第 17 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 17, No. 1
1993 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1993

(2+1)维 $SU(2)$ 四费米子耦合理论的 Ward–Takahashi 恒等式和质量谱

沈　坤　　裘忠平
(华中师范大学粒子物理研究所，武汉　430070)

摘　　要

本文利用含复合场的 Ward-Takahashi 恒等式研究了(2 + 1) 维 $SU(2)$四费米子耦合的理论.在 $SU(2)$手征对称性既有明显破缺又有动力学破缺时,得到了动力学所生成的费米子质量和束缚态的谱性质，并讨论了矢量流和轴矢流的性质.结果表明：束缚态 π_a 获得了质量并得到轴矢流部分守恒的结论；当费米子的流质量较小时，Goldberger-Treiman 关系近似成立.

一、引　　言

量子色动力学（QCD）已普遍地被认为是强相互作用的基本理论．在 QCD 中，跑动的耦合常数使得理论在高能大动量转移和低能小动量转移时具有完全不同的性质．这样，由耦合常数的强、弱范围可以把 QCD 划分为夸克、胶子的高能相和强子的低能相[1]．这两相分别对应于 QCD 的两种不同的真空，即微扰真空和非微扰真空．

在微扰相中，夸克具有流质量．夸克和胶子几乎是自由传播，并可以利用微扰论来处理高能硬过程．在这些过程中，夸克和胶子是可以“看见的”[1]．然而，在非微扰相中，夸克和胶子之间有很强的吸引相互作用，从而使得夸克和胶子发生真空凝聚，即 $\langle\bar{q}q\rangle \neq 0$，$\langle G_{\mu\nu}^{a2}\rangle \neq 0$．这些凝聚反映了非微扰的真空性质．在非微扰相中，所观测到的粒子是由夸克形成的复合态．

由于非微扰理论本身所固有的困难，QCD 的束缚态性质和这两相之间的联系仍未完全解决．近来，人们尝试从夸克层次出发希望能导出一个合理的低能有效拉氏量来描述介子物理[2,3]．由于在非微扰相中夸克和胶子被禁闭在强子内部，因而在有效拉氏量中所描述的对象不再是夸克和胶子，而应是由夸克形成的复合粒子或集体态．

为了得到这些低能介子物理的有效拉氏量，人们从各种模型出发，通过对费米子拉氏量的玻色化来讨论介子的谱性质和衰变过程[2,3]．在对拉氏量进行玻色化的过程中，不可避免地要采取各种近似方法．可是，在低能强耦合情况下这些近似方法的可靠性以及对谱的影响等问题却有待进一步地检验．因此，寻找其它方法来讨论低能介子的质量谱和

本文 1991 年 9 月 3 日收到．
* 国家自然科学基金资助．

PCAC 等性质是人们非常感兴趣的课题之一.

鉴于低能介子的谱性质在很大程度上是由手征对称性决定的,我们在文献[4]中利用含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式从对称性角度来考察束缚态的谱性质,并以(2 + 1)维 $U(1)$ 手征 Gross-Neveu 模型为例讨论了手征对称性和质量谱的性质,得到了 Goldberger-Treiman 关系和束缚态的质量谱. 本文利用文献[4]的方法来讨论当 $SU(2)$ 手征对称性既有明显破缺又有动力学破缺时,费米子质量的动力学产生和束缚态的谱性质.

由于(2 + 1)维四费米子耦合在 $1/N$ 展开下是可重整的[5],并且具有 QCD 的某些特征,尤其是它具有在(1 + 1)维精确可解模型中所不可能有的某些非微扰现象.因此,我们期望对(2 + 1)维手征四费米子模型的研究将会有助于进一步理解 QCD 的手征对称性和低能束缚态的谱性质.

为了描述费米子对凝聚和复合介子,在第二节中引入了含复合外源的生成泛函.根据手征对称性导出了相应的手征 Ward-Takahashi 恒等式. 在第三节中,我们利用 Ward-Takahashi 恒等式得到了费米子的质量公式,并讨论了在非微扰相中夸克动力学质量的生成和 Goldberger-Treiman 关系.在第四节和第五节中,我们讨论了标量介子的质量谱和矢量流及轴矢流的性质.当手征对称性既有明显破缺又有动力学破缺时,π 介子获得了质量;相应地,得到了轴矢流部分守恒(PCAC)的性质. 最后在第六节中做了简短的小结.

