第 18 卷 第 2 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 2
1994 年 2 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1994

# $CP^1$ 模型的拓扑项的可移性与 $\vartheta$ 真空*

高孝纯 钱铁铮
（浙江大学物理系 杭州 310027）

1992 年 9 月 22 日收到

**摘　　要**

研究了 1 + 1 维 $CP^1$ 模型的拓扑项的可移性，求得了移去 $CP^1$ 模型拓扑项的么正变换，并且找到了拓扑项与 $\vartheta$ 真空以及几何相因子的关系.

**关键词** $CP^1$ 模型，拓扑项，$\vartheta$ 真空.

## 1 引　　言

非线性 $\sigma$ 模型的研究长期以来一直受到人们的重视. 1 + 1 维非线性 $\sigma$ 模型具有许多与 3 + 1 维 Yang-Mills 理论相似的地方，对它的研究有助于人们了解 3 + 1 维非阿贝尔规范理论的许多性质[1]. 近年来，人们逐渐认识到，非线性 $\sigma$ 模型也可能在凝聚态物理的研究中起十分重要的作用[2-6].

我们曾经研究了 1 + 1 维 $O(3)\,\sigma$ 模型的拓扑项的可移性问题，证明了拉氏密度中的拓扑项可通过一适当的经典正则变换移掉[7]。文献[8]研究了 1 + 1 维 $O(3)\,\sigma$ 模型的正则结构并给出了系统的量子哈密顿表式. 在此基础上我们进一步研究了量子理论，找到了移去拓扑项的么正变换[9]. 本文将研究 1 + 1 维 $CP^1$ 模型的拓扑项的可移性. 作为规范理论，$CP^1$ 模型比之 $O(3)\,\sigma$ 模型具有更多的与 Yang-Mills 理论的相似之处[10,11]，这使我们能够进一步研究拓扑项与 $\vartheta$ 真空[12]以及几何相因子[13]的关系.

## 2 $CP^1$ 模型的拓扑项的可移性与 $\vartheta$ 真空

$O(3)\,\sigma$ 模型的拉氏密度为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2g^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})(\partial^\mu \boldsymbol{n})+\frac{1}{8\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{n}\times\partial_\gamma \boldsymbol{n}),\tag{1}$$

其中第二项为拓扑项. 令 $\boldsymbol{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$，文献[8]给出了量子哈密顿的正则形式

$$H=\int \mathrm{d}x\,\mathscr{H};$$

* 国家自然科学基金与浙江省自然科学基金资助.

$$\mathscr{H}=\frac{g^2}{2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\pi_\theta-\frac{\Theta}{4\pi}\sin\theta\partial\varphi\right)\sin\theta\left(\pi_\theta-\frac{\Theta}{4\pi}\sin\theta\partial\varphi\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\pi_\varphi+\frac{\Theta}{4\pi}\sin\theta\partial\theta\right)^2\right]+\frac{1}{2g^2}[(\partial\theta)^2+\sin^2\theta(\partial\varphi)^2], \tag{2}$$

正则对易关系为 $[\theta(x),\pi_\theta(x')]=[\varphi(x),\pi_\varphi(x')]=i\delta(x-x')$.

已经证明,通过一适当的经典正则变换,$\mathscr{L}$ 中的拓扑项可以被移掉[7],相应的量子么正变换已在文献[9]中给出. 在 Schrödinger 图象中,么正变换为

$$U=\exp\left(i\frac{\Theta}{4\pi}\int\cos\theta\partial\varphi\mathrm{d}x\right), \tag{3}$$

满足 $UHU^+=H_0$, 含拓扑项的哈密顿$H$变为如下的不含拓扑项的 $H_0$

$$H_0=\int\mathrm{d}x\left\{\frac{1}{2g^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\pi_\theta\sin\theta\pi_\theta+\frac{\pi_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)+\frac{g^2}{2}[(\partial\theta)^2+\sin^2\theta(\partial\varphi)^2]\right\}. \tag{4}$$

值得指出,由于$U$中含有 $\partial\varphi$, 整体地看,它必在球面 $S^2$ 某处有奇点.

