

# 过渡区原子核低激发态的解析研究\*

王保林

(淮阴师专物理系 江苏 223001)

1992年4月25日收到

## 摘 要

本文对 sd IBM-1 多极展开的 Hamiltonian,  $H = \epsilon \hat{n}_d + a_2 Q \cdot Q + a_1 L \cdot L + a_0 P^+ P$  的矩阵元, 采用  $1/N$  展开技术计算到第一层次, 解析研究了  $\epsilon \hat{n}_d$  和  $a_0 P^+ P$  两项对过渡区原子核低能谱结构的影响, 并与 PHINT 程序计算的数值结果进行了比较, 表明对过渡区原子核的低激发态性质, 可用近似的解析公式计算.

**关键词**  $SU(5) \rightarrow SU(3)$  和  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  过渡, 多极哈密顿,  $\epsilon \hat{n}_d$  和  $a_0 P^+ P$ , 解析计算.

## 1 引 言

相互作用玻色子模型 (IBM)<sup>[1]</sup>, 作为一种简单的代数模型, 在统一研究原子核的几种不同的集体运动方面, 得到了广泛的应用<sup>[2]</sup>. 在实际应用中, 其 Hamiltonian 通常写成多极展开形式<sup>[3]</sup>

$$H = \epsilon \hat{n}_d + a_0 P^+ P + a_1 L \cdot L + a_2 Q \cdot Q + a_3 T_3 \cdot T_3 + a_4 T_4 \cdot T_4, \quad (1)$$

其中  $\hat{n}_d$  为 d 玻色子数算符,

$$P = \frac{1}{2} (\tilde{d}^2 - s^2),$$

$$L = \sqrt{10} (d^+ \tilde{d})^{(1)},$$

$$Q = (d^+ s + s^+ \tilde{d}) - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^+ \tilde{d})^{(2)},$$

$$T_l = (d^+ \tilde{d})^{(l)}, \quad (l = 3, 4). \quad (2)$$

而  $a_3 T_3 \cdot T_3$  和  $a_4 T_4 \cdot T_4$  两项常常可以不予考虑<sup>[2]</sup>. 在此 Hamiltonian 下, 存在三种极限情况的解析解. 而大多数核处在这三个极限之间的某个过渡区域. 在极限附近时, 可用微扰论的方法进行近似的解析计算, 对一般的过渡核, 多采用 PHINT 程序<sup>[3]</sup>进行数值计算. S. Kuyucak 和 I. Morrison 提出的  $1/N$  展开技术 (ONET)<sup>[4]</sup>, 给出了一套

\* 江苏省教委自然科学基金和青年科学基金资助.

比较精确的解析方案。本文采用 ONET, 对(1)式中的前四项, 统一展开计算到第一层次, 重点讨论  $\varepsilon \hat{A}_d$  和  $a_0 P^+P$  两项对过渡核能谱结构的影响, 进而研究它们在  $SU(5) \rightarrow SU(3)$  和  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  两个过渡区的应用。除特别说明外, 本文所用的符号均与文献[4]相同。

## 2 Hamiltonian 矩阵元与本征模方程

根据文献[4,5]的分析,  $N$ 个  $s, d$  玻色子体系的基带内禀态可取为

$$|\phi_g\rangle = (b^+)^N |-\rangle. \quad (3)$$

$\beta, \gamma$  带 ( $K=0, 2$ ) 内禀态的一般形式为

$$|\phi_K\rangle = \left[ (b^+)^{N-1} b_K^+ + (b^+)^{N-2} \sum_m \xi_m^K b_m^+ b_{K-m}^+ \right] |-\rangle. \quad (4)$$

