第 17 卷 第 7 期
1993 年 7 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 7
July, 1993

量子超代数 $spl_q(2,1)$ 的 q 变形玻色-费米表示

陈永清
（湖南师范大学物理系，长沙 410006）

摘　要

本文分别运用一对 q 变形玻色算符、一对 q 变形费米算符与两对 q 变形玻色算符、两对 q 变形费米算符，给出了量子超代数 $spl_q(2,1)$ 的两种 q 变形玻色-费米实现．

一、引　　言

近年来，由于量子群在可积系统、统计模型、高能物理与核物理以及共形场理论等领域研究中具有十分重要的应用[1]，国内外许多人对此产生了极大关注．所谓量子群[2]，也即广义包络代数的单参数量子变形，最初出现在对 Yang-Baxter 方程的研究中．所有单纯李代数的量子变形已经获得，并在它们的表示的构造方面取得了重大进展[3]．对于研究李超代数的量子变形及其表示，当然也是相当有意义的事情．它们的一般定义已由 Kulish 等人阐述[4]．一些典型的量子超代数及其表示，比如 $sl_q(m,n)$ 和 $osp(m,2n)$ 等已被详细研究[5]．除此之外，有关谐振子代数的量子变形已经作了深入研究[6]．运用量子变形谐振子算符获得量子李代数和量子李超代数的明显实现．为构造这些量子代数的表示．提供了有用而简单的技巧．在本文中．我们将涉及量子超代数 $spl_q(2,1)$．本文旨在运用 q 变形玻色与费米谐振子算符，给出这种超代数的 q 变形玻色-费米表示．首先，我们将依据一对普通的玻色算符和一对普通的费米算符，或运用两对玻色算符和两对费米算符，给出经典超代数 $spl(2,1)$ 的玻色-费米实现，然后，在此基础上运用 q 变形玻色算符和费米算符，构造量子超代数 $spl_q(2,1)$ 的 q 变形玻色-费米表示．

二、经典 $spl(2,1)$ 的玻色-费米表示

依据文献[7]，经典 $spl(2,1)$ 超代数生成元的交换与反交换关系写为如下形式：

$$[Q_3,Q_\pm]=\pm Q_\pm \qquad [Q_+,Q_-]=2Q_3,$$
$$[B,Q_\pm]=[B,Q_3]=0,$$

本文 1992 年 3 月 19 日收到．

$$
\begin{aligned}
&[Q_3, V_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm, \qquad [Q_3, W_\pm] = \pm \frac{1}{2} W_\pm, \\
&[B, V_\pm] = \frac{1}{2} V_\pm, \qquad [B, W_\pm] = -\frac{1}{2} W_\pm, \\
&[Q_\pm, V_\mp] = V_\pm, \qquad [Q_\pm, W_\mp] = W_\pm, \\
&[Q_\pm, V_\pm] = 0, \qquad [Q_\pm, W_\pm] = 0, \\
&\{V_\pm, V_\pm\} = \{V_\pm, V_\mp\} = \{W_\pm, W_\pm\} = \{W_\pm, W_\mp\} = 0, \\
&\{V_\pm, W_\pm\} = \pm Q_3, \{V_\pm, W_\mp\} = -Q_3 \pm B.
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

引入普通的玻色和费米算符．玻色产生和湮没算符分别用 $\hat{b}_i^+$ 和 $\hat{b}_i$ 表示；费米产生和湮没算符分别用 $\hat{a}_i^+$ 和 $\hat{a}_i$ 表示，其中 $i=1,2\cdots$. 它们满足普通的交换与反交换关系，

$$
\begin{aligned}
&[\hat{b}_i, \hat{b}_j^+] = \delta_{iz}, \qquad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} = \delta_{ij}, \\
&[\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^+, \hat{b}_j^+] = 0, \\
&\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} = 0, \\
&[\hat{b}_i^+, \hat{a}_j] = [\hat{b}_i, \hat{a}_j^+] = [\hat{b}_i^+ \hat{a}_j] = [\hat{b}_i^+, \hat{a}_j^+] = 0.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

