

# 对称性对四体系统结构和内部运动的影响

阮文英

(华南理工大学物理系 广州 510641)

鲍诚光

(中山大学物理系 广州 510275)

1992年12月14日收到

## 摘 要

文中用谐振子乘积基展开法求解了四体系统的 Schrödinger 方程。通过分析波函数及形状密度函数在多维坐标空间的分布,比较了四体全对称  $0^+$  态,四体全对称  $0^-$  态和四体全反对称  $0^+$  态,四体全反对称  $0^-$  态的结构和内部运动的差异;讨论了对称性的影响。

**关键词** 少体系统,四体问题,对称性,几何结构,内部运动形态。

## 1 引 言

在文献[1]中,我们研究和比较了三体系统中其波函数的空间部分具有  $\square$ 、 $\square$  和  $\square$  置换对称,总角动量  $L$  为 0 的正宇称态。发现体系将采取怎样的几何结构和内部运动模式与对称性有密切关系。例如在  $\square$  对称的  $0^+$  态(简记为  $\square 0^+$  态),体系为了减小总势能而倾向于几何对称的结构(等边三角形,等腰三角形)。但在  $\square 0^+$  态对称结构部分受禁戒,以两个极化方向相同粒子为底的等腰三角形不可能出现。在  $\square 0^+$  态,对称结构完全受禁戒,体系只能处于极不对称的结构。在内部运动方面, $\square 0^+$  态主要有折叶和呼吸模式,前者是等腰三角形与共线结构的相互转换,后者只改变体系的大小而不改变形状。但在  $\square$  和  $\square$  的  $0^+$  态,折叶和呼吸模式都不可能出现,内部运动只能是其中一个粒子相对于另外两个粒子质心的摆动。

本文将文献[1]的工作推广到四体系统,以研究四体系统的结构和内部运动随对称性变化的规律。本文将给出四体系统具有  $\square$  空间置换对称的  $0^+$ 、 $0^-$  态和  $\square$  对称  $0^-$  态的计算结果,并与文献[2]的  $\square 0^+$  态的结果作比较。

## 2 计算方法

与文献[2]一样,我们研究的是一个四体模型,粒子质量仍取  $\alpha$  粒子质量 ( $m_\alpha = 3728$  MeV)。相互作用取具有排斥芯和吸引尾的两体力

$$V(r) = 600e^{-r^2/1.408^2} - 300e^{-r^2/2.105^2}, \quad (1)$$

( $V$  的单位: MeV,  $r$  单位: fm)

其最小值在  $r_0 = 2.32\text{fm}$  处。值得提到的是我们的定性结论对粒子质量和相互作用参数的变化不敏感。

依照文献[2,3]的做法,我们在由(反)对称化的谐振子基

$$\tilde{\Phi}_{[K]} = S\{\phi_{n_a l_a}(\mathbf{r}_a)[\phi_{n_b l_b}(\mathbf{r}_b)\phi_{n_c l_c}(\mathbf{r}_c)]_{L_0}\}_{L} \quad (2)$$

所张开的子空间中将体系哈密顿量  $H$  对角化后得到本征能量  $E_i$  和波函数  $\psi_i$ 。通过分析形状密度函数  $\rho_i$  的分布和波函数的节面结构来获取体系结构和内部运动的信息。

(2) 式中,  $S$  是(反)对称化算符。 $\phi_{n l}$  是单个谐振子波函数,  $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{r}_b$  和  $\mathbf{r}_c$  是四体 Jacobi 坐标如图 1 所示。 $\phi_{n l}$  中含待定参数  $\omega$ , 将作为可调变分参数。

在粒子自旋为零或方向一致时,体系波函数只有一个分量,四体形状密度可以定义为<sup>[2]</sup>

$$\rho_i = |\psi|^2 \sum_p \frac{1}{4!} p \{ \xi^3 \sin^5 \eta_1 \sin^2 \eta_2 \cos^2 \eta_1 \cos^2 \eta_2 \sin \theta_{se} \}, \quad (3)$$

