第17卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 17, No. 3
1993年3月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Mar., 1993

李超代数 $B(0,1)$ 的超相干态表示

匡乐满[1]
（长沙水电师范学院物理系，长沙 410077）
曾高坚
（湖南师范大学物理系，长沙 410006）

摘 要

本文把相干态的概念推广到李超代数的情形．我们具体地构造了李超代数 $B(0,1)$ 的超相干态，计算了 $B(0,1)$ 生成元在超相干态表示中的矩阵元，获得了 $B(0,1)$ 代数的一种非齐次微分实现．这种非齐次微分实现对研究量子力学中的准精确可解问题有用．

一、引 言

相干态[1]的概念首先是对零幂群[2]引入的．七十年代初，Perelomov[3] 把它推广到任意李群．在李超代数[4]出现之后，人们自然会问：是否存在与这些李超代数相应的相干态？如果存在，它具有什么形式和意义？目前，这个方向的工作在文献中还很少出现．本文试图把相干态的概念推广到李超代数．运用类似于构造 $SU(2)$ 相干态[5]的方法，将具体地构造李超代数 $B(0,1)$的超相干态，计算 $B(0,1)$生成元在这种连续表示中的矩阵元，并给出 $B(0,1)$ 代数在超相干态空间的实现．这种实现是非齐次的，因此，可以应用于量子力学中的准精确可解问题的研究．

二、$B(0,1)$ 超相干态

李超代数 $B(0,1)$ 的偶部分是一个 $SO(3)$ 代数，这部分的生成元我们用 Q_3 和 $Q_\pm$ 表示．奇生成元是 $V_\pm$．那么，$B(0,1)$ 代数可以通过下列对易和反对易关系来定义：

$$
\begin{gathered}
[Q_3,Q_\pm]=\pm Q_\pm,[Q_+,Q_-]=-Q_3,\\
[Q_3,V_\pm]=\pm V_\pm,\ [Q_\pm,V_\pm]=0,\ [Q_\pm,V_\mp]=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}V_\mp,\\
\{V_\pm,V_\pm\}=-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_\pm,\ \{V_+,V_-\}=-\frac{1}{2}Q_3.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

本文1991年10月21日收到。

1) 目前的通讯地址：湖南师范大学物理系．

$B(0,1)$ 代数的有限维不可约表示[6]空间的基矢可以用 $|J,M,\alpha\rangle$ 来标记,这里 $\alpha=\pm1, J=\frac{n}{2}=\left(0,\frac{1}{2}, 1, \cdots\right)$, M按下列方式取值:

$$M=\begin{cases}-J,-J+1,\cdots,J & \text{对于 } \alpha=0.\\ -J,-J+1,\cdots,J-1 & \text{对于 } \alpha=1.\end{cases} \tag{2}$$

这个不可约表示是 $4J+1$ 维的. $B(0,1)$ 生成元对这种不可约表示基矢的作用是:

$$Q_3|J,M,\alpha\rangle=\left(M+\frac{1}{2}\alpha\right)|J,M,\alpha\rangle,$$

$$Q_+|J,M,\alpha\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}[(J+M+1)(J-M-\alpha)]^{\frac{1}{2}}|J, M+1,\alpha\rangle,$$

$$Q_-|J,M,\alpha\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[(J+M)(J-M+1-\alpha)]^{\frac{1}{2}}|J,M-1,\alpha\rangle,$$

$$V_+|J, M,\alpha\rangle=-\frac{1}{2}(J-M-\alpha)^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)|J,M,\alpha+1\rangle - \frac{1}{2}\alpha(J+M+1)^{\frac{1}{2}}|J,M+1,\alpha-1\rangle,$$

$$V_-|J,M,\alpha\rangle=\frac{1}{2}(J+M)^{\frac{1}{2}}(1-\alpha)|J,M-1,\alpha+1\rangle - \frac{1}{2}\alpha(J-M-\alpha+1)^{\frac{1}{2}}|J,M,\alpha-1\rangle. \tag{3}$$

本文采用正定度规,即不可约表示空间的所有基矢都归一化为 1.