二、手征 Ward-Takahashi 恒等式

(2 + 1)维 $SU(2)$ 手征四费米子理论的拉氏量为[6]

$$\mathscr{L}_s = -\bar{q}\gamma.\partial q - G[(\bar{q}\tau^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau^a q)^2]. \tag{2.1}$$

其中 $q(x)$ 是色 $SU(3)$ 的三重态和味 $SU(2)$ 空间的二重态

$$\begin{bmatrix} u^a(x) \\ d^a(x) \end{bmatrix} (a = 1,2,3),$$

而 τ^a 是单位矩阵和 Pauli 矩阵,即 $(I,\boldsymbol{\tau})$. 由于流质量的存在,拉氏量应为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_s - \bar{q}M_0 q. \tag{2.2}$$

其中流质量

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_u^0 & 0 \\ 0 & m_d^0 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

使得手征对称性是明显破缺的.

在手征 $SU(2)\otimes SU(2)$ 变换

$$\delta\psi(x) = \frac{i}{2}(\theta^\alpha + \gamma_5\theta_5^\alpha)\tau^\alpha\psi(x).$$

$$\delta\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x)\frac{i}{2}\tau^\alpha(-\theta^\alpha + \gamma_5\theta_5^\alpha), \ (\alpha = 0,1,2,3) \tag{2.4}$$

下,可以得到相应的流为

$$J_{\mu}^{a}(x) = i\bar{\phi}(x)\frac{1}{2}\tau^{a}\gamma_{\mu}\phi(x).$$

$$A_{\mu}^{a}(x) = i\bar{\phi}(x)\frac{1}{2}\tau^{a}\gamma_{\mu}\gamma_{5}\phi(x). \tag{2.5}$$

流质量的存在使得轴矢流 $A_{\mu}^{a}(x)$ 不再为 Noether 流(即守恒流)。若 u、d 的质量有分裂，矢量流 $J_{\mu}^{a}(x)$ 也不再为 Noether 流。

由(1)式可知，当 $G<0$ 时，夸克之间的吸引相互作用将使得夸克对发生真空凝聚。为了描述夸克对凝聚，我们引入了复合场 $\bar{q}(x)\tau^{a}q(x)$、$\bar{q}(x)i\gamma_{5}\tau^{a}q(x)$ 的外源[7,4]。相应地，生成泛函为

$$\begin{aligned}Z[\bar{\eta},\eta;K^{a},K_{5}^{a}] &\equiv e^{iW[\bar{\eta},\eta;K^{a},K_{5}^{a}]}\\ &= \int \mathscr{D}\Psi\mathscr{D}\phi \exp\Big(i\int d^{3}x\,[\mathscr{L} + \bar{\eta}(x)q(x) + \bar{q}(x)\eta(x)\\ &\quad + \bar{q}(x)\tau^{a}q(x)K^{a}(x) + \bar{q}(x)i\gamma_{5}\tau^{a}q(x)K_{5}^{a}(x)]\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

容易看出，夸克的质量破缺项可以当作复合外源

$$\mathscr{L}_{M_{0}} = -a^{a}\bar{q}(x)\tau^{a}q(x). \tag{2.7}$$

其中 $M^{0} = a^{a}\tau^{a}$,

$$a^{a} = \left(\frac{m_{u}^{0}+m_{d}^{0}}{2},0,0,\frac{m_{u}^{0}-m_{d}^{0}}{2}\right).$$

这样，连通 Green 函数的生成泛函可表为

$$W[\bar{\eta},\eta;K^{a},K_{5}^{a}] = W_{s}[\bar{\eta},\eta;K^{a}-a^{a},K_{5}^{a}] - W_{s}[0,0;-a^{a},0]. \tag{2.8}$$

上式中 $W_{s}[0,0;-a^{a},0]$ 是一个常数项，对物理结果没有影响。

定义

$$\begin{aligned}\frac{\delta W[J]}{\delta\eta(x)} &= -\bar{q}_{c}(x),\\ \frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\eta}(x)} &= q_{c}(x),\\ -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\tau^{a}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}W[J] &= G^{a}(x),\\ -\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}i\gamma_{5}\tau^{a}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}W[J] &= G_{5}^{a}(x).\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 J 是 $(\bar{\eta},\eta;K^{a},K_{5}^{a})$ 的缩写。容易看出

$$\begin{aligned}\frac{\delta W[J]}{\delta K^{a}(x)} &= \bar{q}_{c}(x)\tau^{a}q_{c}(x) + G^{a}(x),\\ \frac{\delta W[J]}{\delta K_{5}^{a}(x)} &= \bar{q}_{c}(x)i\gamma_{5}\tau^{a}q_{c}(x) + G_{5}^{a}(x),\end{aligned} \tag{2.10}$$

经 Legendre 变换后，正规顶角生成泛函为

$$\Gamma[\phi_{c}] = W[J] - \int d^{3}x[\bar{\eta}(x)q_{c}(x) + \bar{q}_{c}(x)\eta(x)$$

$$+ (q_c(x)\tau^a q_c(x) + G^a(x))K^a(x) + (\bar{q}_c(x)i\gamma_5\tau^a q_c(x) + G_5^a(x))K_5^a(x)]. \tag{2.11}$$

其中 ϕ_c 是 $(\bar{q}_c, q_c; G^a, G_5^a)$ 的缩写.

