第 17 卷 第 9 期 高能物理与核物理 Vol. 17, No. 9
1993 年 9 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1993

Skyrme 模型中的一个问题及其简单的讨论*

李铁忠
（中国科学院高能物理研究所，北京 100039）

摘 要

该文提出并通过两个 Higgs 二重态的例子回答了一个问题．即只要在 π 介子场量之外还存在着另一种赝标三重态场量，其拉氏量可以写成 Skyrme 模型的形式，不管这些场量之间相互作用的具体情况如何，则一定存在着相应的另一种类型的 Skyrmions.

约 30 年前 Skyrme[1]首先建议在非线性 σ 模型中的 Soliton 的解可以解释成重子．从 70 年代中期经过 t'Hooft 和 Witten 等人的工作将这个模型与 QCD 联系起来：在大 N 极限下 QCD 可以等价于一个等效的介子场论[2]，这个介子场论在低能极限下可以约化成非线性 σ 模型[3]．从 80 年代初期开始的关于 Skyrme 模型方面的理论工作曾有较大的发展．一方面是用现代微分几何的数学技巧从场、流的特性及其关系等方面去研究和开拓[4]．另一方面是将其应用于粒子物理和核物理．首先计算出了核子和 Δ 粒子静态性质的是 Adkins 等人[5]．由于其结果与实验符合得相当好，因而促使以后相当多的作者继续在这个模型的基础上去研究粒子物理与核物理．近几年这方面的工作虽然少了，但仍时而出现，且探讨的方向也在发展．

π 和 σ 介子通过某些非线性相互作用可以形成某种 soliton，Skyrme 将这样的 soliton 解释成核子．人们将这样的 soliton 称做 Skyrmion. Skyrme 模型的拉氏量可以写成[5]

$$\mathscr{L}=\frac{1}{16}f^2\mathrm{Tr}(\partial_\mu U\cdot\partial^\mu U^+)+\frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}[(\partial_\mu U)U^+,(\partial_\nu U)U^+]^2 \tag{1}$$

f 是 π 介子衰变常数，e 是无量纲参数，其中 $U=\exp[\frac{2i}{f}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)]$，$\boldsymbol{\pi}(x)$是物理的 π 介子赝标三重态场量．一个很简单的问题产生了：除 π 介子以外，是否还有其它物理的粒子也可以用赝标三重态场量来描述？如果存在这样的赝标场量，描述这些赝标场量运动规律的拉氏量是否还可以写成(1)式的形式？如果描述这些赝标场量的拉氏量可以写成(1)式的形式，那么两个参数 f 和 e 取不同的值是否影响 Skyrmion 的存在？或许我们也可以从另一角度来思考这一问题：在(1)式的拉氏量中如果我们先抛弃 $\boldsymbol{\pi}(x)$作为 π 介子场和 f、e 参数的具体的物理意义和数值，而仅保留 $\boldsymbol{\pi}(x)$赝标三重态场量的性质，是否还存在 Skyrmion 的解？如果存在这样的 Skyrmion 它的物理意义是什么？

---

* 本工作得到中国科学院 LWTZ-1298 经费的资助．

本文 1992 年 12 月 20 日收到．

首先让我们寻找另一种物理粒子的赝标三重态场量.在最小的标准电弱模型[6]中,在一个 Higgs 二重态的三个分量被中间玻色子的纵分量吃掉之后仅剩下一个物理的 Higgs 标量.同时在最小标准电弱模型中存在如下几个问题:(1)在中微子质量为零的情况下,Yukawa 耦合强度的数值至少差 5 个量级,否则要差 10 个量级[7];(2)Peccei-Quinn 对称要求在标准电弱模型中至少有两个 Higgs 二重态[8];(3)标准模型最小的超对称扩充至少需要两个 Higgs 二重态[9].由于最小标准电弱模型存在以上问题我们将考虑它的扩充.

由于只有 Higgs 二重态才能与费米子耦合并给出它的质量,所以如果期望缩短 Yukawa 耦合强度的量级差别,可以考虑增加 Higgs 二重态.最小的 Higgs 的扩充是增加一个 Higgs 二重态.两个 Higgs 二重态的电弱统一模型的优点是:(1)如果只有 Higgs 二重态,在树图近似下 $\rho=\frac{M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2\cos^2Q_{\mathrm{W}}}=1$ 自动满足[10];(2)两个真空期望值可以分别给出中间玻色子和费米子的质量,或者费米子的质量被两个真空期望值给出,这样可使得 Yukawa 耦合强度的量级不致于差 5 个量级以上[11];(3)带电 Higgs 玻色子在实验上容易探测.

