三维精确可解格点模型[1)]

胡占宁
(西北大学现代物理研究所　西安　710069)

1993年10月12日收到

摘　　要

对 Baxter-Bazhanov 三维精确可解格点模型玻尔兹曼权 S_k 间的变换关系作了仔细讨论,并给出了局域可积性条件——三维星-星关系的一个完整证明.

关键词 Baxter-Bazhanov 模型权函数 S_k, 三维星-星关系.

1 引　　言

近年来，关于二维精确可解模型的研究已相当深入且普遍，并建立了一整套研究方案[1]. 如何把这些精确可解模型及其对应的研究方案推广到三维或更高维情形是理论物理及数学物理学家们长期感兴趣的问题之一[2]. 早在十年前，作为星-三角关系的推广，Zamolodchikov 就研究了三维情况下的可积性条件——四面体方程[3]，并用以给出可因式化的 S 矩阵. 最近，Baxter 和 Bazhanov 提出了一种新的三维精确可解格点模型[4]，该模型包括了 Zamolodchikov 的三维模型,并且，猜测性地提出了作为局域可积性条件的三维星-星关系. 本文对这一关系给出了一个完整证明，并仔细讨论了权函数 S_k 间的变换关系.

全文由四部分组成. 第二部分对 Baxter-Bazhanov 三维精确可解模型作了简单描述. 关于权函数 S_k 间变换关系的讨论在第三部分给出. 最后给出三维星-星关系的一个完整证明,从而验证了 Baxter 和 Bazhanov 的猜想.

2　Baxter-Bazhanov 三维精确可解模型

对于由图1所示的平行六面体 $\mathscr{P}$, 其玻尔兹曼权可写为:

$$S(P,P',Q,Q'|\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\prod_{i=1}^{n}V(\delta_i|\alpha_i,\gamma_i,\delta_{i+1}|\gamma_{i+1},\alpha_{i+1},\beta_i|\beta_{i+1})|_{p_i,p'_i,q_i,q'_i}, \tag{2.1}$$

这里，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n),\cdots$, 等表示平行六面体 $\mathscr{P}$ 所含立方体各顶角处的自旋取值,它可以取N个不同的值: $0,1,2,\cdots N-1$. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 分别位于平行六

1) 本工作完成后,作者发现 Kashaev 等[5]用另外的方法对三维星-星关系作了证明.

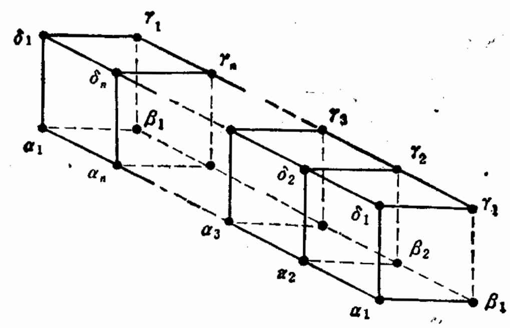

图 1　由 n 个立方体组成且具有周期性边界的平行六面体 $\mathscr{P}$

面体的各边上,并满足周期性边界条件: $\alpha_{n+1}=\alpha_1$, $\beta_{n+1}=\beta_1$, $\gamma_{n+1}=\gamma_1$, $\delta_{n+1}=\delta_1$; 谱参数 $P=(p_1,\cdots,p_n)$, $P'=(p_1',\cdots,p_n')$, $\cdots$, 等分别给出 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 中代数曲线上的一个点,该代数曲线为:

$$p_{i+1}^N=(k_{22}^{(i)}p_i^N+k_{21}^{(i)})/(k_{12}^{(i)}p_i^N+k_{11}^{(i)}),\ i=1,\cdots,n-1. \tag{2.2}$$

