{21}$$

也就是说 $SL_q(3)$ 的 Wigner 系数 $\begin{pmatrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) & \Big|\ (\lambda\mu)\alpha\\ \varepsilon_aj_am_a & \varepsilon_bj_bm_b & \Big|\ \varepsilon jm\end{pmatrix}$ 可以写成

$$\begin{pmatrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) & (\lambda\mu)\alpha \\ \varepsilon_a j_a m_a & \varepsilon_b j_b m_b & \varepsilon jm\end{pmatrix} = \left(\begin{matrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) \\ \varepsilon_a j_a & \varepsilon_b j_b\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(\lambda\mu)^\alpha \\ \varepsilon j\end{matrix}\right) C_q(j_a m_a j_b m_b | jm), \tag{22}$$

这个等式可以认作为推广的 Racah 因子分解定理。

下面给出计算 SF 的公式

由于 $$\{T_s|(\lambda\mu)\varepsilon_{\max}j_0 m\rangle = 0,\ s = \pm 1/2 \tag{23}$$

所以我们有

$$\sum_{\varepsilon_a j_a \varepsilon_b j_b} \langle \varepsilon'_a j'_a \varepsilon'_b j'_0 j' \| T \| \varepsilon_a j_a \varepsilon_b j_b j_0\rangle \left(\begin{matrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) \\ \varepsilon_a j_a & \varepsilon_b j_b\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\alpha \\ \varepsilon_{\max} j_0\end{matrix}\right) = 0, \tag{24}$$

一般若 $\alpha \neq 1$ 那么(24)式有几个解。用 (18) 式以及 $SL_q(2)$ 的 Wigner 系数的对称性，我们可得

$$\begin{aligned}&\langle \varepsilon'_a j'_a \varepsilon'_b j'_b j' \| T \| \varepsilon_a j_a \varepsilon_b j_b j\rangle \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}+j'_a+j_b+j} \sqrt{[2j+1][2j'+1]} \begin{Bmatrix}\frac{1}{2} & j_a & j'_a \\ j'_b & j' & j\end{Bmatrix}_q \langle \varepsilon_a + 3j'_a \| T^a \| \varepsilon_a j_a\rangle q^{B_{1/2}} \\ &+ (-1)^{\frac{1}{2}+j_a+j_b+j} \sqrt{[2j+1][2j'+1]} \begin{Bmatrix}\frac{1}{2} & j_b & j'_b \\ j_a & j' & j\end{Bmatrix}_q \langle \varepsilon_b + 3j'_b \| T^b \| \varepsilon_b j_b\rangle q^{B_2/2},\end{aligned} \tag{25}$$

此处 $\begin{Bmatrix}j_1 j_2 j_3 \\ l_1 l_2 l_3\end{Bmatrix}_q$ 是 $SL_q(2)$ 的 Racah 系数[5,8]，而 $\langle \varepsilon'_a j'_a \| T^a \| \varepsilon_a j_a\rangle$或 $\langle \varepsilon'_b j'_b \| T^b \| \varepsilon_b j_b\rangle$ 可用(9)式算出。

用(12)和(13)式，最后可得

$$\begin{aligned}&\left(\begin{matrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) \\ \varepsilon'_a j'_a & \varepsilon'_b j'_b\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(\lambda\mu)^\alpha \\ \varepsilon - j\ j'\end{matrix}\right) = \{\langle \varepsilon j \| T \| \varepsilon - 3j'\rangle\}^{-1} \\ &\times \sum_{\varepsilon_a j_a \varepsilon_b j_b} \left(\begin{matrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) \\ \varepsilon_a j_a & \varepsilon_b j_b\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\alpha \\ \varepsilon j\end{matrix}\right) \langle \varepsilon_a j \varepsilon_b j j \| T \| \varepsilon'_a j'_a \varepsilon'_b j'_b j'\rangle.\end{aligned} \tag{26}$$

从(26)式以及已知的 $\left(\begin{matrix}(\lambda_a\mu_a) & (\lambda_b\mu_b) \\ \varepsilon_a j_a & \varepsilon_b j_b\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}(\lambda\mu)\alpha \\ \varepsilon_{\max} j_0\end{matrix}\right)$，我们可以决定所有的 SF，从而决定所有的 $SL_q(3)$ 的 Wigner 系数。

四、讨论和结论

象经典 Lie 代数一样，在 Chevalley 基中，生成元 $e_{\pm 3}$ 应由下列定义

$$e'_3 = (ade_1)_q e_2 = e_1 e_2 - q e_2 e_1 = q^{-N_2} a_1^+ a_3, \tag{27a}$$

$$e'_{-3} = (ade_{-2}) e_{-1} = e_{-2} e_{-1} - q^{-1} e_{-1} e_{-2} = q^{N_2} a_3^+ a_1, \tag{27b}$$