运用一对玻色算符和一对费米算符，$spl(2,1)$超代数的一种玻色-费米实现获得如下：

$$
\begin{aligned}
&Q_+ = -\frac{1}{2}\hat{b}^{+2}, \qquad Q_- = \frac{1}{2}\hat{b}^2, \\
&Q_3 = \frac{1}{4}(\hat{b}^+ \hat{b} + \hat{b}\hat{b}^+), \qquad B = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\hat{a}^+ \hat{a}, \\
&V_+ = \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{b}^+ \hat{a}, \qquad W_+ = \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{b}^+ \hat{a}^+, \\
&V_- = \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{b}\hat{a}, \qquad W_- = \frac{i}{\sqrt{2}}\hat{b}\hat{a}^+.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

容易验证，这样表示的生成元满足 $spl(2,1)$超代数的所有交换与反交换关系．事实上，这样一种实现体现了在由一对普通玻色振子和一对普通费米振子态所张成的希尔伯特空间的一种表示．

这种超代数也允许运用两对玻色算符和两对费米算符获得另外一种实现．选择

$$
\begin{aligned}
&Q_+ = \hat{b}_1^+ \hat{b}_2, \qquad Q_- = \hat{b}_2^+ \hat{b}_1, \\
&Q_3 = \frac{1}{2}(\hat{b}_1^+ b_1 - \hat{b}_2^+ b_2), \qquad B = \frac{1}{2}(\hat{a}_2^+ \hat{a}_2 - \hat{a}_1^+ \hat{a}_1), \\
&V_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1^+ \hat{a}_1 + \hat{b}_2 \hat{a}_2^+), V_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1 \hat{a}_2^+ - \hat{b}_2^+ \hat{a}_1). \\
&W_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{b}_2 \hat{a}_1^+), W_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_1 \hat{a}_1^+ - \hat{b}_2^+ \hat{a}_2).
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

可以证明，代数关系(2.1)仍然得到满足．因此，我们已经获得了经典 $spl(2,1)$超代数的两种玻色-费米实现．

三、量子 $spl_q(2,1)$的q变形玻色-费米表示

在这一节，我们将运用 q 变形振子表示描述 $spl(2,1)$超代数的量子变形．经典 $spl(2,1)$超代数由 $V_\pm$、$W_\pm$、Q_3 和 B 六个元素生成。量子超代数 $spl_q(2,1)$的生成算符满足如下基本交换与反交换关系：

$$
\begin{aligned}
&[Q_3,V_\pm]=\pm\frac{1}{2}V_\pm,[Q_3,W_\pm]=\pm\frac{1}{2}W_\pm,\\
&[B,V_\pm]=\frac{1}{2}V_\pm,[B,W_\pm]=-\frac{1}{2}W_\pm,\\
&\{V_+,W_-\}=-\frac{1}{2}[2H_+]_q,\{V_-,W_+\}=-\frac{1}{2}[2H_-]_q.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

其中

$$H_\pm=Q_3\mp B. \tag{3.2}$$

且

$$[Z]_q=(q^2-q^{-2})/(q-q^{-1}). \tag{3.3}$$

为了获得上述方程的实现，我们使用 q 变形玻色振子和费米振子．q 变形玻色振子的产生、湮没和数算符，分别用 b_i^+、b_i 和 N_i 表示．它们满足如下关系：

$$
\begin{aligned}
&b_ib_i^+-q^2b_i^+b_i=W_i^{-2},b_ib_i^+-q^{-2}b_i^+b_i=W_i^2,\\
&[N_i,b_j]=-\delta_{ij}b_j[N_i,b_j^+]=\delta_{ij}b_j^+.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

对于 $i\neq j$

$$
\begin{aligned}
&[b_i,b_j]=[b_i^+,b_j^+]=[b_i,b_j^+]=0,\\
&[N_i,N_j]=0.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

与此相应，q 变形费米振子的产生、淹没和数算符，分别用 a_i^+、a_i 和 M_i 表示．它们满足如下关系：

$$
\begin{aligned}
&a_ia_i^++q^2a_i^+a_i=p_i^{-2},a_ia_i^++q^{-2}a_i^+a_i=p_i^2,\\
&[M_i,a_j]=-\delta_{ij}a_j,[M_i,a_j^+]=\delta_{ij}a_j^+,\\
&\{a_i,a_j\}=\{a_i^+,a_j^+\}=0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

对于 $i\neq j$

$$\{a_i,a_j^+\}=0,[M_iM_j]=0. \tag{3.7}$$

此外，这些玻色和费米算符相互可交换．即：

$$
\begin{aligned}
&[b_i,a_j]=[b_i,a_j^+]=[b_i^+,a_j]=[b_i^+,a_j^+]=0,\\
&[N_i,a_j]=[N_i,a_j^+]=[M_i,b_j]=[M_i,b_j^+]=0,\\
&[N_i,M_j]=0.
\end{aligned}
\tag{3,8}
$$