其余三个方程可由上式分别通过变换: $p_i\to p_i'$, $p_i\to q_i$, $p_i\to q_i'$ 而得到. 函数 $V(\delta_i,\cdots,\beta_{i+1})|_{p_i,\cdots,q_i'}$ 为顶角上自旋分布为 $\delta_i,\cdots,\beta_{i+1}$、对应谱参数为 p_i,p_i',q_i,q_i' 的立方体所对应的玻尔兹曼权. 采用标记

$$\omega=\exp(2\pi i/N),\quad \omega^{1/2}=\exp(\pi i/N); \tag{2.3}$$

$$s(k,l)=\omega^{kl},\qquad \Phi(k)=(\omega^{1/2})^{k(N+k)}, \tag{2.4}$$

并定义函数:

$$W(x,l)/W(x,0)=(\Delta(x))^l\prod_{k=1}^{l}(1-\omega^k x)^{-1},\ \Delta(x)=(1-x^N)^{1/N},\ l=0, \tag{2.5}$$

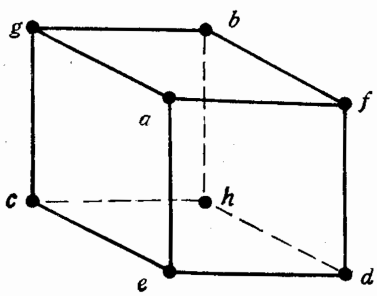

图 2　自旋分布为 $a,\dots,h$ 的立方体

函数 V 可定义为(如图 2 所示):

$$V(a|efg|bcd|h)|_{p,p',q,q'}=\sum_{\sigma=0}^{N-1}v_\sigma(a|efg|bcd|h)|_{p,p',q,q'}, \tag{2.6}$$

其中,

$$\begin{aligned}v_\sigma(a|efg|bcd|h)_{p,p',q,q'}&=W_{p'p}(e-c-d+h)\\&\times W_{p'p}^{-1}(a-g-f+b)\\&\times s(c-h,d-h)s(g,a-g-f+b)\\&\cdot\{W_{p'p}^{-1}(e-c-\sigma)W_{pq}(d-h-\sigma)W_{q'p}(\sigma-f+b)\widetilde{W}_{p'q'}(a-g-\sigma)\\&\cdot s(\sigma,a-c-f+h)\},\end{aligned} \tag{2.7}$$

这里 $W_{pq}^{-1}(l)$ 表示 $1/W_{pq}(l)$, 而

$$W_{pq}(k)=W(p/q,k),\ \widetilde{W}_{pq}(k)=\Phi(k)W(p/q,k). \tag{2.8}$$

当平行六面体 $\mathscr{P}$ 中所含立方体的个数 n 与自旋取值个数 N 互质时,若谱参数 p_i,p_i',q_i,q_i' $(i=1,2,\cdots,n)$ 所构成的函数 $\Gamma(p_i,p_i',q_i,q_i')$ 与 i 无关,其中, Γ 定义为:

$$\Gamma(p,p',q,q')=-(p^N-q^N)(p'^N-q'^N)/[(p^N-q'^N)(p'^N-q^N)]. \tag{2.9}$$

可以证明[4]，玻尔兹曼权 S 满足 Yang-Baxter 关系

$$\sum_{\sigma} S(P,P',Q,Q'|\alpha,\beta,\gamma,\sigma)S(P,P',R,R'|\sigma,\gamma,\delta,\varepsilon)S(Q,Q',R,R'|\alpha,\sigma,\varepsilon\kappa)$$

$$=\sum_{\sigma} S(Q,Q',R,R'|\beta,\gamma,\delta,\sigma)S(P,P',R,R'|\alpha,\beta,\sigma,\kappa)$$

$$\times S(P,P'Q,Q'|\kappa,\sigma,\delta,\varepsilon). \tag{2.10}$$

此式保证了三维 Baxter-Bazhanov 可解格点模型的 transfer 矩阵的对易性.