通过在 $|J,M,\alpha\rangle$ 中分别令 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$,人们可以把 $B(0, 1)$ 代数的不可约表示空间 $\{|J,M,\alpha\rangle\}$ 分解为两个子空间 $\{|J,M,0\rangle\}$ 和 $\{|J,M,1\rangle\}$. 这两个子空间都是 $SU(2)$ 代数的不可约表示空间. 实际上, 它们分别对应于 $SU(2)$ 的不可约表示 J 和 $J-\frac{1}{2}$.

从 $B(0,1)$ 生成元对基矢 $|J,M,\alpha\rangle$ 的作用, 人们可以看出 $B(0, 1)$ 代数含有两个上升的阶梯算符,它们是 Q_+ 和 V_+. 利用这两个阶梯算符, 我们可以构造一个指数算符 $\exp(zQ_++\theta V_+)$. 这里 z 是一个通常的复数, θ 是一个 Grassmann 数. 与定义 $SU(2)$ 相干态[7]的方法类似,通过把这个指数算符作用于 $B(0,1)$ 代数的不可约表示的最低权态来定义 $B(0,1)$ 相干态. 也就是

$$|z,\theta\rangle=e^{zQ_++\theta V_+}|J,-J,0\rangle. \tag{4}$$

由于 $|z,\theta\rangle$ 中既含有通常的复变量,又含有 Grassmann 变量,因此我们称它为 $B(0,1)$ 超相干态.

从(3)式,人们不难得到

$$Q_+^n|J,-J,0\rangle=\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}(-\sqrt{2})^{-n}n!|J,-J+n,0\rangle,$$

$$Q_+^n|J,-J,1\rangle=\binom{2J-1}{n}^{\frac{1}{2}}(-\sqrt{2})^{-n}n!|J,-J+n,1\rangle, \tag{5}$$

其中

$$\binom{2J}{n}=\frac{(2J)!}{(2J-n)!n!}.$$

考虑到 Q_+ 和 V_+ 是对易的，并利用(5)式，人们可以把 $B(0,1)$ 超相干态写成

$$|z,\theta\rangle=\sum_{n=0}^{2J}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n|J,-J+n,0\rangle-\frac{\sqrt{2J}}{2}\theta\sum_{n=0}^{2J-1}\binom{2J-1}{n}^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n\ |J,-J+n,1\rangle=|z\rangle_1-\frac{\sqrt{2J}}{2}\theta|z\rangle_2,\tag{6a}$$

那么

$$\langle z,\theta|={}_1\langle z|-\frac{\sqrt{2J}}{2}{}_2\langle z|\bar{\theta}.\tag{6b}$$

其中 $|z\rangle_1$ 和 $|z\rangle_2$ 是与 $B(0,1)$ 代数的不可约表示的两个子空间相联系的相干态：

$$|z\rangle_1=\sum_{n=0}^{2J}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n|J,-J+n,0\rangle,$$

$$|z\rangle_2=\sum_{n=0}^{2J-1}\binom{2J-1}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n|J,-J+n,1\rangle.\tag{7}$$

人们不难发现 $|z\rangle_1$ 和 $|z\rangle_2$ 是相互正交的

$${}_1\langle z|z\rangle_2=0,\tag{8}$$

并且分别具有下列正交性关系

$${}_1\langle z'|z\rangle_1=\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J},$$

$${}_2\langle z'|z\rangle_2=\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-1}.\tag{9}$$

利用(6)、(8)和(9)，人们可以得到两个 $B(0,1)$ 超相干态的正交性关系：

$$\langle z',\theta'|z,\theta\rangle=\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z+\frac{J}{2}\bar{\theta}'\theta\right)\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-1}.\tag{10}$$