注意到这些定义，显见

$$b_ib_i^+=\frac{(qw_i)^2-(qw_i)^{-2}}{q^2-q^{-2}},b_i^+b_i=\frac{w_i^2-w_i^{-2}}{q^2-q^{-2}}, \tag{3.9}$$

$$a_ia_i^+=\frac{(qp_i)^2-(qp_i)^{-2}}{q^2-q^{-2}},a_i^+a_i=\frac{p_i^{-2}-p_i^2}{q^2-q^{-2}}. \tag{3.10}$$

$$\{b_i,b_i^+\}=\frac{qw_i^2-(qw_i^2)^{-1}}{q-q^{-1}},[a_i,a_i^+]=\frac{qp_i^2-(qp_i^2)^{-1}}{q-q^{-1}}. \tag{3.11}$$

运用一对 q 变形玻色算符和一对 q 变形费米算符，并引入

$$
\begin{aligned}
V_{+} &= \frac{i}{\sqrt{2}} b^{+} a, \qquad W_{+} = \frac{i}{\sqrt{2}} b^{+} a^{+}, \\
V_{-} &= \frac{i}{\sqrt{2}} ba, \qquad W_{-} = \frac{i}{\sqrt{2}} ba^{+}.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

事实上，我们已经获得了 $spl_q(2,1)$ 的一种实现．

通过简单计算可得：

$$
\begin{aligned}
\{V_{+}, W_{-}\} &= -\frac{1}{2} \frac{(wp^{-1})^2 - (wp^{-1})^{-2}}{q^2 - q^{-2}}, \\
\{V_{-}, W_{+}\} &= -\frac{1}{2} \frac{(qwp)^2 - (qwp)^{-2}}{q^2 - q^{-2}}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

比较(3.13)和(3.1)．并将变形参量作一变换 $q^2 \to q$，可得

$$
wp^{-1} = q^{2H_{+}}, qwp = q^{2H_{-}}. \tag{3.14}
$$

令

$$
w = q^{N}, p = q^{-M} \tag{3.15}
$$

所以

$$
H_{+} = \frac{1}{2}(N + M), H_{-} = \frac{1}{2}(N - M + 1). \tag{3.16}
$$

也即

$$
Q_3 = \frac{1}{2}(N + \frac{1}{2}), B = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - M). \tag{3.17}
$$

易证，上述表示的生成元确实满足(3.1)．

除此之外，我们也能够运用两对 q 变形玻色算符和两对 q 变形费米算符，实现另外一种表示．选择

$$
\begin{aligned}
Q_3 &= \frac{1}{2}(N_1 - N_2), \qquad B = \frac{1}{2}(M_2 - M_1), \\
V_{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^{+} a_1 + b_2 a_2^{+}), \quad V_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 a_2^{+} - b_2^{+} a_1), \\
W_{+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1^{+} a_2 + b_2 a_1^{+}), W_{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 a_1^{+} - b_2^{+} a_2).
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

同样可证，这样表示的生成元满足关系式(3.1)．因此，我们获得了量子超代数 $spl_q(2,1)$ 的两种 q 变形玻色-费米表示．

参考文献

[1] N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.*, **123**(1989), 177.

[2] M. Jimbo, *Commun. Math. Phys.*, **102**(1986), 247.

[3] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **11**(1986), 247.

[4] M. Chaichan and P. Kulish, *Phys. Lett.*, **B234**(1990), 72.

[5] R. Floreanini, V. P. Spiridonov, and L. Vinet, *Commun. Math. Phys.*, **137**(1991), 149.

[6] T. Hayashi, *Commun. Math. Phys.*, **127**(1990), 129.

[7] M. Scheunert, W. Nahm, and V. Rittenberg, *J. Math. Phys.*, **18**(1977), 155.

q-Oscillator Representations of the Quantum Superalgebra $spl_q(2,1)$

CHEN YONGQING

(*Department of Physics*, *Hunan Normal University Changsha*, 410006)

ABSTRACT

q-oscillator representations of the quantum superalgebra $spl_q(2,1)$ are given in terms of one q-boson and one q-fermion or with two q-bosons and two q-fermions.