其中  $p$  代表粒子的置换,超径  $\xi$  和超角  $\eta_1, \eta_2$  与 Jacobi 坐标  $\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b$  和  $\mathbf{r}_c$  的关系为

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{r_a^2 + r_b^2 + 2r_c^2} \\ r_a &= \xi \sin \eta_1 \cos \eta_2 \\ r_b &= \xi \sin \eta_1 \sin \eta_2 \\ r_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} \xi \cos \eta_1 \\ 0 &\leq \eta_1, \eta_2 \leq \pi/2. \end{aligned} \quad (4)$$

$\rho_i$  的物理意义是体系处于某种几何构型并沿空间某个方向的几率密度。在目前总角动量  $L = 0$ ,  $\rho_i$  与空间取向无关。

### 3 总势与固有节面的分析

在给出计算结果之前,先大致了解总势的结构将是有益的。若两体势取为(1)式,在四体总势中有一最小值,对应于正四面体结构。这时每对粒子的距离均为  $r_0 = 2.32\text{fm}$ 。使每对粒子的势能最小。此外还有三个鞍点,分别对应于正方形、正四面心(三个粒子构成正三角形,第四个在正中)和线状结构。从最小值到每个鞍点之间都联系着一条势能谷,但以到正方形的势能谷最深。因此沿着这样一条势能谷的运动是最节省能量的。文献[2]对  ${}^4\text{He}^+$  态的计算结果表明,基态的结构基本上就是一个正四面体,而第一激发态则是沿势能谷的正四面体  $\leftrightarrow$  正方形的运动。

影响结构和运动的另一因素是对称性(置换对称、空间转动和反射)。若体系总角动量为 0,按对称性要求,除  $\text{A}_1$  对称的正宇称态外,其他情况都会出现固有节面(对称性所

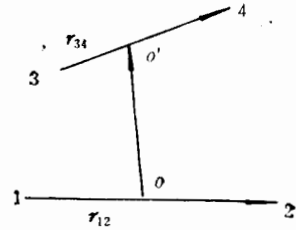


图 1 四体 Jacobi 坐标

要求的节面)。例如对于  $L = 0$  的负宇称态,由于粒子在同一平面内的反射等价于  $180^\circ$  的

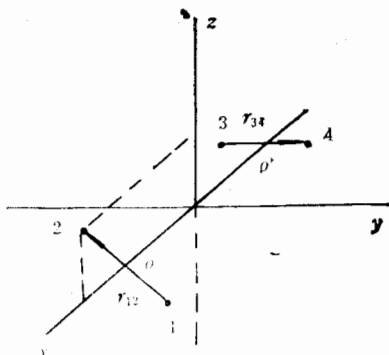


图2 在目  $0^+$  态和  $\text{III}0^-$  态中出现的一种固有节面

其中  $r_{12}$  在  $XZ$  平面内,  $r_{34}$  在  $XY$  平面内, 体系质心与坐标原点重合。

转动,因此不可能有四粒子共面的结构。换言之,共面结构是  $0^-$  态波函数的一个固有节面。此外若粒子的位置满足图2的几何关系则空间的全反射和绕  $y$  轴转  $180^\circ$  等价于3、4粒子的置换,因此对于目  $0^+$  态和  $\text{III}0^-$  态,这也将是波函数的固有节面。归纳起来得到表1。一般说来,节面的出现意味着动能的增加(节面愈多,运动愈激烈);因此对于低激发态,波函数不分布在固有节面的邻近。另一方面,在四体系统中对总势较为有利的构型(正四面体、正方形和正四面心三角形)都满足图2的几何关系。一旦图2的结构成为波函数的节面,减小体系的总势能和总动能两者难以兼顾,因而将会导致体系能量很高并不可避免地会出现穿越固有节面的运动。