由于 $CP^1$ 模型比之 $O(3)\sigma$ 模型与 Yang-Mills 理论更为相似,研究 $CP^1$ 模型能使我们进一步讨论拓扑项的可移性与 $\vartheta$ 真空的关系.

在 $S^2$ 上引入 $U(1)$ 自由度,形成以 $S^2$ 为底流形,以 $U(1)$ 为纤维的丛,即 Hopf 丛. 令

$$z=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{e}^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\mathrm{e}^{i\chi}, \tag{5}$$

有 $z^+\boldsymbol{\sigma}z=\boldsymbol{n}$, $z^+z=1$. 通过将 $S^2$ 扩张为 Hopf 丛,我们得到与 $O(3)\sigma$ 模型等价的 $CP^1$ 模型. 将 $\boldsymbol{n}=z^+\boldsymbol{\sigma}z$ 代入式(1),可得 $CP^1$ 模型的拉氏密度[10,11]

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=\frac{2}{g^2}[\partial_\mu z^+\partial^\mu z+(z^+\partial_\mu z)(z^+\partial^\mu z)]-i\frac{\Theta}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu z^+\partial_\nu z\\&=\frac{2}{g^2}(\mathrm{D}_\mu z)^+(\mathrm{D}^\mu z)-\frac{\Theta}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu+iA_\mu$, $A_\mu=iz^+\partial_\mu z$. $\mathscr{L}$ 具有局域 $U(1)$ 规范不变性,即在变换 $z\to gz$, $A_\mu\to A_\mu-ig\partial_\mu g^{-1}$ 下, $\mathscr{L}$ 不变. 显然,哈密顿(2)即为 $CP^1$ 模型的哈密顿,它与 $\mathscr{L}$ 都是 $U(1)$ 局域规范不变的.

Hopf 丛上整体定义的测度为

$$\mathrm{d}z^+\mathrm{d}z=\frac{1}{4}(\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}\chi)^2+\sin^2\frac{\theta}{2}(\mathrm{d}\varphi)^2+2\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\chi,$$

采用正交标架,有 $\mathrm{d}z^+\mathrm{d}z=\frac{1}{4}(\mathrm{d}\theta)^2+\cos^2\frac{\theta}{2}(\mathrm{d}\chi)^2+\sin^2\frac{\theta}{2}(\mathrm{d}\psi)^2$, 其中 $\psi=\chi+\varphi$.

整体定义的联络为 $iz^+z\mathrm{d}=-\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\chi-\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\psi$[14]. 利用此联络可得整体定义的$U$变换

$$U=\exp\left(i\frac{\Theta}{2\pi}\int iz^+\partial z\mathrm{d}x\right)=\exp\left\{-i\frac{\Theta}{4\pi}\int[(1-\cos\theta)\partial\varphi+2\partial\chi]\mathrm{d}x\right\}. \tag{7}$$

通过简单运算可证 $UHU^+=H_0$，即 CP¹ 模型的哈密顿中的拓扑项可以被么正变换 $U$ 移掉.

现在研究在 $U$ 变换下，CP¹ 模型的真空态的变换. CP¹ 模型的经典真空可取为 $z_v(x)=z_0e^{i\psi_v(x)}$，其中 $z_0=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，并满足边界条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty}z(x)=z_0$。相应的 $O(3)\sigma$ 模型的经典真空为 $\boldsymbol{n}_v(x)=(0,0,1)$. 真空的拓扑荷为 $\frac{1}{2\pi}\int d\psi_v(x)=n$，$n$ 是整数. 由于 $e^{i\psi_v(x)}$ 是把空间 $S^1$ 映入 $U(1)$ 群的映射，$n$ 就是它的绕数. 拓扑荷在拓扑平庸的规范变换下不变，我们将绕数为 $n$ 的真空记为 $[z_n]$. 拓扑不平庸的规范变换 $g_\nu$ 满足

$$-i\int g_\nu^{-1}dg_\nu(x)=\nu,$$

$\nu$ 是非零整数，它将改变真空的拓扑荷：$[z_n]\xrightarrow{g_\nu}[z_{n+\nu}]$. 按经典对应[12]，绕数为 $n$ 的经典真空 $[z_n]$ 对应量子理论中的 $n$ 真空 $|n\rangle$，在相应的量子规范变换下，应有

$$\begin{aligned}T_{g_\nu}|n\rangle&=|n+\nu\rangle,\\ T_{g_\nu}f(z)T_{g_\nu}^{-1}&=f(g_\nu^{-1}z).\end{aligned}\tag{8}$$