3　权函数 S_k 间的变换关系

不失一般性，可以假定，$(l-1)N<n\leqslant lN$，其中 l 为整数，则由(2.1)式所定义的玻尔兹曼权 S 可写为：

$$S=(n-l+1)\sum_{k=0}^{lN-n} S_k+(n-l)\sum_{k=lN-n+1}^{N-1} S_k, \tag{3.1}$$

其中：

$$S_k=\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n=0}^{N-1}\prod_{i=1}^{n} v_{\sigma_i}^{(i)}; \sigma_1+\cdots+\sigma_n=k, \tag{3.2}$$

并满足 $S_{k+N}=S_k$. 在上式中，未写出所有与 S, S_k 等有关的参数，并把平行六面体 $\mathscr{P}$ 中与第 i 个立方体所对应的 v_σ 函数(见式(2.7))写为 $v_{\sigma_i}^{(i)}$. 注意，对任一函数序列 f_i，我们约定 $\sum_{i=a>b}^{b} f_i=0$. 这样，玻尔兹曼权 S 就由权函数 S_k $(0\leqslant k<N)$ 表示出来. 为研究这些 S_k 间的变换关系，先给出下述定理.

定理：两个互质数的整数倍之和可表示出任意整数. 也就是说，若 a、b 互质，则 $ma+nb$ 可表示出所有整数，其中 m,n 为整数. 考虑到：$a,2a,3a,\cdots,(b-1)a$ 除以 b 的余数各不相同，这一定理容易得到证明. 实际上，该定理的逆定理也成立.

由于 N 与 n 互质，并且 $S_{k+N}=S_k$，从上面的定理知，S_k 总可以写为 $S_{\rho k'}$ 的形式，其中 $\rho=-n(\mathrm{mod}N)$，下面将给出 k' 的具体表达式. 令：

$$N(\mathrm{mod}\ n)=a_0,\ n(\mathrm{mod}\ a_0)=b_0,\ (0<a_0<n,\ 0\leqslant b_0<a_0), \tag{3.3}$$

$$a_0=m_0b_0+t_0,\ (0\leqslant t_0<b_0), \tag{3.4}$$

其中 m_0, t_0 为整数. 注意到 N,n 互质，如果 $t_0\neq 1$ 或 b_0-1，则进一步令：

$$a_{i+1}=b_i-t_i,\ b_i=m_i'a_{i+1}+b_{i+1},\ a_{i+1}=m_{i+1}b_{i+1}+t_{i+1},\ (i=0,1,2,\cdots) \tag{3.4'}$$

其中，$0\leqslant b_{i+1}<a_{i+1}$，$0\leqslant t_{i+1}<b_{i+1}$，$m_j'$、$m_{j+1}$ 为整数，就可使得某一级量 $t_j=1$ 或 b_j-1，这是由于 $0\leqslant b_{i+1}\leqslant b_i-3$. 令

$$M_i=-\begin{pmatrix} m_i'-1 & m_{i+1}m_i'-m_{i+1}+1 \\ m_i' & m_{i+1}m_i'+1 \end{pmatrix},\ (i=0,1,\cdots,j-1), \tag{3.5}$$

采用标记 $J=(k_0l_0+1,\ k_0l_0m_0+k_0+m_0)$，可以求得：

$$S_k=S_{\rho k'},\quad \rho=-n(\mathrm{mod}N), \tag{3.6}$$

$$k'=k_0s_0-d_0J\left(\prod_{i=0}^{j-1}M_i\right)I_j, \tag{3.7}$$

这里，$d_0 = k(\mathrm{mod}\, a_0)$，$k_0 = [N/n]$，$l_0 = [n/a_0]$，$s_0 = [k/a_0]$，其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数。当 $t_j = 1$ 时，$I_j = (0,-1)^T$，$t_j = b_j - 1$ 时，$I_j = (1,1)^T$.

4 三维星-星关系

作为局域可积性条件，Baxter 和 Bazhanov 猜测性地提出的三维星-星关系具有形式:

$$\frac{\bar{V}(a|efg|bcd|h)|_{p,p',q,q'}}{V(a|efg|bcd|h)|_{p,p',q,q'}} = \frac{W(z,c-h-g+b)s(g+h,g-b)}{W(z,e-d-a+f)s(a+d,a-f)}, \tag{4.1}$$