式中的  $b^+$  和  $b_K^+$  分别为内禀玻色子基态和激发态的产生算符, 第二项为单、双声子激发的混合项, 对能量计算, 此项的贡献可以不计, 而对电磁跃迁则往往是不可忽略的<sup>[4]</sup>。(1)式中的  $a_1 L \cdot L$  项对内禀态没有影响, 讨论时先略去此项, 在最后计算能谱的公式中加上  $a_1 L(L+1)$  即可。这样可将 Hamiltonian 简化成

$$H = a_2 \left( Q \cdot Q + \frac{\varepsilon}{a_2} \hat{A}_d + \frac{a_0}{a_2} P^+P \right). \quad (5)$$

按照 ONET 的计算步骤, 经过复杂的推导, 得到(5)式的矩阵元展开到第一层次时, 基带:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{g,L} = a_2 N^2 & \left\{ A^2 + \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} W_0 \right. \\ & + \frac{1}{N} \left[ A^2 - \frac{D_1}{2y} + C + \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} \left( W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) \right] \\ & \left. + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left[ -A^2 + \frac{D_1}{4y} - \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} \left( -W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

其中

$$G = \sum_i \alpha_i \chi_i^2 \quad (\alpha_0 = -1, \alpha_2 = 1), \quad (7)$$

$$W_0 = \sum_i \varepsilon_i \chi_i^2 / a_2, \quad W_1 = \sum_i \varepsilon_i \bar{L} \chi_i^2 / a_2 \quad (\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_2 = \varepsilon). \quad (8)$$

$\beta$  带的矩阵元:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\beta,L} = a_2 N^2 & \left\{ A^2 + \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} W_0 \right. \\ & + \frac{1}{N} \left[ -A^2 + 2AA' + 2B'^2 - \frac{D_1}{2y} + C - \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{a_0}{a_2} G'^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{N} \left( W' - W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\bar{L}}{yN^2} \left[ -A^2 + \frac{D_1}{4y} - \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} \left( -W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \}. \quad (9)$$

$$G' = \sum_i a_i \chi_i \chi'_i, \quad (10)$$

$$W' = \sum_i \varepsilon_i \chi_i^2 / a_2. \quad (11)$$

$\gamma$  带的矩阵元

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\gamma, L} = & a_2 N^2 \left\{ A^2 + \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} W_0 \right. \\ & + \frac{1}{N} \left[ -A^2 + 2AA(2) + 2B^2(2) - \frac{D_1}{2y} + C - \frac{a_0}{4a_2} G^2 \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{N} \left( W(2) - W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left[ -A^2 + \frac{D_1}{4y} - \frac{a_0}{4a_2} G^2 + \frac{1}{N} \left( -W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$W(2) = \sum_i \varepsilon_i \chi_{i2}^2 / a_2. \quad (13)$$

因为  $\varepsilon \hat{n}_d$  为单体算符, 其矩阵元的层次与其余两项有区别.

内禀参数由(6)、(9)和(12)式变分确定. 变分后得到的基带内禀参数满足的本征模方程为

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i \chi_i + 2a_2(N+1)A \sum_j \bar{q}_{ji} \chi_j + \frac{a_0}{2}(N+1)G\alpha_i \chi_i \\ - a_2 \sum_j h_{ji}^{(1)} \chi_j - a_2 \frac{\bar{L}}{N} \sum_j h_{ji}^{(2)} \chi_j = e \chi_i. \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \frac{5a_2}{2l+1} \sum_j q_{ji}^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} h_{ji}^{(1)} = & \frac{A}{2y} j \bar{q}_{ji} + \frac{1}{2y} (\bar{l}A - 6A + 2A_1) \bar{q}_{ji} \\ & + \left[ \frac{D_1}{2y} + \frac{1}{N} \left( \frac{W_1}{2y} - \frac{\varepsilon_l}{a_2} \right) \right] \left( 1 - \frac{\bar{l}}{2y} \right) \delta_{ji}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ji}^{(2)} = & -\frac{A}{4y^2} j \bar{q}_{ji} - \frac{1}{4y^2} (\bar{l}A - 8yA - 6A + 2A_1) \bar{q}_{ji} \\ & + \left[ \frac{A^2}{y} - \frac{D_1}{2y^2} - \frac{1}{yN} \left( \frac{W_1}{y} - \frac{\varepsilon_l}{a_2} - W_0 \right) \right] \left( 1 - \frac{\bar{l}}{2y} \right) \delta_{ji} \\ & + \frac{a_0}{4a_2} \left[ \frac{2G\alpha_l}{y} + \frac{G^2}{y} \left( 1 - \frac{\bar{l}}{2y} \right) \right] \delta_{ji}. \quad (17) \end{aligned}$$