相应地,有

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(x)} = \bar{\eta}(x) + \bar{q}_c(x)\tau^a(K^a(x) + i\gamma_5 K_5^a(x)),$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\bar{q}_c(x)} = -\eta(x) - \tau^a(K^a(x) + i\gamma_5 K_5^a(x))q_c(x),$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G^a(x)} = -K^a(x),$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^a(x)} = -K_5^a(x). \tag{2.12}$$

在外源的手征变换下,根据手征对称的生成泛函 W_s 具有不变性可以导出相应的手征 Ward-Takahashi 恒等式

$$\int d^3x \left[\bar{\eta}(x)\frac{i}{2}\tau^a\frac{\delta W_s[J]}{\delta\bar{\eta}(x)} - \frac{\delta W_s[J]}{\delta\eta(x)}\frac{i}{2}\tau^a\eta(x) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta W_s[J]}{\delta K^\beta(x)}K^\gamma(x) + \frac{\delta W_s[J]}{\delta K_5^\beta(x)}K_5^\gamma(x)\right)\right] = 0, \tag{2.13a}$$

$$\int d^3x \left[-\bar{\eta}(x)\frac{i}{2}\tau^a\gamma_5\frac{\delta W_s[J]}{\delta\bar{\eta}(x)} + \frac{\delta W_s[J]}{\delta\eta(x)}\frac{i}{2}\gamma_5\tau^a\eta(x) + d_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta W_s[J]}{\delta K^\beta(x)}K_5^\gamma(x) - \frac{\delta W_s[J]}{\delta K_5^\beta(x)}K^\gamma(x)\right)\right] = 0. \tag{2.13b}$$

其中 $d_{\alpha\beta\gamma}$ 和 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 的定义为

$$\{\tau^\alpha, \tau^\beta\} = 2d_{\alpha\beta\gamma}\tau^\gamma,\quad [\tau^\alpha, \tau^\beta] = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\tau^\gamma. \tag{2.14}$$

上式中应用了重复指标表示求和的约定.

由(2.8)式可知,当外源作如下变换

$$K^a(x) \to K^a(x) - a^a, \tag{2.15}$$

手征对称的连通生成泛函就是含质量破缺的连通生成泛函. 相应地,可以得到

$$\int d^3x \left\{\bar{\eta}(x)\frac{i}{2}\tau^a\frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\eta}(x)} + \frac{\delta W[J]}{\delta\eta(x)}\frac{i}{2}\tau^a\eta(x) - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\delta W[J]}{\delta K^\beta(x)}(K^\gamma(x) - a^\gamma) + \frac{\delta W[J]}{\delta K_5^\beta(x)}K_5^\gamma(x)\right]\right\} = 0. \tag{2.16a}$$

$$\int d^3x \left\{\bar{\eta}(x)\frac{i}{2}\tau^a\gamma_5\frac{\delta W[J]}{\delta\bar{\eta}(x)} - \frac{\delta W[J]}{\delta\eta(x)}\frac{i}{2}\tau^a\gamma_5\eta(x) + d_{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\delta W[J]}{\delta K_5^\beta(x)}(K^\gamma(x) - a^\gamma) - \frac{\delta W[J]}{\delta K^\beta(x)}K_5^\gamma(x)\right]\right\} = 0. \tag{2.16b}$$

以上就是有质量破缺项的连通生成泛函所满足的 $SU(2)$ 手征 Ward-Takahashi 恒等式. 将这两式对外源求若干次导数,然后令外源为零就可以给出 Green 函数之间所满足

的一些 Ward-Takahashi 恒等式。

为了便于质量谱的讨论，利用(2.9～10)式和(2.12)式，可以将(2.16)式改写为正规顶角生成泛函的形式

$$\int d^3x \left\{ \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(x)} \frac{i}{2}\tau_\alpha q_c(x) + \bar{q}_c(x)\frac{i}{2}\tau_\alpha \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta \bar{q}_c(x)} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\bar{q}_c(x)\tau_\beta q_c(x) + G_\beta(x))a_\gamma + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G_\gamma(x)} G_\beta(x) + \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\gamma(x)} G_5^\beta(x)\right)\right\} = 0. \tag{2.17a}$$

$$\int d^3x \left\{ \bar{q}_c(x)\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta \bar{q}_c(x)} - \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(x)}\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 q_c(x) + d_{\alpha\beta\gamma}(\bar{q}_c(x) i\gamma_5\tau^\beta q_c(x) + G_5^\beta(x))a_\gamma + d_{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\beta(x)} G_5^\gamma(x) - \frac{\delta\Gamma}{\delta G_5^\beta(x)} G^\gamma(x)\right]\right\} = 0. \tag{2.17b}$$