其中函数V由(2.6)式给出，而

$$\bar{V}(a|efg|bcd|h)|_{p,\dots,q'} = \sum_{\sigma=0}^{N-1} \bar{v}_\sigma(a|efg|bcd|h)|_{p,\dots,q'},$$

$$\begin{aligned}\bar{v}_\sigma(a|efg|bcd|h)|_{p,\dots,q'} = {} & W_{q'q}(d-h-f+b)W_{q'q}^{-1}(e-c-a+g)s(c,g-a) \\ & \cdot s(h,f-b)\{W_{p'q}^{-1}(\sigma-f+b)W_{pq}(\sigma-a+g)W_{q'p}(e-c-\sigma) \\ & \cdot \widetilde{W}_{p'q'}(\sigma-d+h)s(-\sigma,a-c-f+h)\};\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$z = \exp(-i\pi/N)\cdot(\Gamma(p,p',q,q'))^{1/N}, \tag{4.3}$$

Γ由式(2.9)给出。下面给出三维星-星关系式(4.1)的证明:

首先，式(2.5)可写为:

$$W(x,-l)/W(x,0) = (\Delta(x))^{-l}\prod_{k=1}^{l}(1-\omega^{1-k}x),\ l>0, \tag{4.4}$$

并满足 $W(x,l+N) = W(x,l)$。这里已利用了关系式

$$\prod_{k=1}^{N}(1-\omega^k x) = 1-x^N. \tag{4.5}$$

令: $$a-g=r_1,\ b-f=r_2,\ c-e=r_3,\ d-h=r_4,\ (\mathrm{mod}\, N), \tag{4.6}$$

其中 $0\leqslant r_i<N$ $(i=1,2,3,4)$。由式(2.5)、(4.4)及(4.6)可得:

$$\frac{W_{q'q}(d-h-f+b)}{W_{q'q}(e-c-a+g)} = \frac{W\left(\omega^{-r_1-r_3}q'/q,\ \sum_{i=1}^{4} r_i\right)}{W(\omega^{-r_1-r_3}q'/q,0)},$$

$$\frac{W_{p'p}(a-g-f+b)}{W_{p'p}(e-c-d+h)} = \frac{W\left(\omega^{-r_3-r_4}p'/p,\ \sum_{i=1}^{4} r_i\right)}{W(\omega^{-r_3-r_4}p'/p,0)}. \tag{4.7}$$

利用式(2.4)、(2.5)、(4.4)及(2.8)，并记

$$\bar{v}_\sigma|_W = W_{p'q}^{-1}(\sigma+r_2)W_{pq}(\sigma-r_1)W_{q'p}(-r_3-\sigma)W_{p'q'}(\sigma-r_4), \tag{4.8a}$$

$$\begin{aligned}v_\sigma|_W = {} & W_{p'q}^{-1}(\sigma-r_1-r_3-r_4)W_{pq}(\sigma-r_1)W_{q'p}(r_1+r_2+r_4-\sigma) \\ & \times W_{p'q'}(\sigma-r_4),\end{aligned} \tag{4.8b}$$

我们有:

$$\frac{\begin{array}{c}\sum_{\sigma} W_{p'q}^{-1}(\sigma-f+b)W_{pq}(\sigma-a+f)W_{q'p}(e-c-\sigma)\widetilde{W}_{p'q'}(\sigma-d+h)\\ \times s(-\sigma,a-c-f+h)\end{array}}{\begin{array}{c}\sum_{\sigma} W_{p'q}^{-1}(e-c-\sigma)W_{pq}(d-h-\sigma)W_{q'p}(\sigma-f+b)\widetilde{W}_{p'q'}(a-g-\sigma)\\ \times s(\sigma,a-c-f+h)\end{array}}$$

$$= s(r_1+r_4,c+f-a-h) \cdot \frac{\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{\sigma^2/2}s(\sigma,c+f-a-d)\bar{v}_{\sigma}|_W}{\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{\sigma^2/2}s(\sigma,c+f-a-d)v_{\sigma}|_W}. \tag{4.8c}$$

由式(2.4)及(4.6)可以证明:

$$\frac{s(h,r_4-r_2)s(r_1+r_4,c+f-a-h)}{s(c,r_1+r_4)s(g,r_1+r_2)} = \frac{s(a,r_3-r_1)s(b+r_1,r_1+r_4)}{s\left(a,\sum_{i=1}^{4}r_i\right)s(d,r_1+r_2)} = \frac{s(g+h,g-b)}{s(a+d,a-f)}, \tag{4.9}$$