对激发带的内禀参数, 近似地取激发带中基态玻色子 ( $b^+$ ) 的参数 ( $\chi_j$ ) 为基带内禀态

的解,略去(9)式中含 $\chi_i$ 的项后,对 $\chi_i$ 变分,得到 $\beta$ 带的本征模方程为

$$\varepsilon_i \chi_i + 2a_2 \left( A \sum_j \bar{q}_{ij} \chi_j + B' \sum_j \bar{q}_{ij} \chi_j \right) + a_0 G' \alpha_i \chi_i = c' \chi_i. \quad (18)$$

而略去(12)式中含 $\chi_{j_2}$ 的项,对 $\chi_{j_2}$ 变分,得到 $\gamma$ 带的本征模方程为

$$\varepsilon_i \chi_{i_2} + 2a_2 \left( A \sum_j \langle j_2 l - 2 | 20 \rangle q_{ij} \chi_{j_2} + B(2) \sum_j \langle l_2 j_0 | 22 \rangle q_{ij} \chi_{j_2} \right) = c_2 \chi_{i_2}. \quad (19)$$

在选定的参数下,对上述本征模方程进行数值求解是很方便的。由此即可计算能谱和电磁跃迁等。为了检验上述结果的可靠性,近似地将 $SU(3)$ 极限内禀态<sup>[4,5]</sup>代入基带矩阵元,可得到系统的转动惯量为

$$\frac{1}{2I} = a_1 + \frac{3}{8} a_2 - \frac{1}{72} a_0 + \frac{\varepsilon}{6N}. \quad (20)$$

这和相同的 Hamiltonian 在 $SU(3)$ 的 $(\lambda, \mu) = (2N, 0)$ 表示的波函数下计算的结果<sup>[6]</sup>,差别只在 $\frac{1}{N}$ 项上。

### 3 对过渡区原子核的计算

在本文讨论的 Hamiltonian 中,  $\varepsilon \hat{n}_d, a_2 Q \cdot Q$  和  $a_0 P^+ P$  分别代表了 IBM-1 的  $SU(5), SU(3)$  和  $SO(6)$  三种极限的主要能谱特征。以  $SU(3)$  极限为出发点, 在  $SU(5) \rightarrow SU(3)$  过渡区, 能谱结构变化的主要特征是激发能之比  $R = E_x(4_1^+)/E_x(2_1^+)$ , 从  $2(SU(5)$  极限)  $\rightarrow \frac{10}{3}(SU(3)$  极限)。从上一节的 Hamiltonian 矩阵元可以看出,  $\varepsilon \hat{n}_d$  具有改变转动带能级间距离和激发能之比的作用, 其影响大小取决于  $\varepsilon/a_2 N$ , 通过  $\varepsilon/a_2 N$  的改变, 将可以描述  $SU(5) \rightarrow SU(3)$  的相变, 即振动-转动相变。而在  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  过渡区, 能谱结构的主要特征是: 在  $SU(3)$  极限,  $\beta, \gamma$  带是简并的, 偏离  $SU(3)$  时,  $\beta$  带带头在  $\gamma$  带带头之上, 从 (9) 式和 (12) 式的比较可以看出, (9) 式中的  $\frac{a_0}{a_2} G'^2$  项的意义就在于此, 通过  $a_0/a_2$  的调节, 将直接改变  $\beta, \gamma$  带带头的相对位置, 从而实现  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  的过渡, 即轴对称转子- $\gamma$  不稳转子相变。

