

有限温度 $U(1)$ 格点规范模型的高阶累积展开之研究

郑希特 雷春红

(成都科技大学物理系, 成都 610065)

李玉良

陈洪

(福州师专物理系, 福州 350005) (重庆教育学院物理系, 重庆 630067)

摘 要

在 $N_s \times N_t$ ($N_t=1$) 的高温格点 $U(1)$ 模型中, 对序参数 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 作累积展开计算到五级近似. 重点在于讨论累积展开在中间耦合区的行为, 从累积展开与关联长度的联系阐明在中间耦合区高阶展开的必要性. 采用 n 级展开对零级展开的修正为零的条件定 n 级计算中的变分参数, 结果显示, 不仅在强、弱耦合区, 而且在中间耦合区 (除了相变点附近) 都与蒙特卡罗模拟有较好的符合, 随着近似级别的增高, 可信的计算可以越来越逼近相变点. 这可能是变分累积展开方法作为近似解析方法的一大优点.

一、引 言

用变分累积展开方法研究有限温度的 $SU(2)$, $U(1)$ 规范模型时, 对序参量 Polyakov 线 L 的计算虽然与蒙特卡罗结果的符合优于平均场的计算^[1,2], 但所得到的温度解除禁闭相变点, 例如对 $U(1)$, $\beta_c = 0.33$, 与蒙特卡罗结果 $\beta_c = 0.41$ 有一定距离^[2]. 展开级别的增加不改变 β_c 的位置^[1]. 仔细分析可以发现这 β_c 的位置完全由自由能一级近似 F_1 对变分参数 K 的变分条件

$$\frac{\partial F_1}{\partial K} = 0 \quad (1)$$

中最先出现一支非平庸解的位置所确定. (1)式的平庸解 $K=0$ 对应着强耦合解, 相应给出 $\langle L \rangle = 0$, 而非平庸解 $K \neq 0$ 则相应给出 $\langle L \rangle \neq 0$. 可见, 问题的关键涉及到变分参数的选取.

另一方面变分累积展开的收敛性也直接与变分参数的选取有关. 迄今有三种选取方式:

- (i) 用(1)式的变分条件求解^[3];
- (ii) 利用 Schwinger-Dyson 方程作累积展开, 取同级次的近似方程求解^[4];
- (iii) 用扫描法寻找“聚点”^[5,6].

• 国家自然科学基金资助.

本文1992年7月6日收到.

用方法(i)在中间耦合区结果尚不理想,方法(ii)的问题则是 S-D 方程在有的情况下无解^[5]. 第(iii)种方法则以扫描为基础,能较全面地了解所计算的量对参数的依赖关系,从而选择使计算结果收敛最快的参数值. 在扫描处理的工作中曾有过几种定变分参数的尝试:(a)要求逐级修正为零(等价于找 n 与 $(n-1)$ 级扫描曲线的交点)^[5]; (b)要求对零级修正为零(等价于找 n 级与零级扫描曲线的交点)^[5]; (c)各级或偶级扫描曲线的会聚点(所谓的“聚点”)^[6]. 用 (a)、(b)的尝试只计算到 4 级,在中间耦合区显示了与蒙特卡罗结果有相当的偏差,而用(c)的聚点法在弱耦合区得到较满意的符合,但是在中间耦合区聚点“消失”,所以在最近的工作中 Kerler 等人只限于用聚点定参数的方法讨论弱耦合区而宣称累积展开方法不适用于中间耦合区.

我们认为:说累积展开方法不适用于中间耦合区根据不足,在中间耦合区不适用的只是聚点定参数的方法,本文的计算将表明能在中间耦合区进行解析计算正是累积展开方法的一大优势.

为论证这点,本文以 $N_r=1$ 的有限温度 $U(1)$ 纯规范理论模型的 Polyakov 线 $\langle L \rangle$ 的计算为例,计算到五级展开. 选这个例子有几点考虑:有蒙特卡罗的结果可作比较^[7]; 扫描选取最佳参数值因模型及物理量之不同而不同,因而对不同的物理量及不同的模型进行扫描研究以了解累积展开对参数的依赖行为是必要的. $U(1)$ 的 $\langle L \rangle$ 除最近的研究外^[2] 还没有被累积展开作扫描研究过;选 $N_r=1$ 还会使计算简化.

在第二节中给出模型的描述,第三节中给出 $\langle L \rangle$ 的计算,第四节则进行讨论.