两个 Higgs 二重态有 8 个自由度,其中 3 个 Goldstone 被 $\mathrm{W}^{\pm}$ 和 Z^0 吃掉,剩下 5 个物理的 Higgs 粒子可以构成一组赝标 Higgs 三重态.两个 Higgs 二重态模型已被许多作者[11]研究过了,到目前还未被实验排除.如果我们忽略掉同一个二重态中不同分量的质量差和 Cabibbo 角,Haber 等人[11]的方程(6)可以写成:

$$\mathscr{L}=\frac{-mg}{2\beta m_{\mathrm{w}}}(\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}\phi\sin\alpha+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}h^0\cos\alpha-i\bar{\mathrm{d}}r_5\mathrm{d}H^0\cos\beta$$

$$+\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}\phi\sin\alpha+\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}h^0\cos\alpha+i\bar{\mathrm{u}}r_5\mathrm{u}H^0\cos\beta+\sqrt{2}\,\bar{\mathrm{u}}r_5\mathrm{d}H^+-\sqrt{2}\,\bar{\mathrm{d}}r_5\mathrm{u}H^-)\qquad(2)$$

这是一个夸克和 Higgs 的 Yukawa 耦合的拉氏量,其中 ϕ,h^0,H^0 和 $H^{\pm}$ 是 5 个物理的 Higgs,m 是 u 或 d 夸克质量.H^0 和 $\mathrm{H}^{\pm}$ 可以构成一个赝标三重态场量 $\boldsymbol{H}$ 是显然的,其拉氏量简单的可以写成

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{H}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}m_H^2\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}+O(\boldsymbol{H}^4)\qquad(3)$$

如果将 $\boldsymbol{H}$ 在通常的方法中与 SU(2)矩阵相联系

$$U=1+\frac{2i}{F}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{H}+\cdots=\exp(\frac{2i}{F}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{H})\qquad(4)$$

那么将(4)式代入到如下的拉氏量中去

$$\mathscr{L}=\frac{1}{16}F^2\mathrm{Tr}(\partial_\mu U\cdot\partial^\mu U^+)+\frac{1}{32E^2}\mathrm{Tr}[((\partial_\mu U)U^+,(\partial_\nu U)U^+)^2]+\frac{1}{8}m_{\mathrm{H}}^2F^2(\mathrm{Tr}U-2)\qquad(5)$$

可以获得方程(3)式[5],F 是一有量纲参数,E 是一无量纲参数,m_{H} 是 Higgs 质量.如果要求(5)式具有手征对称性则应删掉第三项

$$\mathscr{L}=\frac{1}{16}F\mathrm{Tr}(\partial_\mu U\cdot\lambda^\mu U^+)+\frac{1}{32E^2}\mathrm{Tr}[((\partial_\mu U)U^+,(\partial_\nu U)U^+)^2]\qquad(6)$$

(6)式与 Skyrme 的拉氏量(1)式在数学形式上完全相同,但场量和参数的物理意义和数值不同.在 Skyrme 的拉氏量(1)式中,$U=\exp[(2i/F)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}(x)]$,$\boldsymbol{\pi}(x)$是物理的 π 介子

场,在 π 介子之间存在着强相互作用. 一般情况下在 Higgs 之间的相互作用是很弱的. 相互作用如此之弱是否影响 soliton 的形成? 按照一般的议论[12],soliton 的形成与否取决于非线性的相互作用,不取决于相互作用的强度. 由于相互作用的强度与参数 F 和 E(或 f 和 e)有内在联系,是否可以认为 F 和 E 与 f 和 e 的数值不同不应影响 soliton 解的存在呢?可把上述问题具体化为:从数学形式上看对于(6)式的拉氏量与(1)式唯一的差别就是 F 和 E 的数值与 f 和 e 可能不同,这种不同是否还存在 Skyrmion 的解. 下面我们通过一个例子证明:在(6)式的拉氏量中 F 和 E 的数值的不同不会影响稳定的 Skyrmion 的存在.

将 Skyrme ansatz $U_0(x)=\exp[iF(r)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}]$代入到(6)式中,用变分法得到

$$\left[\frac{1}{4}\tilde{r}+2\sin^2F(\tilde{r})\right]F''(\tilde{r})+\frac{1}{2}\tilde{r}F'(\tilde{r})+\sin2F(\tilde{r})\cdot F'^2(\tilde{r})$$
$$-\frac{1}{4}\sin2F(\tilde{r})-\frac{\sin^2F(\tilde{r})\cdot\sin2F(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}=0 \tag{7}$$

其中 $\tilde{r}=EFr$ 是无量纲变量. 很显然(7)式不显含任何参数,也就是说方程(7)的解的存在不依赖于参数 E 和 F 的数值. Adkins 等人[13]获得(7)式的 Skyrmion 的数值解. 这个 Skyrmion 当然具有自旋$\frac{1}{2}$和拓扑荷为 1 的量子数. 也可以这样说:(7)式的 Skyrmion 解的存在与否不依赖于赝标场量描述的粒子之间相互作用的强度与性质.