于是,考虑到式(2.6)、(2.7)及(4.2),式(4.1)可写为:

$$\frac{W\left(\omega^{-r_1-r_3}q'/q,\ \sum_{i=1}^{4}r_i\right)W\left(\omega^{-r_3-r_4}p'/p,\ \sum_{i=1}^{4}r_i\right)\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{\sigma^2/2}s(\sigma,c+f-a-d)\bar{v}_{\sigma}|_W}{W(\omega^{-r_1-r_3}q'/q,0)W(\omega^{-r_3-r_4}p'/p,0)\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{\sigma^2/2}s(\sigma,c+f-a-d)v_{\sigma}|_W}$$

$$= \frac{W(z,c-h-g+b)}{W(z,e-d-a+f)}, \tag{4.10}$$

这里 $\bar{v}_{\sigma}|_W$ 及 $v_{\sigma}|_W$ 分别由式 (4.8a)、(4.8b) 给出. 从而关于三维星-星关系式(4.1)的证明就转化为对式(4.10)的证明.

利用式(2.5)、(4.4)及(4.6)可以得到:

$$\frac{W(z,c-h-g+b)}{W(z,e-d-a+f)} = (\Delta(z))^{-r}\prod_{k=1}^{r}(1-\omega^{1-k+e+f-a-d}z), \tag{4.11}$$

这里已令:

$$-\sum_{i=1}^{4}r_i = r(\operatorname{mod} N),\ 0 \leqslant r < N. \tag{4.12}$$

用 $W_{pq}(-r_1)W_{p'q'}(-r_4)W_{p'q}^{-1}(r_2)W_{q'p}(-r_3)$ 除以(4.10)式左边项的分子及分母并利用关系式:

$$\frac{W(x,l_1)}{W(x,l_2)} = \frac{W(\omega^{l_2}x,l_1-l_2)}{W(\omega^{l_2}x,0)}. \tag{4.13}$$

式(4.10)可改写为下面的形式:

$$\frac{\prod_{k=1}^{r}(q-\omega^{1-k-r_1-r_3}q')(p-\omega^{1-k-r_3-r_4}p')\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{(\sigma^2+\sigma)/2}s(\sigma,c+f-a-d)\bar{\Theta}z^{\sigma}}{\prod_{k=1}^{r}(q-\omega^{k+r_2}p')(p-\omega^{1-k-r_3}q')\sum_{\sigma}(-)^{\sigma}\omega^{(\sigma^2+\sigma)/2}s(\sigma,c+f-a-d)\Theta z^{\sigma}}$$

$$=\prod_{k=1}^{r}(1-\omega^{1-k+e+f-a-d}z), \tag{4.14}$$

其中:

$$\Theta=\prod_{k=1}^{\sigma}(q-\omega^{k+r_2}p')(p-\omega^{1-k-r_3}q')\prod_{k=1}^{N-\sigma-1}(q-\omega^{-k-r_1}p)(q'-\omega^{-k-r_4}p'),$$

$$\bar{\Theta}=\prod_{k=1}^{\sigma}(q-\omega^{k+r_2+r}p')(p-\omega^{1-k-r_3-r}q')\prod_{k=1}^{N-\sigma-1}(q-\omega^{-k-r_1}p)(q'-\omega^{-k-r_4}p'). \tag{4.15}$$

这样,关于三维星-星关系式的证明,又转化为对式(4.14)的证明.

把式(4.14)右边的项展开为 z 的幂级数得:

$$\prod_{k=1}^{r}(1-\omega^{1-k+e+f-a-d}z)=\sum_{k=0}^{r}(-)^{k}\omega^{k(b+c-k-g)}\varphi(k,r)z^{k}, \tag{4.16}$$

这里,

$$\varphi(0,r)=1; \tag{4.17a}$$

$$\varphi(k,r)=\sum_{a_{k-1}=}^{r-k+1}\omega^{a_{k-1}+k-1}\sum_{a_{k-2}=1}^{a_{k-1}}\omega^{a_{k-2}+k-2}\cdots\sum_{a_1=1}^{a_2}\omega^{a_1+1}\sum_{a_0=1}^{a_1}\omega^{a_0}, \tag{4.17b}$$