二、有限温度的 $U(1)$ 格点规范模型

在 $N_s \times N_t$ ($N_t=1$) 的格子上取 $U(1)$ 规范模型的作用量为

$$S = \beta \sum_{P_s} \cos \Theta_{P_s} + \beta \sum_{P_t} \cos \Theta_{P_t}. \quad (2)$$

这里 $\Theta_P = \theta_\nu(x) + \theta_\nu(x + \hat{\mu}) - \theta_\nu(x + \hat{\nu}) - \theta_\nu(x)$ 是来自绕一个元格四根链上的 $U_\nu(x) = e^{i\theta_\nu(x)} \in U(1)$ 的积, P_s 和 P_t 则分别代表空间元格和含两根时间链的元格. 在有限温度理论中 N_t 取为有限值,且在时间 τ 方向加上周期条件,温度定义为 $T = \frac{1}{N_t a}$ (a -格距),所以 $N_t=1$ 对应着高温情形.

$$\text{引入试探作用量} \quad S_0 = J \sum_\sigma \cos \theta_\sigma + K \sum_\tau \cos \theta_\tau, \quad (3)$$

这里 σ 和 τ 分别代表空间链和时间链. 对作用量为 S_0 的辅助系统,其配分函数 Z_0 和单位格点自由能 F_0 可表示为

$$e^{-F_0 M} = Z_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} e^{S_0} = \omega_1^{N_s} \cdot \xi_1^{N_t}, \quad (4)$$

其中 M 为总格点数, $N_s = (D-1)M$, $N_t = M$, D 为维数,

$$\omega_n = \frac{I_n(J)}{I_0(J)}, \quad \xi_n = \frac{I_n(K)}{I_0(K)}, \quad (5)$$

这里 I_i 是 i 阶变型贝塞尔函数. J 和 K 是待定变分参数,要适当选定它们以使累积展开能

有最佳的收敛效果.

系统的序参量 Polyakov 线是在 τ 方向由周期条件而形成的封闭圈. $N_\tau=1$ 时, 它简单地是

$$L \equiv L(\mathbf{x}) = \cos\theta_r(\mathbf{x}), \quad (6)$$

用变分累积展开计算到 n 级近似可表示为^[1]

$$\langle L \rangle \cong \langle L \rangle_n = \langle L \rangle_0 + \Delta \langle L \rangle_n, \quad (7)$$

$$\Delta \langle L \rangle_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \langle L(S - S_0)^i \rangle_c. \quad (8)$$

这里 $\langle \dots \rangle_0$ 是在作用量 S_0 的辅助系统中的统计平均, $\langle \dots \rangle_c$ 为该系统中的累积平均. 在 $N_\tau=1$ 的情形下, 所有由 P_s 构成的联结图形与由 P_τ 构成的联结图形退耦^[2], 这正是已知的 $U(1)$ 理论中在高温下空间 Wilson 圈与 Polyakov 线之间没有相互作用的反映^[8], 于是(7)式的 $\langle L \rangle$ 的展开式中不含 P_s , 从而只依赖于参数 K 和 β . 实际上对自由能的扫描研究表明, $J=0$ 较之 $J \neq 0$ 的自由能为低^[2], 所以我们可以令(3)式中的 $J=0$ 来计算 $\langle L \rangle$.

三、Polyakov 线的计算

对(8)式有贡献的项都可解析算出^[2],

$$\langle L \rangle_0 = \xi_1, \quad \Delta \langle L \rangle_1 = \beta r \xi_1 \xi'_1 - K \xi'_1,$$

$$\Delta \langle L \rangle_2 = \Delta \langle L \rangle_1 + \frac{1}{2} \{ \beta^2 r [\frac{1}{2} (\frac{1}{2} \xi_2^2 - \xi_1^4)' + R_0 (\xi_1^2 - \xi'_1)'] - \beta r K (\xi_1^2)'' + K^2 \xi''_1 \},$$

$$\begin{aligned} \Delta \langle L \rangle_3 = \Delta \langle L \rangle_2 + \frac{1}{3!} \{ \beta^3 r [\frac{1}{2} (\frac{1}{4} \xi_3^2 - \frac{3}{4} \xi_1^2 - \frac{3}{2} \xi_1^2 \xi_2^2 + 2 \xi_1^6) + 3R_0 \cdot \frac{1}{2} \xi_1 (\frac{1}{2} \xi_2^2 - \xi_1^4) \\ + 6R_0 (\xi_1^2 \xi'_1) + R_0 R_1 (\xi_1^3 \xi''_1)]' - 3\beta^2 r K [\frac{1}{2} (\frac{1}{2} \xi_2^2 - \xi_1^4) + R_0 (\xi_1^2 - \xi'_1)]'' \\ + 3\beta K^2 r (\xi_1 \xi'_1)'' - K^3 \xi'''_1 \}. \end{aligned} \quad (9)$$

.....