这些就是含有质量破缺项的有效作用量的 $SU(2)$ 手征 Ward-Takahashi 恒等式。将这些恒等式对经典场或复合场求若干次泛函导数后，就可以得到正规顶角之间的一些 Ward-Takahashi 恒等式。通过这些恒等式，我们可以确定手征对称性实现后的质量谱。

三、夸克质量的动力学产生

将 (2.17b) 式对 $\bar{q}_c(y)$、$q_c(z)$ 求二次导数，有

$$\int d^3x \left[\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 \frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(z)\delta\bar{q}_c(x)}\delta^3(y-x) + \bar{q}_c(x)\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 \frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(z)\delta\bar{q}_c(y)\delta\bar{q}_c(x)} - \frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta\bar{q}_c(y)\delta q_c(x)}\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5\delta^3(x-z) - \frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(z)\delta\bar{q}_c(y)\delta q_c(x)} \cdot \frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 q_c(x) + d_{\alpha\beta\gamma}a^\gamma i\gamma_5\tau^\beta\delta^3(x-z)\delta^3(y-x) + d_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(z)\delta\bar{q}_c(y)\delta G_\beta(x)} G_5^\gamma(x) - \frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta q_c(z)\delta\bar{q}_c(y)\delta G_5^\beta(x)} G^\gamma(x)\right)\right] = 0. \tag{3.1}$$

利用外源为零时的性质

$$\bar{q}_c(x)|_{J\to 0} = q_c(x)|_{J\to 0} = 0, \tag{3.2}$$

(3.1)式可以化为

$$\int d^3x \left[\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5\Gamma^{(2)}_{q,\bar{q}}(z,x)\delta^3(x-y) + \Gamma^{(2)}_{q,\bar{q}}(z,y) \cdot \frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5\delta^3(y-x) + d_{\alpha\beta\gamma}a^\gamma i\gamma_5\tau_\beta\delta^3(x-y)\delta^3(z-x) + d_{\alpha\beta\gamma}(\Gamma^{(3)}_{q\bar{q};G_\beta}(z,y;x)G_5^\gamma(x) - \Gamma^{(3)}_{q,\bar{q}G_5^\beta}(z,y;x)G^\gamma(x))\right] = 0. \tag{3.3}$$

经 Fourier 变换后，(3.3)式为

$$\frac{i}{2}\tau_a\gamma_5\Gamma^{(2)}_{q,\bar{q}}(p)+\Gamma^{(2)}_{q,\bar{q}}(p)\frac{i}{2}\tau_a\gamma_5=-d_{a\beta\gamma}[a_\gamma i\gamma_5\tau_\beta$$
$$+i\gamma_5\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G_\beta}(p,q;p+q)|_{p=-q}(\langle\Phi i\gamma_5\tau^\gamma q\rangle$$
$$-i\gamma_5\langle\bar{q}\tau^\gamma q\rangle)]. \tag{3.4}$$

其中利用了真空的平移不变性和耦合所具有的对称性关系

$$\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G_\beta}(z,y;x)=-i\gamma_5\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G_5^\beta}(z,y;x). \tag{3.5}$$

当 $p^2\to 0$ 时，(3.4)式给出

$$-\frac{i}{2}\gamma_5\{\tau_a,M\}=-i\gamma_5 d_{a\beta\gamma}[a_\gamma\tau_\beta$$
$$+\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G_\beta}(p,-p;0)|_{p^2=0}\cdot(\langle\bar{q}i\gamma_5\tau^\gamma q\rangle-i\gamma_5\langle\bar{q}\tau^\gamma q\rangle)]. \tag{3.6}$$

考虑到强作用中宇称守恒等性质，动力学破缺的方向选取在

$$\langle 0|\bar{q}(x)q(x)|0\rangle\neq 0,$$
$$\langle 0|\bar{q}(x)\tau_3 q(x)|0\rangle\neq 0. \tag{3.7}$$

其它各种夸克对凝聚均为零.

这样，夸克的质量矩阵 M 为

$$M=m_a\tau_a. \tag{3.8}$$

其中

$$m_0=a^0-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G^0}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\bar{q}q\rangle,$$
$$m_i=a^i-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G^0}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\bar{q}\tau^i q\rangle. \tag{3.9}$$

因此，手征对称性破缺后夸克的质量为

$$m_u=m_u^0-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G^0}(p,-p;0)|_{p^2=0}(\langle\bar{q}q\rangle+\langle\bar{q}\tau_3 q\rangle),$$
$$m_d=m_d^0-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};G^0}(p,-p;0)|_{p^2=0}(\langle\bar{q}q\rangle-\langle\bar{q}\tau_3 q\rangle). \tag{3.10}$$