其中 $\bar{z}$ 和 $\bar{\theta}$ 分别表示 z 和 θ 的复共轭．(10)式表明具有不同 (z,θ) 的两个超相干态是不正交的．在(10)式中令 $z'=z$ 和 $\theta'=\theta$，便可以得到这种超相干态的归一关系：

$$\langle z,\theta|z,\theta\rangle=\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z+\frac{J}{2}\bar{\theta}\theta\right)\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{2J-1}.\tag{11}$$

相干态理论的核心问题是相干态这样一个集合的完备性问题，因为不完备的集合在实际中是没有应用价值的．现在我们来找 $B(0,1)$ 超相干态的完备性关系．由于 $\{|J,M,\alpha\rangle\}$ 形成一个正交归一的完备集合，因此这个问题可以归结为寻找这样一个权重超场函数 $\sigma(z,\theta)$，使得

$$\int d^2zd^2\theta\sigma(z,\theta)|z,\theta\rangle\langle z,\theta|=\sum_{n=0}^{2J}|J,-J+n,0\rangle\langle J,-J+n,0|$$

$$+\sum_{n=0}^{2J-1}|J,-J+n,1\rangle\langle J,-J+n,1|$$

$$=1, \tag{12}$$

其中 $d^2z=rdrd\theta, r=|z|$, $d^2\theta=d\bar{\theta}d\theta$.

下面我们就来确定 $\sigma(z,\theta)$. 把 $\sigma(z,\theta)$ 按 θ 展开，它的展开式总共包含四项. 分析表明只有其中的两项对(12)式左边的积分有贡献,这两项是

$$\sigma(z,\theta)=A(z)+B(z)\bar{\theta}\theta. \tag{13}$$

把(6)式和(13)式代入(12)式左边,并对 θ 和 $\bar{\theta}$ 积分,人们得到

$$\int d^2z d^2\theta\sigma(z,\theta)|z,\theta\rangle\langle z,\theta|=\int d^2zB(z)|z\rangle_{11}\langle z|+\frac{J}{2}\int d^2zA(z)|z\rangle_{22}\langle z|. \tag{14}$$

在计算过程中,我们已经利用了下列 Grassmann 积分:

$$\int d\theta=\int d\bar{\theta}=0,\ \int\bar{\theta}d\bar{\theta}=\int\theta d\theta=1. \tag{15}$$

由(7)式和(14)式可得

$$(14)\text{右边}=\sum_{n=0}^{2J}2\sqrt{2}\pi\binom{2J}{n}\int_0^\infty B(z)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}dr|J,-J+n,0\rangle\langle J,-J+n,0|$$

$$+\sum_{n=0}^{2J-1}\sqrt{2}J\pi\binom{2J-1}{n}\int_0^\infty A(z)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}dr|J,-J+n,1\rangle\langle J,-J$$

$$+n,1|. \tag{16}$$

比较(16)和(12)可以得到

$$2\sqrt{2}\pi\binom{2J}{n}\int_0^\infty B(z)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}dr=1,$$

$$\sqrt{2}J\pi\binom{2J-1}{n}\int_0^\infty A(z)\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}dr=1. \tag{17}$$

利用下列积分公式

$$\int_0^\infty\frac{r^{2n+1}}{(1+r^2)^m}dr=\frac{1}{2}\frac{n!(m-n-2)!}{(m-1)!}, \tag{18}$$

从(17)式人们可以得到

$$A(z)=\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{-2J-1},\quad B(z)=\frac{2J+1}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{-2J-2}. \tag{19}$$

于是,$\sigma(z,\theta)$具有下列形式

$$\sigma(z,\theta)=\frac{1}{\pi}\left[2+\bar{z}z+\left(J+\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}\theta\right]\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{-2J-2}. \tag{20}$$

所以,$B(0,1)$ 超相干态的完备性条件可以表述为

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z d^2\theta\left[2+\bar{z}z+\left(J+\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}\theta\right]\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{-2J-2}|z,\theta\rangle\langle z,\theta|=1. \tag{21}$$

