

## (2+1)维手征 Gross-Neveu 模型的 顶角修正和相结构

沈 坤      裘忠平

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

### 摘 要

本文在  $1/N$  展开下计算了 (2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型的顶角修正和费米子质量修正, 并根据手征 Ward-Takahashi 恒等式得到的费米子质量公式讨论了  $1/N$  阶的相结构. 结果表明, 利用手征 Ward-Takahashi 恒等式来研究手征对称性的破缺有利于讨论手征对称性的高阶性质.

近来, (2+1) 维量子场论引起了人们广泛的兴趣. 一方面, (2+1) 维 Abel 规范理论 (QED<sub>3</sub>) 可以看成是某些描述高温超导的晶格模型的连续极限<sup>[1]</sup>. 在 (2+1) 维 QED 中, 量子反常和辐射修正都可以导出 Chern-Simons 项<sup>[2]</sup>, 并为高温超导现象提供了一种可能的描述. 另一方面, 人们利用 (2+1) 维场论模型来研究各种非微扰现象, 探寻处理非微扰现象的各种方法<sup>[3-5]</sup>, 并利用它来分析 (3+1) 维理论中所存在的非常复杂的非微扰现象.

在 (2+1) 维情况下, 四费米子耦合理论虽然在微扰展开下不可重整, 但在  $1/N$  展开下却具有可重整性<sup>[6]</sup>. 由 Coleman 定理可知<sup>[7]</sup>, 连续相变不可能在 (1+1) 维理论中发生; 而在 (2+1) 维情况下, 我们可以讨论在 QCD 中非常重要的手征相变.

通常, 在讨论动力学破缺时, 一般采用  $1/N$  展开来计算有效作用量, 并由此确定真空的场构形和质量谱<sup>[8]</sup>. 在  $1/N$  的领头阶, 有效作用量的计算不复杂. 可是, 若进一步讨论  $1/N$  的各阶时, 这种方法就非常复杂. 因此, 有人借助 Dyson-Schwinger 方程, 通过求解  $1/N$  阶的 Dyson-Schwinger 方程来讨论费米子质量修正和相结构在  $1/N$  阶的性质<sup>[9]</sup>. Dyson-Schwinger 方程是一个耦合在一起的非线性的积分方程, 这给方程的求解带来了很大的困难. 因此, 寻找新的处理方法是人们十分关心的课题之一.

在文献 [10] 中, 我们提出了利用含复合场的手征 Ward-Takahashi 恒等式来研究手征对称性破缺的方法, 并以 (2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型为例讨论了手征对称性破缺后费米子质量的动力学产生和束缚态的谱性质. 在  $1/N$  展开的领头阶, 得到了与其它方法一致的质量谱.

本文在我们以前工作的基础上通过计算顶角修正准确到  $1/N$  阶来研究手征对称性和相结构. 原则上, 这种讨论可以推广到  $1/N$  的任意阶.

(2+1) 维手征 Gross-Neveu 模型的拉氏量为

\* 国家自然科学基金资助.

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{g}{2N} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2], \quad (1)$$

其中  $\psi(x)$  是  $N$  分量的费米场. 利用辅助场的方法, 容易将(1)式改写为

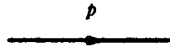
$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - \bar{\psi}(\sigma + ir_5\pi)\psi - \frac{N}{2g}(\sigma^2 + \pi^2). \quad (2)$$

由运动方程可知

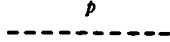
$$\sigma(x) = -\frac{g}{N}\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (3a)$$

$$\pi(x) = -\frac{g}{N}\bar{\psi}(x)ir_5\psi(x). \quad (3b)$$

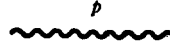
在  $1/N$  展开下, 由(2)式所导出的 Feynman 规则如下<sup>[8]</sup>.



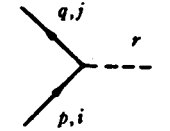
$$G_{ij}(p) = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m}, \quad (4a)$$



$$D_o(p) = \frac{2\pi}{iN} \frac{\sqrt{-p^2}}{(-p^2 + 4m^2)\tan^{-1} \sqrt{-p^2}/2m}, \quad (4b)$$



$$D_x(p) = \frac{2\pi}{iN} \frac{\sqrt{-p^2}}{(-p^2)\tan^{-1} \sqrt{-p^2}/2m}, \quad (4c)$$



$$-i\delta_{ij}, \quad (4d)$$



$$\gamma_5 \delta_{ij}. \quad (4e)$$

在文献[10]中, 我们得到动力学破缺后的费米子质量为

$$m = -\Gamma_{\psi, \psi, \sigma}^{(3)}(0, 0; 0) \langle \sigma \rangle. \quad (5)$$

其中  $\Gamma_{\psi, \psi, \sigma}^{(3)}(0, 0; 0)$  是完全正规顶角, 它包含有  $1/N$  的各阶贡献. 由(3a)式和(5)式容易看出, 只有当  $g\Gamma_{\psi, \psi, \sigma}^{(3)}(0, 0; 0) < 0$  时, 真空才是稳定的, 手征对称性将发生动力学破缺.