上式表明，夸克的质量既包含有流质量，也包含有动力学产生的质量. 通常，人们把它等同于夸克的组分质量[8]. 因此，u、d 夸克的组分质量之差有三种可能的来源. 第一种情况就是 u、d 夸克的凝聚相等，$\langle\bar{q}\tau_3 q\rangle=0$. u、d 夸克的组分质量之差完全是由 $SU(2)$ 对称性的明显破缺决定的. 第二种情况对应于 u、d 夸克具有相同的流质量，u、d 夸克对的凝聚不相等，即 $\langle\bar{q}\tau_3 q\rangle\neq 0$. u、d 夸克的组分质量的分裂是由 $SU(2)$ 对称性的动力学破缺所决定. 最后一种情况就是 u、d 夸克的质量分裂既来源于 $SU(2)$ 对称性的明显破缺，又来源于 $SU(2)$ 对称性的动力学破缺.

应该指出，在夸克层次上也有类似的 Goldberger-Treiman 关系[9].

由于动力学破缺将使得理论中存在有夸克组成的复合粒子或集体态[10]. 夸克对形成的介子场可以表为

$$\sigma_0(x)=\mathcal{N}_0\bar{q}(x)q(x),$$
$$\sigma_i(x)=\mathcal{N}_i\bar{q}(x)\tau_i q(x),$$
$$\pi_a(x)=\mathcal{N}_{5a}\bar{q}(x)i\gamma_5\tau_a q(x). \tag{3.11}$$

由场 σ_0,σ_i 以及 π_a 在手征变换下的性质可知[4]

$$\mathcal{N}_0=\mathcal{N}_i=\mathcal{N}_{5a}. \tag{3.12}$$

利用(3.11)式，有

$$\mathcal{N}_0=\frac{\langle\sigma_0\rangle}{\langle\bar{q}q\rangle}. \tag{3.13}$$

考虑到在强作用中 $SU(2)$ 对称性的破缺通常被认为是来源于明显破缺。在以后的讨论中，我们取 $\langle\bar{q}\tau_3 q\rangle=0$ 的情况。这样，u、d 夸克的质量可以改写为

$$\begin{aligned} m_u&=m_u^0-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};\sigma_0}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\sigma_0\rangle,\\ m_d&=m_d^0-\Gamma^{(3)}_{q,\bar{q};\sigma_0}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\sigma_0\rangle. \end{aligned} \tag{3.14}$$

上式表明：当 $SU(2)$ 手征对称严格成立时，$m_u^0=m_d^0=0$，夸克的组分质量严格地满足 Goldberger-Treiman 关系；然而，在 $SU(2)$ 手征对称性有明显破缺时，Goldberger-Treiman 关系不再严格成立，而只是一个近似的关系，其近似程度由手征对称性的破缺程度所决定。这意味着对于轻夸克的情况，Goldberger-Treiman 关系近似成立，而对于重夸克情况 Goldberger-Treiman 关系不再成立。

四、标量介子谱

将(2.17b)式对 $G_5^\mu(y)$ 求导，有

$$\begin{aligned} \int d^3x\Big[&\bar{q}_c(x)\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\mu(y)\delta\bar{q}_c(x)}-\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\mu(y)\delta q_c(x)}\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 q_c(x)\\ &+d_{\alpha\mu\tau}a^\tau\delta^3(x-y)+d_{\alpha\beta\tau}\Big(\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\beta(x)\delta G_5^\mu(y)}G_5^\tau(x)\\ &+\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\beta(x)}\delta_{\mu\tau}\delta^3(x-y)-\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\beta(x)\delta G_5^\mu(y)}G^\tau(x)\Big)\Big]=0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

将(4.1)式对 $G^\lambda(z)$ 求导，可以给出

$$\begin{aligned} \int d^3x\Big[&\bar{q}_c(x)\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G_5^\mu(y)\delta\bar{q}_c(x)}-\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G_5^\mu(y)\delta q_c(x)}\\ &\cdot\frac{i}{2}\tau_\alpha\gamma_5 q_c(x)+d_{\alpha\beta\tau}\Big(\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G_5^\mu(y)\delta G^\beta(x)}G_5^\tau(x)\\ &+\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G^\beta(x)}\delta_{\mu\tau}\delta^3(x-y)\\ &-\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\beta(x)\delta G_5^\mu(y)}\delta_{\lambda\tau}\delta^3(x-z)-\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G_5^\mu(y)\delta G_5^\beta(x)}G^\tau(x)\Big)\Big]\\ =0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