现在转向 $\vartheta$ 真空的讨论. 按一般的做法，在欧空中讨论此问题. 由于存在瞬子解[10]，不同的 $|n\rangle$ 真空之间有穿透. 由于这种量子穿透效应，系统的真空应是如下的 $\vartheta$ 真空[12]

$$|\vartheta\rangle=\sum_n e^{in\vartheta}|n\rangle.\tag{9}$$

它对所有的规范变换是稳定的. 例如，在 $T_{g_1}$ 作用下，有

$$T_{g_1}|\vartheta\rangle=\sum_n e^{in\vartheta}|n+1\rangle=e^{-i\vartheta}|\vartheta\rangle.\tag{10}$$

由于哈密顿与所有的规范变换对易，故不同的 $|\vartheta\rangle$ 真空之间无跃迁. 这说明给定哈密顿后，不同的 $\vartheta$ 真空决定不同的理论. 从式(10)及

$$\begin{aligned}T_{g_1}U(z)T_{g_1}^{-1}&=U(g_1^{-1}z)=e^{i\Theta}U(z);\\ T_{g_1}U|\vartheta\rangle&=T_{g_1}UT_{g_1}^{-1}T_{g_1}|\vartheta\rangle=e^{-i(\vartheta-\Theta)}U|\vartheta\rangle,\end{aligned}\tag{11}$$

可得在 $U$ 变换作用下，$\vartheta$ 真空的变换性质：

$$U|\vartheta\rangle=|\vartheta-\Theta\rangle.\tag{12}$$

于是有

$$\begin{aligned}\langle\vartheta=-\Theta|e^{-H_0T}|\vartheta=-\Theta\rangle&=\langle\vartheta=0|U^+e^{-H_0T}U|\vartheta=0\rangle\\ &=\langle\vartheta=0|e^{-HT}|\vartheta=0\rangle.\end{aligned}\tag{13}$$

这是 $|\vartheta=0\rangle$ 到 $|\vartheta=0\rangle$ 的循环演化的跃迁幅，且不同的 $\vartheta$ 真空之间无跃迁，故此幅可称为欧空相因子. 如转回闵空，此幅即是通常意义下的相因子. 下面用路径积分表出此相因子.

由于 $H$ 不含 $\chi$，故 shape 态可写为 $|\theta(x),\varphi(x)\rangle$. 利用此 shape 态的完备性并令 $T=N\varepsilon$，$(N\to\infty)$，即得

$$\begin{aligned}&\langle\vartheta=0|e^{-HT}|\vartheta=0\rangle\\ &=\langle\vartheta=0|\theta_N(x),\varphi_N(x)\rangle\left(\prod_x\sin\theta_N d\theta_N d\varphi_N\right)\langle\theta_N(x),\varphi_N(x)|e^{-H\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\times|\theta_{N-1}(x),\varphi_{N-1}(x)\rangle\cdots\left(\prod_x \sin\theta_{n+1}\mathrm{d}\theta_{n+1}\mathrm{d}\varphi_{n+1}\right)\langle\theta_{n+1}(x),\varphi_{n+1}(x)|$$

$$\times e^{-H\varepsilon}|\theta_n(x),\varphi_n(x)\rangle\cdots\left(\prod_x \sin\theta_1\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\varphi_1\right)\langle\theta_1(x),\varphi_1(x)|e^{-H\varepsilon}$$

$$\times|\theta_0(x),\varphi_0(x)\rangle\left(\prod_x \sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0\mathrm{d}\varphi_0\right)\langle\theta_0(x),\varphi_0(x)|\vartheta=0\rangle. \tag{14}$$