在  $1/N$  展开下, 费米子与  $\sigma$  粒子的顶角修正到  $1/N$  阶可用图 1 表示

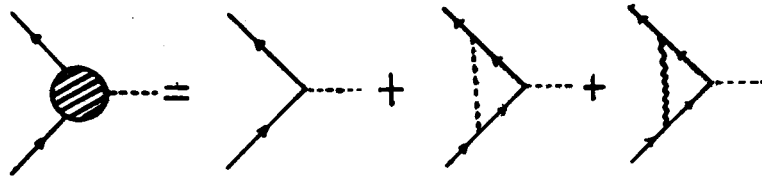


图 1 到  $1/N$  阶的顶角  $\Gamma_{\psi, \psi, \sigma}^{(3)}(p, q; r)$  修正图

对图 1, 利用 Feynman 规则(4), 有

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{\phi, \phi, \sigma}^{(3)}(0, 0, 0) &= -i - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{-k-m} (-i) \frac{i}{-k-m} \frac{2\pi}{iN} \frac{\sqrt{-k^2}}{(-k^2 + 4m^2) \tan^{-1} \sqrt{-k^2}/2m} \\
&\quad - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_5 \frac{i}{-k-m} \frac{i}{-k-m} \gamma_5 \frac{2\pi}{iN} \frac{\sqrt{-k^2}}{(-k^2) \tan^{-1} \sqrt{-k^2}/2m} \\
&= -i - \frac{i}{9\pi N} \{20[I_1(1) - I_1(2)] - 24I_2(1)\}. \tag{6}
\end{aligned}$$

其中

$$I_1(a) = \int_0^{\Lambda/m} dx \frac{x}{x^2 + a^2} \frac{1}{\tan^{-1} x/2}, \tag{7a}$$

$$I_2(a) = \int_0^{\Lambda/m} dx \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \frac{1}{\tan^{-1} x/2}. \tag{7b}$$

在(7)式中, 为了分离发散已经做了正规化, 取了动量截断  $\Lambda$ .

为了计算(7)式的积分, 我们将  $\tan^{-1} x$  项展开为

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5), & 0 < x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + O(x^{-5}), & x > 1 \end{cases} \tag{8a}$$

$$\tag{8b}$$

这样, 容易算出

$$\begin{aligned}
I_1(a) &\simeq \frac{8}{a} \left( \frac{3}{12 + a^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) \tan^{-1}(2/a) + \frac{2}{\pi} \ln(\Lambda/m) - \frac{2\sqrt{3}}{12 + a^2} \ln(2 - \sqrt{3}) \\
&\quad + \left( \frac{4^2}{\pi^3 a^2} - \frac{1}{\pi} \right) \ln(4 + a^2) + \frac{4}{\pi a} - \frac{4^2}{\pi^3 a^2} \ln^4, \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(a) &\simeq \frac{4}{a} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{3}{12 + a^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{6}{12 + a^2} \right] \tan^{-1}(2/a) \\
&\quad + \left[ \frac{8}{a^2} \left( \frac{3}{12 + a^2} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3} \right) + \frac{1}{\pi} \right] \frac{1}{4 + a^2} \\
&\quad - \frac{2\sqrt{3}}{(12 + a^2)^2} \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{4^2}{\pi^3 a^4} \ln(1 + \frac{a^2}{4}) + \frac{2}{\pi a^3}. \tag{10}
\end{aligned}$$

利用(9)、(10)式, (6)式可以得到

$$\Gamma_{\phi, \phi, \sigma}^{(3)}(0, 0, 0) \simeq -1 + \frac{-0.182}{N}, \tag{11}$$

注意, 上式是有限的, 图 1 中二个圈图的发散项正好互相抵消. 由(11)式可以看出,  $1/N$  阶的修正效应很小, 故对称性发生动力学破缺后, 领头项的贡献为主. 这也表明采用  $1/N$  展开是合理的.

利用(5)式, 容易得到在  $1/N$  阶费米子质量的修正为

$$\frac{\Delta m}{m} = -\frac{0.182}{N}. \tag{12}$$

应用(4)式和(11)式, (5)式可写为

$$m = \left(-1 + \frac{0.182}{N}\right) \frac{g}{N} \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle$$

$$= (1 - \frac{0.182}{N}) \frac{G}{G_0} (1 - \frac{m}{\Lambda} \frac{\pi}{2}), \quad (13)$$

其中  $G_0 \equiv \pi^2/2$ , 并重新定义了无质量的耦合常数  $G \equiv g\Lambda$ .