#### 3.1 Sm 同位素

Sm 同位素具有典型的振动-转动相变的特性, 文献[3]对其能谱、 $E_2$  跃迁性质等进

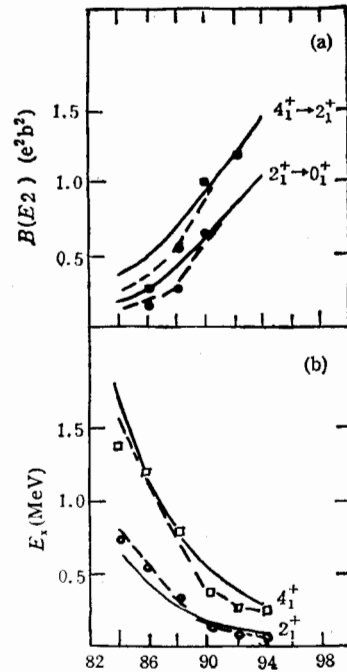


图1 Sm 同位素的振动-转动相变

— 为本文的计算结果,  
 ---- 为文献[3]的结果,  
 ■ ● □ ○ 为实验值

行了全面的数值计算,他们所用的参数是:  $a_0 = 0$ ,  $a_2 = -0.039\text{MeV}$ ,  $a_1 = 0.006\text{MeV}$ , 而  $\varepsilon$  随中子玻色子数  $N_b$  的增加而减小

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \theta N_b, \quad (21)$$

$\varepsilon_0 = 1.26\text{MeV}$ ,  $\theta = 0.17\text{MeV}$ , 这和文献[7]用微观方法得到的参数非常接近. 将这些参数代入(14)、(18)和(19)式,数值求解内禀参数,即可由(6)、(9)和(12)式,对能谱进行解析计算. 图1(b)给出  $5m$  同位素的  $2_1^+$  和  $4_1^+$  态的能谱计算结果. 另外,还用文献[4]给出的  $E2$  跃迁约化矩阵元,采用与文献[3]相同的有效电荷  $e_2 = 0.1279eb$ , 计算了  $B(E2, 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$  和  $B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$  (图1(a)). 在  $SU(3)$  区域,即  $N$  比较大时,结果与文献[3]的 PHINT 程序计算的数值结果很接近;而在  $SU(5)$  区域,有系统的偏差,这是由 ONET 本身的局限性造成的. 整体的相变特征还是表现得很清楚的.

### 3.2 $^{168}\text{Er}$

$^{168}\text{Er}$  是  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  过渡区的典型核素,实验数据极为丰富. D. D. Warner 和 R. F. Casten<sup>[8]</sup> 等根据其偏向  $SO(6)$  极限的特点,采用  $\varepsilon = 0$ ,  $a_2 = -0.008\text{MeV}$ ,  $a_1 = 0.0105\text{MeV}$ ,  $a_0 = 0.03\text{MeV}$ , 对其作了全面系统的研究. H. Schaaser 等<sup>[9]</sup> 用完全相同的参数,在内禀态下做过自洽的推转计算. 用这些参数,计算的结果见表1,结果是很满

表1  $^{168}\text{Er}$  的能谱

带	态	EXP	CF	PHINT	ONET
g	$2^+$	80	78	79	79
	$4^+$	264	260	264	265
	$6^+$	549	547	555	556
	$8^+$	928	937	952	952
$\gamma$	$2^+$	821	807	803	826
	$3^+$	896	885	882	906
	$4^+$	995	989	988	1012
	$5^+$	1118	1119	1120	1144
	$6^+$	1264	1276	1278	1303
	$0^+$	1217	1110	1122	1199
$\beta$	$2^+$	1276	1188	1202	1278
	$4^+$	1411	1370	1387	1464
	$6^+$	1617	1657	1679	1755