令 $\theta_{n+1}=\theta_n+\dot{\theta}_n\varepsilon$; $\varphi_{n+1}=\varphi_n+\dot{\varphi}_n\varepsilon$，保留到 $\varepsilon$ 的一阶项，可得

$$\begin{aligned}&\langle\theta_{n+1}(x),\varphi_{n+1}(x)|e^{-H\varepsilon}|\theta_n(x),\varphi_n(x)\rangle\\&=\int\left(\prod_x \mathrm{d}p_n\mathrm{d}k_n\right)\exp\left(\varepsilon\int\mathrm{d}x\left\{i(p_n\dot{\theta}_n+k_n\sin\theta_{n+1}\dot{\varphi}_n)\right.\right.\\&\quad-\frac{g^2}{2}(p_n^2+k_n^2)+g^2\frac{\Theta}{4\pi}(p_n\sin\theta_{n+1}\partial\varphi_{n+1}-k_n\partial\theta_{n+1})\\&\quad\left.\left.-\left[\frac{g^2}{2}\left(\frac{\Theta}{4\pi}\right)^2+\frac{1}{2g^2}\right][(\partial\theta_{n+1})^2+\sin^2\theta_{n+1}(\partial\varphi_{n+1})^2]\right\}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

代入式(14)，采用[15]的类似写法，得

$$\begin{aligned}&\langle\vartheta=0|e^{-HT}|\vartheta=0\rangle\\&=\mathscr{N}\int\left(\prod_{m=0}^{N-1}\prod_x \mathrm{d}p_m\mathrm{d}k_m\right)\left(\prod_{n=1}^{N-1}\prod_x\sin\theta_n\mathrm{d}\theta_n\mathrm{d}\varphi_n\right)\\&\quad\times\exp\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}\int\mathrm{d}x\left\{i(p_k\dot{\theta}_k+k_k\sin\theta_{k+1}\dot{\varphi}_k)\right.\right.\\&\quad-\frac{g^2}{2}(p_k^2+k_k^2)+g^2\frac{\Theta}{4\pi}(p_k\sin\theta_{k+1}\partial\varphi_{k+1}-k_k\partial\theta_{k+1})\\&\quad\left.\left.-\left[\frac{g^2}{2}\left(\frac{\Theta}{4\pi}\right)^2+\frac{1}{2g^2}\right][(\partial\theta_{k+1})^2+\sin^2\theta_{k+1}(\partial\varphi_{k+1})^2]\right\}\right)\\&\underset{\varepsilon\to0}{\overset{N\to\infty}{=}}\mathscr{N}'\int\left(\prod_{x_1,x_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right)\exp\left(-\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\left\{\frac{1}{2g^2}[(\partial_1\theta)^2+\sin^2\theta(\partial\varphi)^2+(\partial_2\theta)^2\right.\right.\\&\quad\left.\left.+\sin^2\theta(\partial_2\varphi)^2]+i\frac{\Theta}{4\pi}(\sin\theta\partial_1\theta\partial_2\varphi-\sin\theta\partial_1\varphi\partial_2\theta)\right\}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $i\frac{\Theta}{4\pi}(\sin\theta\partial_1\theta\partial_2\varphi-\sin\theta\partial_1\varphi\partial_2\theta)$ 即为欧空中有效拉氏密度中的拓扑项. 此项所对应的几何相因子 $\exp\left[-i\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\frac{\Theta}{4\pi}(\sin\theta\partial_1\theta\partial_2\varphi-\sin\theta\partial_1\varphi\partial_2\theta)\right]$ 与 Aharonov-Bohm 效应有关[13]. 以上结果表明，真空为 $|\vartheta=-\Theta\rangle$、哈密顿量为 $H_0$ (其中不含拓扑项)的理论与真空为 $|\vartheta=0\rangle$、哈密顿为 $H$ (其中含拓扑项)的理论等价. 从这个意义上说，拓扑项是可移的.