当外源为零时，由破缺条件和(3.2)式、(2.12)式，(4.1)和(4.2)式可以化为

$$\int d^3x\Big[d_{\alpha\mu\tau}a^\tau\delta^3(x-y)-d_{\alpha\beta\tau}\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\beta(x)\delta G_5^\mu(y)}\langle\bar{q}q\rangle\delta_{\tau,0}\Big]=0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \int d^3x\, d_{\alpha\beta\tau}\Big[&\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G^\beta(x)}\delta_{\mu\nu}\delta^3(x-y)-\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta G_5^\beta(x)\delta G_5^\mu(y)}\delta_{\lambda\tau}\delta^3(x-y)\\ &-\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta G^\lambda(z)\delta G_5^\mu(y)\delta G_5^\beta(x)}\langle\bar{q}q\rangle\delta_{\tau,0}\Big]=0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

经 Fourier 变换并取 $p^2\to 0$,(4.3) 式化为

$$d_{\alpha\mu\gamma}(\delta_{\gamma,0}a_0+\delta_{\gamma,3}a_3)\mathscr{N}_0^{-2}=\Gamma^{(2)}_{\pi_\alpha,\pi_\mu}(0)\langle\bar{q}q\rangle. \tag{4.5}$$

其中应用了(3.11)和(3.12)式,以及流质量的性质.

由(4.5)式可以看出

(i) 当 $\alpha=\mu$ 时, π_α 介子的质量为

$$\begin{aligned} m^2_{\pi_\alpha} &= -a_0\mathscr{N}_0^{-2}/\langle\bar{q}q\rangle \\ &= -\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle^2}\frac{m^0_u+m^0_d}{2}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

这与流代数所给出的 π 介子的质量谱一致[11]. 上式表明 π_α 的各分量具有相同的质量. 由 (4.6) 式可以看出, 在手征对称性严格成立的情况下, $a_0=0$. π_α 介子就是无质量的 Goldstone 玻色子. 在手征对称性有明显破缺时, π_α 介子获得了质量. 如果手征对称性仅有明显破缺而没有动力学破缺, 则 $\langle\bar{q}q\rangle=0$, $m^2_{\pi_\alpha}\to\infty$, 这意味着束缚态 π_α 不存在. (ii) 当 $\alpha=0$, $\mu=i$ 时,(4.5)式为

$$\Gamma^{(2)}_{\pi_0,\pi_i}(0)=a_3\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle^2}\delta_{i,3}. \tag{4.7}$$

上式表明当 $SU(2)$ 同位旋对称性有明显破缺时, $m^0_u\neq m^0_d$. 介子 π_0 和 π_3 将发生混合.

设混合后的场为

$$\begin{aligned} \pi'_0(x) &= \cos\theta\pi_0(x)+\sin\theta\pi_3(x), \\ \pi'_3(x) &= -\sin\theta\pi_0(x)+\cos\theta\pi_3(x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中 θ 是混合角. 利用无混合的条件可以得到

$$\mathrm{tg}\,2\theta=-\frac{2\Gamma^{(2)}_{\pi_0,\pi_3}(0)}{m^2_{\pi_0}-m^2_{\pi_3}}. \tag{4.9}$$

由质量谱(4.6)式可知,混合角

$$\theta=-\frac{\pi}{4}. \tag{4.10}$$

混合后的场为

$$\pi'_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_0(x)-\pi_3(x)),$$

$$\pi'_3(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_3(x)+\pi_0(x)). \tag{4.11}$$

相应地,质量谱为

$$m^2_{\pi'_0}=-m^0_d\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle^2}, \tag{4.12}$$

$$m^2_{\pi'_3}=-m^0_u\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle^2}. \tag{4.13}$$

容易看出,流夸克质量的分裂与介子的质量分裂有如下关系

$$\frac{m_d^0 - m_u^0}{2m_u^0} = \frac{m_{\pi_1}^2 - m_{\pi_3'}^2}{m_{\pi_3'}^2}, \tag{4.14}$$

这表明介子的质量分裂是由 u、d 夸克的流质量分裂所决定的.

同理，由(4.4)式可以给出

$$\begin{aligned} m_{\sigma_0}^2 &= m_{\pi_1}^2 - \Gamma^{(3)}_{\sigma_0,\pi_1;\pi_1}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\sigma_0\rangle, \\ m_{\sigma_1}^2 &= m_{\pi_0}^2 - \Gamma^{(3)}_{\sigma_1,\pi_0;\pi_1}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\sigma_0\rangle, \\ m_{\sigma_2}^2 &= m_{\sigma_3}^2 = m_{\sigma_1}^2, \end{aligned} \tag{4.15}$$

并且有

$$\Gamma^{(2)}_{\sigma_0,\sigma_i}(0) = \Gamma^{(2)}_{\pi_0,\pi_i}(0) + \Gamma^{(3)}_{\sigma_i,\pi_i;\pi_i}(p,-p;0)|_{p^2=0}\langle\sigma_0\rangle. \tag{4.16}$$

鉴于 σ、π 的相互作用势是 σ_α^2、π_α^2 的函数，由破缺方向的选取可知

$$\Gamma^{(2)}_{\sigma_0,\sigma_i}(0) = \Gamma^{(2)}_{\pi_0,\pi_i}(0). \quad (i=1,2,3) \tag{4.17}$$

结合(4.7)式可知，$\sigma_0(x)$ 场与 $\sigma_1(x)$、$\sigma_2(x)$ 场之间没有混合，而 $\sigma_0(x)$ 与 $\sigma_3(x)$ 之间将出现混合.