表2  $\beta, \gamma$  带带头随  $a_0$  的变化情况

$a_0(\text{MeV})$	$2_1^+(\text{CF})$	$2_1^+(\text{PHINT})$	$2_1^+(\text{ONET})$	$0_2^+(\text{CF})$	$0_2^+(\text{PHINT})$	$0_2^+(\text{ONET})$	$I(\text{CF})$	$I(\text{ONET})$
-0.03	0.860	0.889	0.891	0.366	0.421	0.459	36.79	35.01
0.0	0.823	0.825	0.849	0.691	0.744	0.768	38.08	37.04
0.03	0.807	0.803	0.826	1.110	1.122	1.199	38.41	37.78
0.06	0.799	0.790	0.815	1.548	1.808	1.663	38.54	38.12
0.12	0.791	0.777	0.801	2.437	2.773	2.601	38.65	38.46
1.0	0.779	0.757	0.784	15.622	17.694	16.656	38.81	38.86

意的。此外,还计算了在  $N = 16$ ,  $a_2 = -0.008\text{MeV}$ ,  $a_1 = 0.0105\text{MeV}$  保持不变的情况下,随着  $a_0$  的改变,  $\beta, \gamma$  带带头的变化情况,以及转动惯量的变化,其结果与 PHINT 以及推转计算 (CF) 的结果 (表 2) 都是很接近的。因此,在  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  过渡区, ONET 的第一层次有很高的精度。

## 4 小 结

IBM 对过渡区的许多原子核低激发态进行过计算,大多采用 PHINT 程序,对能谱结构及其它物理量的分析,一般只能以数值结果加以说明。本文的解析结果,可以很清楚地看出多极形式 Hamiltonian 中各项对能谱结构的影响,特别是偏离  $SU(3)$  极限时,  $\epsilon\hat{n}_d$  和  $a_0P^+P$  的行为,并且在定量上给出与 PHINT 程序相近的结果。从这个意义上讲,本文给出了一套 sd IBM-1 描写过渡区原子核的近似解析方法,在  $N$  比较大时,精确度是很高的。

作者感谢吴华川教授的讨论和帮助。

## 参 考 文 献

- [1] A.Arima and F. Iachello, *Ann. Phys.*, **99**(1976)253; **111**(1978)201; **123**(1979)468.
- [2] R.F. Casten and D.D. Warner, *Rev. Mod. Phys.*, **60**(1988)389.
- [3] O. Scholten, F. Iachello and A. Arima, *Ann. Phys.*, **115**(1978)325.
- [4] S.Kuyucak and I. Morrison, *Ann. Phys.*, **181**(1988)79.
- [5] H.C.Wu et al., *Phys. Rev.*, **C34**(1986)703.
- [6] N.Yoshida et al., *Phys. Lett.*, **B241**(1990)459.
- [7] T. Otsuka et al., *Phys. Lett.*, **B215**(1988)205.
- [8] D.D. Warner and F.R. Casten., *Phys. Rev.*, **C24**(1981)1713.
- [9] H. Schaaser et al., *Phys. Lett.*, **B143**(1984)269.

## Analytical Study of Low-Lying States in the Transitional Regions

Wang Baolin

(Huaiyin Teachers College, Jiangsu 223001)

Received on April 25, 1992

### Abstract

By utilizing the  $1/N$  expansion technique, the d-boson energy  $\epsilon\hat{n}_d$  and the pairing interaction  $a_0P^+P$  are discussed for the sd Interacting Boson Model. Sm isotopes and  $^{168}\text{Er}$  are studied. The analytical results are compared with the published results calculated from the program PHINT.

**Key words**  $SU(5) \rightarrow SU(3)$  and  $SU(3) \rightarrow SO(6)$  transitions, multipole Hamiltonian,  $\epsilon\hat{n}_d$  and  $aP^+P$ , analytical calculation.