利用这个完备性条件,人们可以把任意态矢量 $|f\rangle$ 按超相干态展开为

$$|f\rangle=\frac{1}{\pi}\int d^2z d^2\theta\left[2+\bar{z}z+\left(J+\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}\theta\right]\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}z\right)^{-2J-2}|z,\theta\rangle\langle z,\theta|f\rangle. \tag{22}$$

三、$B(0,1)$ 生成元的矩阵元

下面来计算李超代数 $B(0,1)$ 的生成元在超相干态表示中的矩阵元. 作为一个例子,我们计算 Q_3 的矩阵元:

$$\begin{aligned}\langle z',\theta'|Q_3|z,\theta\rangle &= \langle z',\theta'|Q_3\left[\sum_{n=0}^{2J}|J,-J+n,0\rangle\langle J,-J+n,0|\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{n=0}^{2J-1}|J,-J+n,1\rangle\langle J,-J+n,1|\right]|z,\theta\rangle\\ &=\sum_{n=0}^{2J}(-J+n)\langle z',\theta'|J,-J+n,0\rangle\langle J,-J+n,0|z,\theta\rangle\\ &\qquad+\sum_{n=0}^{2J-1}(-J+n)\langle z',\theta'|J,-J+n,1\rangle\langle J,-J+n,1|z,\theta\rangle\\ &=\sum_{n=0}^{2J}(-J+n)\binom{2J}{n}\left(\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^n+\frac{J}{2}\bar{\theta}'\theta\sum_{n=0}^{2J-1}\binom{2J-1}{n}\left(\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^n\\ &=-\frac{J}{2}\left[2+\bar{z}'z+\left(J-\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}'\theta\right]\left(1-\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-2}.\end{aligned} \tag{23}$$

在上面的计算中,我们已经利用了

$$\langle z,\theta|J,M,0\rangle=\binom{2J}{J+M}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^{J+M},$$

$$\langle z,\theta|J,M,1\rangle=-\frac{\sqrt{2J}}{2}\bar{\theta}\binom{2J-1}{J+M}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^{J+M}. \tag{24}$$

用类似的计算,人们可以得到其它的生成元在超相干态表示中的矩阵元:

$$\begin{aligned}\langle z',\theta'|Q_+|z,\theta\rangle &= \frac{1}{2}J\bar{z}'\left[2+\bar{z}'z+\left(J-\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}'\theta\right]\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-2},\\ \langle z',\theta'|Q_-|z,\theta\rangle &= -\frac{1}{2}Jz'\left[2+\bar{z}'z+\left(J-\frac{1}{2}\right)\bar{\theta}'\theta\right]\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-2},\\ \langle z',\theta'|V_-|z,\theta\rangle &= (-1)^{\lambda(2J+1)}\frac{1}{2}J\left(\bar{\theta}'+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{z}'\theta\right)\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-1},\\ \langle z,\theta'|V_-|z,\theta\rangle &= (-1)^{\lambda(2J)}\frac{1}{2}J\left(\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}z\bar{\theta}'\right)\left(1+\frac{1}{2}\bar{z}'z\right)^{2J-1}.\end{aligned} \tag{25}$$

其中的 $\lambda(2J)$ 和 $\lambda(2J+1)$ 分别是 $|z\rangle_1$ 和 $|z\rangle_2$ 的级. 当 $2J$ 为偶时 $\lambda(2J)=0$, $\lambda(2J+1)=1$;当 $2J$ 为奇时, $\lambda(2J)=1,\lambda(2J+1)=0$.