四级与五级修正的表达式太长, 不在此写出. 这里 $r=2(D-1)$, $R_i=r-1-i$. 求导对 K 进行.

我们重点研究中间耦合区. 为选取适当的变分参量 K 值. 在固定 β 下对 K 进行扫描算 $\langle L \rangle_n$. 图 1 给出 $\beta=0.55$ 时的典型扫描图至第五级展开. 这里确实看不到“聚点”, 事实上, “聚点”只是累积展开收敛的一种最理想的情形, 这时只要计算到一定的级次, 比如说 4 次, 就可以找到很好的使展开收敛的值 K_c (即“聚点”值). 但是, 如果展开是逐渐收敛的, 则并不排除最佳收敛的参数值是随展开级别之升高而逐渐移动的. 早期的扫描工作^[5]曾尝试过用 n 级扫描与零级扫描之交点, 或是用 n 与 $n-1$ 级的交点来定参数值, 可惜由于算的级次不够, 在发现与 Monte Carlo 结果偏离时, 没有继续深入研究中间耦合区^[6].

我们知道, 在中间过渡区, 关联长度变大, 当接近或达到相变点时, 关联长度变得很大以至趋于无穷. 累积展开的实质是按关联级次展开的, 第 l 级的修正是由与 L 相联结的 l 个元格或链组成的联结图形给出的非零贡献. 与 L 相距 l 个链长 (la) 的元格展开到 $l-1$ 级时对 $\langle L \rangle$ 是没有贡献的, 因为在 $l-1$ 级联结图形所能达到的最远距离是 $(l-1)a$, 可描

写的关联长度最大为 $(l-1)a$. 可见,在中间耦合区,随着向相变点的逼近,要相应增加累积展开的级次,才有可能较好地描述系统的行为.

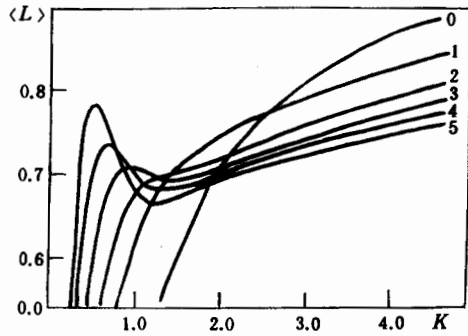


图 1 $\beta=0.55$ 时 $\langle L \rangle_i-K$ 的扫描图, $i=0-5$

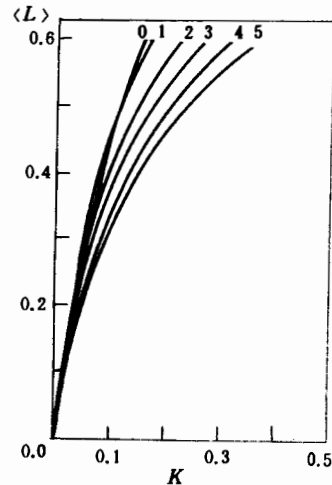


图 2 $\beta=0.38$ 时 $\langle L \rangle_i-K$ 的扫描图, $i=0-5$

对图 1 的观察就提示我们可以采取如下条件定逐级逼近的最佳参数^[5],至 n 级近似

$$\langle L \rangle \cong \langle L \rangle_n = \langle L \rangle_0 |_{K=K_n}, \beta \text{ 固定} \quad (10)$$

K_n 是如下方程的解:

$$\Delta \langle L \rangle_n = 0. \quad (11)$$

显然, K_n 正是 n 级近似 $\langle L \rangle_n$ 扫描线与 $\langle L \rangle_0$ 扫描线的交点. (10) 式的意义很清楚: 对每一个确定的 β , 在 K_n 点我们以辅助系统的 $\langle L \rangle_0$ 作为原始系统 $\langle L \rangle$ 的 n 级近似, 这时累积展开从一级至 n 级的总修正为零. 如果 n 趋于无穷时, K_n 趋于一个固定点, 它将是严格的聚点, 只是作有限级别展开时, 我们只能得到逐步逼近的近似结果.

图 2 给出强耦合区的典型图象, $\beta=0.38$ 时 $\langle L \rangle_i$ 对 K 的扫描图. $\langle L \rangle_i$ ($i=1-5$) 都单调地下降到 $K=0, \langle L \rangle_i=0$ 处, $\langle L \rangle_0$ 与 $\langle L \rangle_i$ 的非零点交点只在低级别时 ($i \leq 3$) 存在, $\langle L \rangle_0$ 与 $\langle L \rangle_4$ 已无交点(除零点外), 所以到四级展开时, 参数只能取 $K=0$, 从而 $\langle L \rangle_4=0$. 当 β 逐渐增大时, $\langle L \rangle_0$ 与 $\langle L \rangle_4$ 有非零点交点, 与 $\langle L \rangle_5$ 没有零点外的交点, 继续增大 β , $\langle L \rangle_0$ 开始与 $\langle L \rangle_5$ 有非零点交点时, 就是 5 级近似下所得到的从 $\langle L \rangle=0$ 到 $\langle L \rangle \neq 0$ 的相变点 $\beta_c=0.39$. 这比 $\beta_c=0.33$ 的结果^[2]有了很大的改进.