表1 对称性对四体系统结构禁戒表

状态	几何构型	共面结构	图2的结构
	禁戒情况		
$\text{III}0^+$		✓	✓
目 $0^-$		×	✓
目 $0^+$		✓	×
$\text{III}0^-$		×	×

注: ✓代表允许, ×代表禁戒

## 4 计算结果

### 4.1 能谱

我们将四种对称性的最低几个能态列于表2。从表中注意到下列几个特点: i) 目  $0^-$  态的能量很低, 与  $\text{III}0_1^+$  态很接近, 意味着四全同费米子系统有可能通过自旋的同向排列取得很强的束缚。 ii) 在目  $0_1^-$  和目  $0_2^-$  态之间存在巨大的能隙。后面将会看到是由于目  $0_2^-$  态中出现了穿越固有节面的运动所致。 iii) 目  $0_1^+$  和  $\text{III}0_1^-$  态的能量都很高。而表1说明这两类态中均不存在图2的结构, 从而证实了前面由固有节面分析所做的推断。

表 2 四体系统四种对称态的能谱

能量单位: MeV

对称性	能谱	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$\square 0^+$		-169.7	-143.4	-124.3
$\square 0^-$		-168.3	-123.1	
$\square 0^+$		-109.7		
$\square 0^-$		-95.65		

## 4.2 结构和内部运动

a) 从计算中发现,  $\square 0^-$  态的最可几结构始终保持  $r_{12} = r_{34}, r_{12} \perp r_{34}, r_{12} \perp oo', r_{34} \perp oo'$  的关系。这使得我们只需在这样一个子空间研究  $\rho_s$  的分布即可弄清体系的结构和内部运动。这时若

$$oo' = \frac{r_{12}}{\sqrt{2}}$$

则构成一个正四面体。若  $oo' = 0$  则构成正方形, 后者在  $0^-$  态是受禁戒的, 在图 3 中给出了  $\square 0_1^-$  态的  $\rho_s$  分布, 其峰值在

$$oo' = \frac{r_{12}}{\sqrt{2}}$$

直线上, 说明该态的最可几结构是一个正四面体 (边长 = 2.59fm)。图中的  $oo' = 0$  是波函数的固有节面, 不过两个波包实际上是孤立的, 因此体系的内部运动仍然只是围绕正四面体的微振动, 与  $\square 0_1^+$  态的内部运动极为相似<sup>[2]</sup>, 难怪它们有如此相近的能量。

$\square 0_2^-$  态的  $\rho_s$  分布在图 4 给出。 $oo'$  为正和为负的两个区域内都各有两个峰, 主峰在

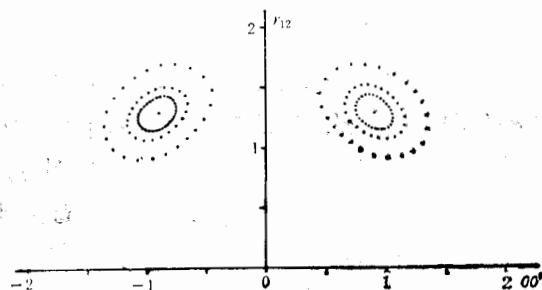


图 3 在保持  $r_{12} = r_{34}, r_{12} \perp r_{34}, r_{12} \perp oo'$  及  $r_{34} \perp oo'$  条件下  $\square 0_1^-$  态  $\rho_s$  在  $r_{12}, oo'$  平面分布等高线图。三条等高线分别是峰值的 76%, 56% 和 16% (以下各图均同)。