与 π 场的混合相似，混合后的标量场可表为

$$\begin{aligned} \sigma_0'(x) &= \cos\gamma\sigma_0(x) + \sin\gamma\sigma_3(x), \\ \sigma_3'(x) &= -\sin\gamma\sigma_0(x) + \cos\gamma\sigma_3(x). \end{aligned} \tag{4.18}$$

混合后的质量谱为

$$\begin{aligned} m_{\sigma_0'}^2 &= \cos^2\gamma m_{\sigma_0}^2 - \sin 2\gamma\Gamma^{(2)}_{\sigma_0,\sigma_3}(0) + \sin^2\gamma m_{\sigma_3}^2, \\ m_{\sigma_3'}^2 &= \cos^2\gamma m_{\sigma_3}^2 + \sin 2\gamma\Gamma^{(2)}_{\sigma_0,\sigma_3}(0) + \sin^2\gamma m_{\sigma_0}^2. \end{aligned} \tag{4.19}$$

其中混合角 γ 由下式确定

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{2\Gamma^{(2)}_{\sigma_0,\sigma_3}(0)}{m_{\sigma_0}^2 - m_{\sigma_3}^2}. \tag{4.20}$$

五、矢量流和轴矢流的性质

由上节的讨论可以看出，当有流质量存在时，介子π_α就获得了质量. 在低能强子物理中，有质量的π介子与 PCAC 有着密切的联系. 因此，在这节中我们讨论矢量流和轴矢流的性质.

根据场的运动方程，矢量流和轴矢流的全散度为

$$\partial_\mu J_\mu^\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta\bar{q}(x)\tau^\gamma q(x), \tag{5.1}$$

$$\partial_\mu A_\mu^\alpha(x) = d_{\alpha\beta\gamma}a_\beta\bar{q}(x)i\gamma_5\tau^\gamma q(x), \tag{5.2}$$

在非微扰相中，描述的对象不再是自由夸克，而应是它们的束缚态. 应用(3.11)式，方程(5.1)和(5.2)可以改写为

$$\partial_\mu J_\mu^\alpha(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\beta\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle}\sigma^\gamma(x). \tag{5.3}$$

$$\partial_\mu A_\mu^\alpha(x) = d_{\alpha\beta\gamma}a_\beta\frac{\langle\bar{q}q\rangle}{\langle\sigma_0\rangle}\pi^\gamma(x). \tag{5.4}$$

这样，有

$$\partial_\mu J_\mu^0(x) = \partial_\mu J_\mu^3(x) = 0. \tag{5.5a}$$

$$\partial_\mu J_\mu^1(x) = f_\pi (m_{\pi_1}^2 - m_{\pi_3'}^2)\sigma_2(x). \tag{5.5b}$$

$$\partial_\mu J_\mu^2(x) = f_\pi (m_{\pi_3'}^2 - m_{\pi_1}^2)\sigma_3(x). \tag{5.5c}$$

$$\partial_\mu A_\mu^0(x) = f_\pi m_{\pi_0}^2 \left[\pi_0(x) + \frac{a_3}{a_0}\pi_3(x)\right]. \tag{5.6a}$$

$$\partial_\mu A_\mu^i(x) = f_\pi m_{\pi_i}^2 \pi_i(x). \quad (i = 1,2) \tag{5.6b}$$

$$\partial_\mu A_\mu^3(x) = f_\pi m_{\pi_0}^2 \left[\pi_3(x) + \frac{a_3}{a_0}\pi_0(x)\right]. \tag{5.6c}$$

其中 $f_\pi \equiv -\langle\sigma_0\rangle$。

容易看出，当 $m_u^0 = m_d^0$ 时，(5.5)式和(5.6)式简化为

$$\partial_\mu J_\mu^a(x) = 0, \tag{5.7a}$$

$$\partial_\mu A_\mu^a(x) = f_\pi m_{\pi_a}^2 \pi_a(x). \quad (\alpha = 0,1,2,3) \tag{5.7b}$$