如果 Higgs 粒子的质量不应忽略,我们只能从(5)式的拉氏量出发,亦即手征对称性被破坏的情况. 净 Skyrme ansatz $U_0(x)=\exp[iF(r)\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}]$代入(5)式得到

$$\left[\frac{1}{4}\tilde{r}^2+2\sin^2F(\tilde{r})\right]F''(\tilde{r})+\frac{1}{2}\tilde{r}F'(\tilde{r})+\sin2F(\tilde{r})\cdot F^2(\tilde{r})$$
$$-\frac{1}{4}\sin2F(\tilde{r})-\frac{\sin^2F(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}-\frac{1}{4}\beta^2\tilde{r}^2\sin F(\tilde{r})=0 \tag{8}$$

其中 $\tilde{r}=EFr,\beta=\frac{m_H}{EF}$. 与(7)式相比,(8)式多出一项($\frac{-1}{4}\beta\tilde{r}^2\sin F(\tilde{r})$). 即(8)式的解明显的依赖于参数 β. Adkins 等人[14]的计算表明在 $\beta=0$ 和 $\beta=0.263$ 时方程(8)存在 Skyrmion 的解. $\beta=0$ 即方程(7)的情况. $\beta=0.263$ 是 $F=108\text{MeV}$ 和 $E=4.84$ 的情况,这些 F 和 E 的值是由被解释成 Skyrmion 的核子和 Δ 粒子的质量决定的. 因为由 Higgs 形成的 Skyrmion 的质量是未知的,我们不能确定与之相应的 β 的数值,所以我们不能严格的确定方程(8)是否存在 Skyrmion 的数值解. 即手征破缺的 Skyrme 形式的拉氏量(5)式是否存在着 Skyrmion 的解还是不确定的(除非 Skyrmion 解的存在对 β 的变化不敏感①). 但手征对称的 Skyrme 形式的拉氏量(4)式一定存在 Skyrmion 的解. 因此我们可以得出如下的小结:只要存在赝标 3 重态场量(不一定非 π 介子场量),其拉氏量可以写成手征对称的 Skyrme 拉氏量的形式(方程(6)),不管其中参数 F 和 E 的数值是否与 f 和 e(在方程(1)中)相同均存在着 Skyrmion 的解,这种 Skyrmion 具有自旋$\frac{1}{2}$和拓扑荷为 1 的量子数是自然的.

---

① Adkins 等人[14]的计算结果表明方程(8)的 Skyrmion 的解的存在与否对 β 的变化并不敏感.

进一步的问题是：由 Higgs 形成的这种类型的 Skyrmion 的物理意义是什么？严格说来这个问题目前无法回答. 它与由 π 介子的非线性作用形成的 Skyrmion 解释成核子不同，π 介子的物理性质很清楚. Higgs 粒子至今在实验上未发现，其质量只有一个上限. 在这种情况下谈由 Higgs 形成的 Skyrmion 的物理意义显然是不够成熟. 如前所述由于 t′ Hooft 和 Witten 等人将 Skyrme 模型与 QCD 联系起来，实质上是给 Skyrme 模型一个更深层次的动力学基础的解释. 对应的可以理解由 Higgs 非线性耦合形成的 Skyrmion 实质上也包含着一个更深层次的类似于 QCD 的动力学，尽管这样动力学我们还是不清楚的，但描述这种类型 Skyrmion 的拉氏量是已知的.

参 考 文 献

[1] T. H. R. Skyrme, *Proceedings of the Royal Society*, **A260**(1961), 127.

[2] G',t Hooft, *Nucl. Phys.*, **B72**(1974), 461, **B75**(1974), 461.

[3] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B160**(1970), 57, **223**(1983), 422, 433.

[4] 周光召、郭汉英、吴可、宋行长，高能物理与核物理，**8**(1984)，252，508 及其中的参考文献.

[5] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552.

[6] S. Weinbery, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1264. A. Salam, In Elementary Partiale Theory, N. Srartholm, ed. Almquist and Forlay, Stockholm.

[7] H. Harari, SLAC-PUB-4223, 1987.

[8] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 1440, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 1791.

[9] C. H. Llewellyn Smith, In Proceeding at the 27th Scattish Universities summer School in Physics, 12th August-lst September 1984, St Andrews, Scotland.

[10] C. Jarlskog, USIP Report 85-03, Department of Physics, University of Stockhoim, Sweden.

[11] H. E. Haber, G. L. Kane and T. Sterling, *Nuclear Physics*, **B161**(1979), 493.

[12] T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic.

[13] G. S. Adkins and C. R. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B228**(1984), 559.

[14] G. S. Adkins and C. R. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 109.

One Problem in the Skyrme Model and its Simple Discussion

LI TIEZHONG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

ABSTRACT

This paper has suggested and answered one problem that has used an example of two Higgs doublets. That is due solely to the existence of a pseudoscalar triplet with a Lagrangian of the Skyrme form, then it shall be certainly to existe other type of Skyrmions.