由(13)式, 我们可以得到决定手征对称性动力学破缺的自洽方程

$$m[1 - (1 - \frac{0.182}{N}) \frac{G}{G_0} (1 - \frac{m}{\Lambda} \frac{\pi}{2})] = 0, \quad (14)$$

上式等价于其它方法中的能隙方程. (14)式有非平凡解的条件为

$$1 - (1 - \frac{0.182}{N}) \frac{G}{G_0} (1 - \frac{m}{\Lambda} \frac{\pi}{2}) = 0, \quad (15)$$

它导致

$$(1 - \frac{0.182}{N}) \frac{G}{G_0} \geq 1. \quad (16)$$

这样, 准确到  $1/N$  阶的临界耦合常数可确定为

$$G_c = G_0 / (1 - \frac{0.182}{N}). \quad (17)$$

(16)式表明, 当四费米子之间的吸引相互作用不够强 ( $G \leq G_c$ ) 时, 方程(14)只有  $m=0$  的平凡解, 费米子之间的吸引相互作用未能产生费米子对凝聚, 手征对称性没有动力学破缺, 系统处于手征相. 当四费米子之间的吸引相互作用充分强 ( $G > G_c$ ) 时, 才会发生费米子对凝聚, 方程(14)有非平凡解. 相应地, 手征对称性将发生动力学破缺, 系统处于破缺相, 费米子获得了质量. 由(16)式容易看出, 在  $1/N$  的领头阶,  $G$  的临界耦合常数就是  $G_0$ . 这与 Rosenstein 等人用大  $N$  展开所得到的结论一致<sup>[8]</sup>.

$G_c$  随  $1/N$  的变化见图 2. 由(17)式和图 2 可见,  $1/N$  阶对相结构的修正很小.

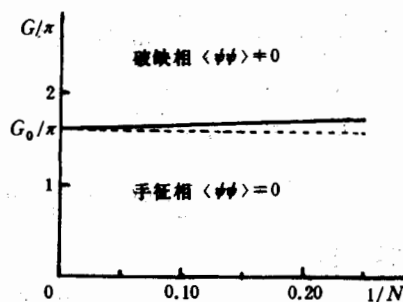


图 2  $1/N$  阶的临界耦合常数  $G$  随  $1/N$  的变化关系

以上我们利用手征 Ward-Takahashi 恒等式所得到的质量谱公式, 通过计算顶角修正讨论了  $1/N$  阶对费米子质量和相结构的修正. 结果表明, 利用手征 Ward-Takahashi 恒等式来讨论手征对称性的高阶性质比 Dyson-Schwinger 方程更方便.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] I. Affleck and J. B. Marston, *Phys. Rev.*, **B37**(1988), 3774; **B39**(1989), 1538; R. Shankar, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 203;  
E. Dagotto, E. Frodkin and A. More, *Phys. Rev.*, **B38**(1989), 2926.
- [ 2 ] A. J. Niemi and G. W. Semanoff, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 2077.
- [ 3 ] M. G. Mitchard, J. A. Gracey and A. J. Macfarlane, *Nucl. Phys.*, **B325**(1989), 470; I. Yotsuyanagi, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 3034.
- [ 4 ] A. D. Davis, J. A. Gracey and A. J. Macfarlane, *Nucl. Phys.*, **B295(FS21)**(1988), 617.
- [ 5 ] B. Rosenstein and A. Kover, *Phys. Rev.*, **D40**(1989), 523.
- [ 6 ] K. Shizuya, *Phys. Rev.*, **D21**(1980)2327; B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(1989), 1433.
- [ 7 ] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.*, **31**(1973), 259.
- [ 8 ] B. Rosenstein and B. J. Warr, *Phys. Lett.*, **218B**(1989), 465.
- [ 9 ] M. Carena, T. E. Clark and C. E. M. Wagner, *Nucl. Phys.*, **B356**(1991), 117.
- [ 10 ] 沈坤、裘忠平, 高能物理与核物理, **16**(1992), 29; Shen Kun and Qiu Zhongping, *Journal of Phys.*, **18**(1992), 745.

**Vertex Correction and Phase Structure  
in (2+1) Dimensional Chiral Gross-Neveu Model**

SHEN KUN      QIU ZHONGPING

*(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070)*

ABSTRACT

In  $1/N$  order vertex and fermion mass corrections are calculated in (2+1) dimensional chiral Gross-Neveu model. In terms of the fermion mass spectrum, derived from chiral Ward-Takahashi identities, the phase structure in  $1/N$  order is discussed. It turns out that chiral W-T identities with composite fields are a powerful method to investigate chiral symmetry breaking and higher order corrections.