用 (10) 和 (11) 式定参数的办法也可用于弱耦合区, 和其它模型的情况类似, 多级曲线在一个小区间汇聚(近似的“聚点”), K_n 也在这小区间里, 显示了良好的收敛行为. 这样, 统一用 (10) 和 (11) 式, 改变 β , 最后算出 $\langle L \rangle-\beta$ 关系示于图 3. 图上给出 4 级, 5 级, 平均场

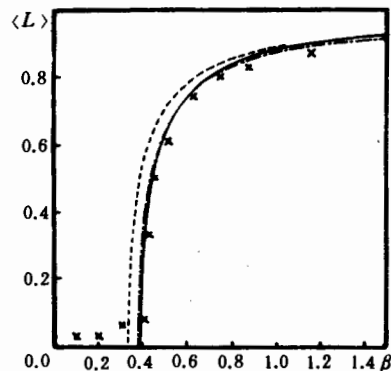


图 3 $\langle L \rangle-\beta$ 关系

实线为 $\langle L \rangle_5$; $\langle L \rangle_4$ 以点划线表示, 虚线为平均场结果, 叉点表示蒙特卡罗结果.

和蒙特卡罗结果^[7]以资比较. 在弱耦合区, 4 级的结果反而略优于 5 级, 更接近蒙特卡罗结果, 这与[6]的观察一致, 在弱耦合区, 偶次级别的展开有更好的收敛性. 但是, 在中间耦合区, 展开级次越高, 结果越好. 这是解析方法在中间耦合区迄今给出的最好结果.

四、讨 论

本文强调了变分累积展开方法在中间耦合区的适用性, 从关联长度的考虑说明了高阶计算的必要性. 虽然原则上在相变点及其近邻要求展开到非常高的级别, 但随实际可行的计算级别的增加, 相变点可以确定到一个相当窄的范围内.

定参数的方案还有其它可能, 与模型及所计算的物理量有关, 至少在有限级别近似的情况下是这样. 所以讨论更多的模型和计算更多的物理量是有价值的.

参 考 文 献

- [1] Zheng Xite and Chung- I Tan, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988), 457; *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 623.
- [2] 郑希特, 任学藻, “有限温度格点 $U(1)$ 规范理论计算”, *高能物理与核物理*, **17**(1993)134.
- [3] X. T. Zheng, C. - I Tan and T. L. Chen, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
- [4] S. S. Xue, T. C. Hsien and C. M. Wu, *Phys. Lett.*, **175B**(1986), 341; **178B**(1986), 251.
- [5] W. Kerler, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1906; W. Kerler and L. Schülke, *Phys. Lett.*, **201B**(1988), 123; L. Schülke, *Phys. Lett.*, **208B**(1988), 495.
- [6] W. Kerler, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 2085; W. Kerler and T. Metz, *Phys. Rev.*, **D44**(1991), 1263.
- [7] N. Bilic, H. Gausterer and S. Sanielevici, *Phys. Lett.*, **198B**(1987), 235.
- [8] B. Svetitsky, *Phys. Rep.*, **132**(1986), 1.

Study of Higher Order Cumulant Expansion of $U(1)$ Lattice Gauge Model at Finite Temperature

ZHENG XITE LEI CHUNHONG

(Physics Department, Chengdu University of Science and Technology, Chengdu 610065)

LI YULIANG

(Physics Department, Fuzhou Teacher College, Fuzhou 350005)

CHEN HONG

(Physics Department, Chongqing Institute of Education, Chongqing 630067)

ABSTRACT

The order parameter, Polyakov line $\langle L \rangle$, of the $U(1)$ gauge model on $N_s^3 \times N_t$ ($N_t = 1$) lattice by using the cumulant expansion is calculated to the 5-th order. The emphasis is put on the behaviour of the cumulant expansion in the intermediate coupling region. The necessity of higher order expansion is clarified from the connection between the cumulant expansion and the correlation length. The variational parameter in the n -th order calculation is determined by the requirement that corrections of the n -th order expansion to the zeroth order expansion finish. The agreement with the Monte Carlo simulation is obtained not only in the weak and strong coupling regions, but also in the intermediate coupling region except in the very vicinity of the phase transition point.