其中映射 “ad” 为伴随表示[4]。可以指出 $e'_{\pm 3}$ 的类 Serre 关系为

$$q^{-1} e^2_{\pm 1} e^1_{\mp 3} + q e^1_{\mp 3} e^2_{\pm 1} = [2] e_{\pm 1} e^1_{\mp 3} e_{\pm 1}, \tag{28}$$

用(8)和(28)式可得 $e^1_{\pm 3}$ 有象(7)式的表示式。另外也可直接用定义(27)以及 (7) 和(8)式计算，两者结果是相同的，因此有了(7)式和(9)式就完全决定了 $SL_q(3)$ 的不可约表

示

如果定义

$$V'_{1/2} = q^{-N_2/2}a_1^+a_3, \tag{29a}$$

$$V'_{-1/2} = q^{N_1/2}a_2^+a_3, \tag{29b}$$

$$T'_{-1/2} = q^{-(N_2+1)/2}a_3^+a_1, \tag{29c}$$

$$T'_{1/2} = -q^{(N_1+1)/2}a_3^+a_2, \tag{29d}$$

容易验证它们满足的类 Serre 关系为

$$q^{\mp\frac{1}{2}}J_\mp^2V'_{\pm\frac{1}{2}} + q^{\pm\frac{1}{2}}V'_{\pm\frac{1}{2}}J_\mp^2 = [2]J_\mp V'_{\pm\frac{1}{2}}J_\mp, \tag{30a}$$

$$q^{\pm\frac{1}{2}}J_\pm^2T'_{\mp\frac{1}{2}} + q^{\mp\frac{1}{2}}T'_{\mp\frac{1}{2}}J_\pm^2 = [2]J_\pm T'_{\mp\frac{1}{2}}J_\pm. \tag{30b}$$

由(30)式可得到

$$\langle\varepsilon'j'm'|V'_s|\varepsilon jm\rangle = \frac{\langle\varepsilon'j'\|V\|\varepsilon j\rangle}{\sqrt{[2j'+1]}}C_q\left(jm\ \frac{1}{2}\ s\middle|j'm'\right),\ s = \pm\frac{1}{2} \tag{31}$$

以及

$$\langle\varepsilon-3j'\|V'\|\varepsilon j\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+j-j'}\langle\varepsilon j\|T\|\varepsilon-3j'\rangle, \tag{32}$$

比较(31)式和(7)式,两者的区别是明显的．至于 T'_s 和 V'_s 的约化矩阵元，用与(9)式相似的手续也易算出．由于(31)的表达形式，所以认为 V'_s 和 T'_s 是 $SL_q(2)$ 的 1/2 阶张量[9,10]．

总的来说，量子代数 $SL_q(3)$ 的不可约表示和 Wigner 系数可由 (9) 式求得，它是我们发展的方法中的关键的基本公式． 我们也指出 Racah 因子分解定理可以推广到 $SL_q(3)$ 情形．它的 SF 可以用我们方法算出． 当然现在的方法不适用于 q 为单位根的情形,关于这种情形以后将仔细研究．

作者感谢孙洪洲教授、叶家琛教授有益的讨论．

参 考 文 献

[1] Zurong Yu, *J. Phys.*, **A24** (1991), L399.
[2] 孙洪洲,中国科学**14**(1965),840.
[3] Zhang-si Ma, *J. Math. Phys.*, **31**(1989), 550.
[4] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63.
Lett. Math. Phys., **11**(1986), 247.
[5] Bo-yu Hou, et al., *Commun. Theor. Phys.*, **13**(1990), 181,341.
[6] H. Ruegg, *J. Math. Phys.*, **31**(1990), 1085.
[7] M. Nomur, *J. Math. Phys.*, **30**(1989), 2397.
[8] I.I. Kachurik & A.V. Klimyk, *J. Phys.*, **A23**(1990), 2717.
[9] L.L. Biedenharn, *Lett. Math. Phys.*, **20**(1990), 271.
[10] M. Nomura, *J. Phys. Soci. Japan.*, **59**(1990), 2345.

Irreducible Representations and Wigner Coefficients of Quantum Algebra $SL_q(3)$

YU ZURONG

(*Department of Physics, Tongji University, Shanghai* 200092)

ABSTRACT

In this paper, the irreducible representations and Wigner coefficients of $SL_q(3)$ have been obtained. The generators of $SL_q(3)$ satisfying the serre relations are considered as 1/2 rank tensor——like of $SL_q(2)$. Their reduced matrix elements can be calculated by a set of recurrent formula. The isoscalar factors (ISF) of $SL_q(3)$ can also be derived by them. This means that the Racah Factorization Lemma is also exact for the quantum algebra $SL_q(3)$.