四、$B(0,1)$ 的非齐次微分实现

李（超）代数的非齐次微分实现在最近引人注目的量子力学中的准精确可解问题（QESP）[7,8] 的研究中起着十分重要的作用．下面我们给出李超代数 $B(0,1)$ 在超相干态空间中的一种非齐次微分实现．

考虑 $B(0,1)$ 生成元对超相干态的作用．作为一个有代表性的例子，我们虑考 V_- 对 $|z,\theta\rangle$ 的作用：

$$
\begin{aligned}
V_-|z,\theta\rangle &= \sum_{n=0}^{2J}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n V_-|J,-J+n,0\rangle + \frac{\sqrt{2J}}{2}\theta\sum_{n=0}^{2J-1}\binom{2J-1}{n}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n V_-|J,-J+n,1\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{2J}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n n^{\frac{1}{2}}|J,-J+n,1\rangle \\
&\quad -\frac{\sqrt{2J}}{4}\theta\sum_{n=0}^{J-1}\binom{2J-1}{n}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^n(2J-n)^{\frac{1}{2}}|J,-J+n,0\rangle \\
&= -\frac{\sqrt{J}}{2}z|z\rangle_2-\frac{1}{4}\theta\left(2J-z\frac{\partial}{\partial z}\right)|z\rangle_1 \\
&= -\left(\frac{J}{2}\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}z\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{4}\theta z\frac{\partial}{\partial\theta}\right)|z,\theta\rangle.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

在上面的计算中，我们利用了

$$
|z\rangle_1=\left(1-\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)|z,\theta\rangle,\quad |z\rangle_2=-\frac{2}{\sqrt{2J}}\frac{\partial}{\partial\theta}|z,\theta\rangle.
\tag{27}
$$

（26）式表明 V_- 对 $|z,\theta\rangle$ 的作用就等价于一个非齐次微分算符 $R(V_-)$ 对 $|z,\theta\rangle$ 的作用，这里

$$
R(V_-)=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}J\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}z\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{4}\theta z\frac{\partial}{\partial z}\right).
\tag{28}
$$

类似地，我们得到其它生成元对超相干态的作用是

$$
\begin{aligned}
&R(Q_3)=-J+z\frac{\partial}{\partial z},\quad R(V_+)=\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\sqrt{2}}{4}\theta\frac{\partial}{\partial z}, \\
&R(Q_+)=\frac{\partial}{\partial z},\ R(Q_-)=-\frac{1}{2}\left(2Jz-z^2\frac{\partial}{\partial z}-z\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

不难检验这些非齐次微分算符满足李超代数 $B(0,1)$ 的对易和反对易关系．因此，它们给出了 $B(0,1)$ 代数的一种微分实现．在这种微分实现中，我们只用了一个通常的复变量和一个 Grassmann 变量，这比通常的微分实现少用了一个普通的复变量．另外，这种微分实现是非齐次的，而这正是在 QESP 的研究中所需要的．

本文的方法经过适当修改可以运用于量子李超代数[9]．

参 考 文 献

[1] J. R. Klauder and B. S. Skagerstam, Coherent States, Ch. I (World Scientific, Singapore, 1985)
[2] H. Weyl, Gruppentheorie and Quanten Mechanik, (Leipzig, S. Hirzel, 1928)
[3] A. M. Perelomov, *Commun. Math. Phys.*, **26**(1972), 222.
[4] A. Pais and V. Rittenberg, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 2063.
[5] J. M. Radicliffe, *J. Phys.*, **A4**(1971), 313.
[6] 付洪沈，高能物理与核物理，**14**(1990)，126.
[7] A. V. Turbiner and A. G. Ushiveridze, *Phys. Lett.*, **A126**(1987), 181.
[8] A. V. Turbiner, *Commun. Math. Phys.*, **126**(1989), 347.
[9] Kuang Leman, *J. Phys.*, **A25**(1992), 4827.

Super-coherent State Representation of Lie Superalgebra $B(0,1)$

Kuang Leman
(*Department of Physics, Changsha Normal University of Water Resources and Electric Power, Changsha* 410077)

Zeng Gaojian
(*Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410006)

Abstract

The concept of coherent states is extended o Lie superalgebras. Super-coherent states associated with the Lie superalgebra $B(0,1)$ are constructed explicitly. And the matrix elements of the $B(0,1)$ generators are calculated. An inhomogeneous differential realization is obtained. This realization is useful for the study of the quasi-exac ly solvable problems in quantum mechanics.