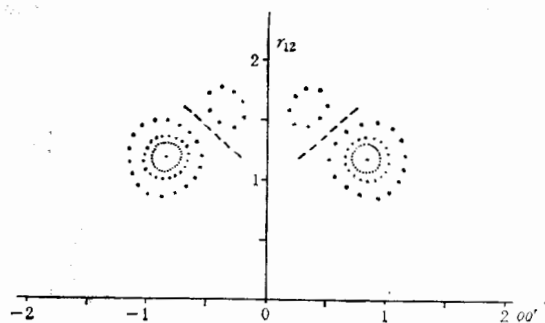
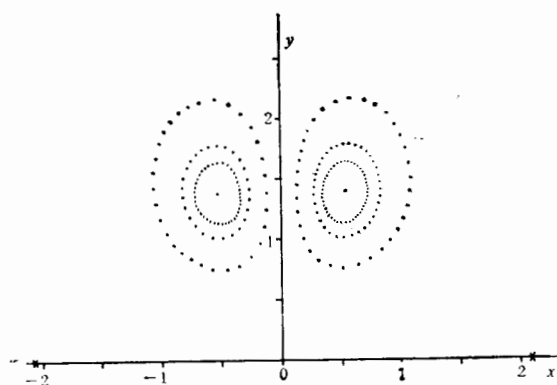


图 4

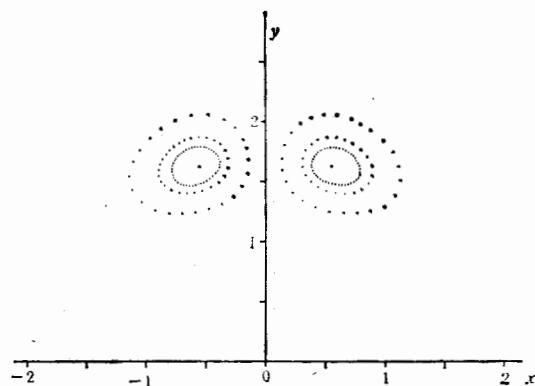
说明同图 3, 但指  $\square 0_2^-$  态, --- 是波函数的节线。

$$oo' = \frac{r_{12}}{\sqrt{2}}$$

直线上, 因此该态仍以正四面体为主 (边长 2.38fm)。图中的三根节线 (含  $oo' = 0$  的情况) 表明存在剧烈的  $oo'$  振动, 使得总能量远高于  $\square 0_1^-$  态。

图5 目 $0_1^+$ 态形状密度分布图

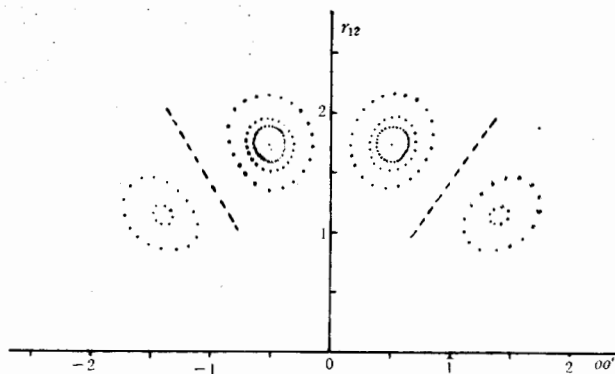
定义  $\sqrt{x^2 + y^2} = r_{34}/2$ . 粒子 1,2 位于  $x$  轴上用  $\times$  号表示.  $oo'$  取最可几值( $=0$ ).

图6  $0_1^-$ 态形状密度分布图

其中  $r_{12} \perp oo'$ ,  $r_{34} \perp oo'$ .  $r_{12} = r_{34}$ ,  $oo'$  取最可几值  $1.04$ ,  $\sqrt{x^2 + y^2} = r_{34}/2$ . 粒子 1,2 在  $x$  轴上坐标为  $(r_{12}/2, 0)$  和  $(-r_{12}/2, 0)$ .