这就是矢量流守恒（CVC）和轴矢流部分守恒定律（PCAC）。

当 $m_u^0 \neq m_d^0$ 时，$\pi_0(x)$ 与 $\pi_3(x)$ 之间存在混合，这样，轴矢流的全散度为

$$\partial_\mu A_\mu^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_\pi [m_{\pi_0'}^2 \pi_0'(x) + m_{\pi_3'}^2 \pi_3'(x)]. \tag{5.8a}$$

$$\partial_\mu A_\mu^i(x) = f_\pi m_{\pi_i}^2 \pi_i(x). \quad (i = 1,2) \tag{5.8b}$$

$$\partial_\mu A_\mu^3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_\pi [m_{\pi_3'}^2 \pi_3'(x) - m_{\pi_0'}^2 \pi_0'(x)]. \tag{5.8c}$$

而矢量流的全散度为

$$\partial_\mu J_\mu^0(x) = \partial_\mu J_\mu^3(x) = 0. \tag{5.9a}$$

$$\partial_\mu J_\mu^1(x) = f_\pi (m_{\pi_1}^2 - m_{\pi_3'}^2)\sigma_2(x). \tag{5.9b}$$

$$\partial_\mu J_\mu^2(x) = f_{\sigma_3'} m_{\sigma_3'}^2 \sigma_3'(x) + f_{\sigma_0'} m_{\sigma_0'}^2 \sigma_0'(x). \tag{5.9c}$$

其中

$$f_{\sigma_3'} = f_\pi \cos\gamma\,(m_{\pi_3'}^2 - m_{\pi_1}^2)/m_{\sigma_3'}^2 . \tag{5.10a}$$

$$f_{\sigma_0'} = f_\pi \sin\gamma\,(m_{\pi_3'}^2 - m_{\pi_1}^2)/m_{\sigma_0'}^2 . \tag{5.10b}$$

上式表明；$\pi_3'(x)$ 与 $\pi_1(x)$ 的质量分裂的大小标志着 $SU(2)$ 同位旋对称性的破缺程度。由于 π_3' 和 π_1 介子的质量差在强作用中可以忽略不计，因此在强作用中 $SU(2)$ 同位旋对称性可以认为是一个很好的近似对称性。

由以上讨论可以看出，这里所得到的 PCAC 是严格的。它不依赖于渐近场近似和手征微扰展开。即使有较大的流质量，PCAC 仍然成立。

六、小　结

本文利用含复合场的 Ward-Takahashi 恒等式研究了 (2 + 1) 维 $SU(2)$ 手征四费

米子理论中费米子质量的动力学产生和介子的质量谱性质，并讨论了矢量流和轴矢流的性质。结果表明：束缚态的质量谱和轴矢流的性质具有与低能强子物理中完全相似的性质。

从以上的讨论可以看出，含有复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式是研究手征对称性与介子谱的有利工具之一。

参 考 文 献

[1] W. Weise, *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Vol. **20** P. 113, *Edited by A. Faessler, Pergamon Press* (1989);
E. V. Shuryak, *Phys. Rep.*, **115**(1984), 151.
[2] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 422, 433.
O. Kaymakcalan and J. Schechter, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 1109;
D. W. Mckay and H. J. Munczek, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 266;
J. Praschifka, C. D. Roberts and R. T. Cahill, *Phys. Rev.*, **D36**(1987), 209.
[3] D. Ebert and M. K. Volkov, *Z. Phys.*, **C16**(1983), 205;
D. Ebert and H. Reinhardt, *Nucl. Phys.*, **B271**(1986), 188.
[4] 沈坤、裘忠平，高能物理与核物理，**16**(1992)，29.
[5] G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B100**(1975), 368;
K. Shizuya, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 2327;
B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1433.
[6] B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Lett.*, **B219**(1989), 469;
B. Rosenstein and B. J. Warr, *Phys. Lett.*, **B218**(1989), 465;
G. Gat, A. Kovner, B. Rosenstein and B. J. Warr, *Phys. Lett.*, **B240**(1990), 158.
[7] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3235.
[8] M. K. Volkov, *Ann. of Phys.*, **157**(1984), 282.
[9] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, **110**(1957), 1178.
[10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**(1961), 345; **124**(1961), 246.
[11] S. Adler and R. Dashen, Current Algebras, Benjamin, New York (1968).

Ward-Takahashi Identities and Mass Spectra in (2+1) Dimensional $SU(2)$ Four-fermi Model

SHEN KUN QIU ZHONGPING

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070)

ABSTRACT

Ward-Takahashi identities with composite fields are utilized to inverstigate (2+1) dimensional model with $SU(2)$ four-fermion couplings. When $SU(2)$ chiral symmetry is both explicitly and dynamically broken, fermion mass is dynamically generated and mass spectra of the bound states are obtained. The properties of vector and axial-vector currents are discussed. It turns out that the bound state π_a acquires a mass and the axial-vector current is partially conserved, and the Goldberger-Treiman relation is approximately valid in the case of small fermion current masses.