## 3 讨 论

$CP^1$ 模型的经典真空为 $z_v(x)=z_0e^{i\psi_v(x)}$，相应的 $O(3)\sigma$ 模型的真空为

$$\boldsymbol{n}_v(x)=z_v^+(x)\boldsymbol{\sigma}z_v(x)=z_0^+e^{-i\psi_v(x)}\boldsymbol{\sigma}z_0e^{i\psi_v(x)}=z_0^+\boldsymbol{\sigma}z_0,$$

可见在 $O(3)\sigma$ 模型中,标志真空拓扑性质的 $\phi_v(x)$ 不复存在,所以在 $O(3)\sigma$ 模型中是无法讨论真空拓扑性质的. 就这点而论, $CP^1$ 模型与 $O(3)\sigma$ 模型并不完全等价. 在 1989 年, 文献[13]曾在 $O(3)\sigma$ 模型的框架内讨论了拓扑项与能量本征函数的关系. 显然,那里的讨论是不够完全的, 而且文中并未给出正确的量子哈密顿的表式(这一表式在 1990 年由文献[8]给出). 本文结果表明, $CP^1$ 模型的真空角 $\vartheta$ 与拓扑项的系数 $\Theta$ 是可以相互转换的,这就是所谓拓扑项的可移性. 而 $CP^1$ 模型的真空角不能由理论本身决定,即不能由 $|\vartheta\rangle$ 作为最低能量本征态决定, 于是拓扑项的系数也不能由理论本身决定. 对 Yang-Mills 理论亦有类似的结论[12,15]. 历史上, 曾经引入 Peccei-Quinn 机制来确定 Yang-Mills 理论的 $\mathscr{L}_\theta$ 项的系数[15,16]. 如何确定 $CP^1$ 模型拓扑项的系数是一个令人感兴趣的问题. Haldane 与 Affleck 等人指出[3], 当把 $CP^1$ 模型看作反铁磁链的大 $S$ 极限时, $\Theta$ 的取值受到限制: 对整数自旋 $\Theta=0$, 对半整数自旋 $\Theta=\pi$. 从本文的结果看,有必要对此结论作进一步的探讨.

## 参 考 文 献


[1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**(1975) 79; D. J. Gross, *Nucl. Phys.*, **132**(1978) 439.
[2] H. Levine, S. Libby and A. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983) 1915.
[3] F. D. M. Haldane, *Phys. Lett.*, **93A**(1983) 464; *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983) 1153; I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986) 408.
[4] H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.*, **64**(1990) 2066.
[5] Y. S. Wu and A. Zee, *Phys. Lett.*, **147B**(1984) 325.
[6] I. E. Dzyaloshinskii, A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, *Phys. Lett.*, **127A**(1988) 112; V. Kalmeyer and R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987) 2095.
[7] 高孝纯、汪涌、许晶波、李文铸,高能物理与核物理,**13**(1989)527; M. L. Ge and Y. Niu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **A22**(1989), L457.
[8] T. L. Olczyk, P. K. Panigrahi and S. Ramaswamy, *Z. Phys.*, **C45**(1990) 653.
[9] 高孝纯、许晶波、严激进、李文铸,高能物理与核物理,**15**(1991)591; J. B. Xu, X. C. Gao, J. J. Yan and W. Z. Li, *Z. Phys.*, **C51**(1991) 133.
[10] A. D'Adda, M. Luscher and P. Di Vecchia, *Nucl. Phys.*, **B146**(1978), 63.
[11] E. Eichenherr, *Nucl. Phys.*, **B146**(1978) 215.
[12] R. Jakiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **37**(1976) 172; C. G. Callan, R. F. Dashen and D. J. Gross, *Phys. Lett.*, **63B**(1976) 334.
[13] S. C. Zhang, H. J. Schulz and T. Ziman, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989) 1110.
[14] 侯伯元、侯伯宇,物理学家用微分几何(1990),科学出版社.
[15] W. Marciano and H. Pagels. *Phys. Rep.*, **C36**(1978) 254.
[16] P. D. Peccei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977) 1440; S. M. Bar, X. C. Gao and D. B. Reiss, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2176.

# The Removability of the Topological Term in the $CP^1$ Model and $\vartheta$ Vacuum

Gao Xiaochun Qian Tiezheng
(*Physics Department, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
Received on September 22, 1992

Abstract

In this paper, the removability of the topological term in the 1 + 1 dimension $CP^1$ model is studied. The unitary transformation which removes the topological term in the $CP^1$ model is obtained. The relation of the topological term to the $\vartheta$ vacuum and geometric phase is found.

**Key words** $CP^1$ model, Topological term, $\vartheta$ vacuum