b) 在目  $0_1^+$  态中, 由于出现了图 2 那样的固有节面, 不再有  $r_{12} \perp r_{34}$ , 但仍然保持  $r_{12} \perp oo'$  和  $r_{34} \perp oo'$ . 从计算中发现  $\rho_r$  的最大值在  $oo' = 0$  的平面内, 表明该态以共面结构为主. 因此在图 5 中给出了  $oo' = 0$  时  $\rho_r$  的分布. 由于  $r_{12} \perp r_{34}$  对总势是有利的, 但同时又是受对称性禁戒的. 结果不可避免地出现  $r_{34}$  围绕图 5 中  $y$  轴的回摆动. 体系的最可几结构则是一个平行四边形(两对角线长度为  $4.38$  和  $2.95\text{fm}$ , 夹角为  $50.25^\circ$ ).

c) 与目  $0_1^+$  态一样, 在  $0_1^-$  态中由于出现了图 2 的固有节面而不再有  $r_{12} \perp r_{34}$ , 并出现了  $r_{34}$  相对于  $r_{12}$  的摆动. 也仍然有  $r_{12} \perp oo'$  和  $r_{34} \perp oo'$ , 而且还保持  $r_{12} = r_{34}$ . 目  $0_1^+$  态的计算结果告诉我们, 出现图 2 的节面时对总能量最有利的选择是使  $oo'$  为零. 但对于  $0_1^-$  态来说  $oo' = 0$  又是波函数的另一固有节面. 结果该态的  $oo'$  最可几值不是零而是  $1.04\text{fm}$ , 并出现了沿  $oo'$  的振动, 能量本征值也略高于目  $0_1^+$  态. 图 6 的  $\rho_r$  分

图7  $0_1^-$ 态形状密度分布图

其中  $r_{12} \perp oo'$ ,  $r_{34} \perp oo'$ ,  $r_{12} = r_{34}$ , 而  $r_{12}$  和  $r_{34}$  的夹角取最可几值  $19.5^\circ$ .

布表明了  $r_{34}$  相对于  $r_{12}$  摆动的存在。图 7 表明了沿  $oo'$  振动的存在。因此  $0^+$  态的内部运动是  $r_{34}$  相对于  $r_{12}$  摆动和沿  $oo'$  振动的耦合。

## 5 总结和结论

从上述的计算结果我们发现,对于每一种对称性的最低能态,能级的高低、最可几结构和内部运动模式都可以从简单的总势分析和固有节面结构的分析而得到。对于全同粒子系,对总势有利的结构是具有几何对称的结构。因此体系往往倾向于几何对称的结构。但由于对称性的要求,在波函数中有可能出现固有节面,若波函数中根本没有固有节面( $0^+$ 态)或固有节面偏离对总势最有利的结构( $0^-$ 态),体系将保持对称结构,而最低能态的运动则是围绕对称结构作为平衡位置的微振动。另一种情况是具有几何对称性的结构恰为波函数的固有节面(如目  $0^+$ 态和  $0^-$ 态),此时体系只能处在不规则的结构并出现穿越固有节面的运动,导致状态具有很高的能量。因此从一定的意义上讲,对称性对体系的几何结构、内部运动模式具有决定性意义。

## 参 考 文 献

- [1] 阮文英、鲍诚光,高能物理与核物理,18(1994)74.
- [2] P. J. Li, C. G. Bao and T. K. Lim, *Few-Body Systems*, 9(1990), 11.
- [3] Y. P. Gan, M. Z. Gong, Z. E. Wo and C. G. Bao *Computer Phys. Comm.*, 34(1985) 387.

## The Effect of Symmetry on Structures And Internal Motions of a 4-Body System

Ruan Wenying

(Huanan Science and Technology University, Guangzhou 510641)

Bao Chengguang

(Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received on December 14, 1992

### Abstract

The Schrödinger equation of a 4-body model system has been solved by using harmonic oscillator product states. The distribution of the wave functions and the shape-density functions in the multi-dimensional coordinate space has been investigated. A comparison has been made among the structures and internal motions of the totally symmetric states  $0^+$ ,  $0^-$  and totally antisymmetric states  $0^+$ ,  $0^-$ . The effect of symmetry has been discussed.

**Key words** few-body; system 4-body problem, symmetry, geometric structure, modes of internal motion.