其中 $0<k\leqslant r$. 把式(4.14)左边项中的分母记为 $A+B$, 其中

$$A=\sum_{\sigma=0}^{N-r-1}\Big[(-1)^{\sigma}\omega^{(\sigma^2+\sigma)/2}s(\sigma,c+f-a-d)\prod_{k=1}^{\sigma+r}(q-\omega^{r_2+k}p')(p-\omega^{1-r_3-k}q')$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{N-\sigma-1}(q-\omega^{-k-r_1}p)(q'-\omega^{-k-r_4}p')\Big]z^{\sigma}, \tag{4.18}$$

$$B=(-1)^{r}\omega^{(r^2-r)/2}s(r,a+d-c-f)(p^N-q^N)(p'^N-q'^N)z^{-r}$$
$$\cdot\sum_{\sigma=0}^{r-1}\Big[(-)^{\sigma}\omega^{(\sigma^2+\sigma)/2}s(\sigma,c+f-a-d-r)\prod_{k=1}^{\sigma}(q-\omega^{r_2+k}p')(p-\omega^{1-r_3-k}q')$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{r-\sigma-1}(q-\omega^{-k-r_1}p)(q'-\omega^{-k-r_4}p')\Big]z^{\sigma}. \tag{4.19}$$

注意,我们约定对任一函数序列 f_i, 有 $\sum_{i=a>b}^{b}f_i=0$, $\prod_{i=a>b}^{b}f_i=1$. 接着把

$$(A+B)\prod_{k=1}^{r}(1-\omega^{1-k+e+f-a-d}z)$$

按 z 的幂级数展开, 并将其 z 幂次方的系数与式(4.14)左边项分子中 z 的同幂次前的系数作比较,得出式(4.14)成立的条件为:

$$\prod_{k=1}^{r}(q-\omega^{1-k-r_1-r_3}q')(\omega^{1-r_4}p'-\omega^{k+r_3}p)$$

$$= \sum_{l=0}^{r} \varphi(l,r) \prod_{k=1}^{l} (q - \omega^{1-k+\sigma-r_1}p)(\omega^{1-k-r_4}p' - \omega^{-\sigma}q')$$

$$\times \prod_{k=1}^{r-l} (q - \omega^{k+\sigma+r_2}p')(\omega^{1-\sigma}q' - \omega^{k+r_3}p). \tag{4.20}$$

作参数变换：

$$p \to \omega^{1-\sigma-r_3-r_4}p,\quad p' \to \omega^{-\sigma}p',\quad q \to \omega^{r+r_2+2}q,\quad q' \to \omega^{1-r_4}q', \tag{4.21}$$

(4.20)式可以写为：

$$\prod_{k=1}^{r} (q - \omega^{-k}q')(p' - \omega^{k}p)$$

$$= \sum_{l=0}^{r} \varphi(l,r) \prod_{k=1}^{l} (q - \omega^{-k}p)(\omega^{-k}p' - q')$$

$$\times \prod_{k=1}^{r-l} (q - \omega^{k-r-2}p')(\omega q' - \omega^{k}p). \tag{4.22}$$

而且，

$$\mathrm{RHS}(4.22)|_{p'=\omega^{a}p,1\leqslant a\leqslant r} = \omega^{r} \prod_{k=1}^{r-a+1} (q - \omega^{-k}p) \prod_{k=0}^{a-1} (q' - \omega^{k}p)$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{r} (-)^{l}\varphi(l,r)\omega^{-l} \prod_{k=1}^{a-1} (q-\omega^{k-l-1}p) \prod_{k=1}^{r-a} (q' - \omega^{k+a-l-1}p),$$

$$\mathrm{RHS}(4.22)|_{q=\omega^{-a}q',1\leqslant a\leqslant r} = \omega^{r(1-a)} \prod_{k=1}^{r-a+1} (q' - \omega^{-k}p') \prod_{k=0}^{a-1} (q' - \omega^{k}p)$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{r} (-)^{l}\varphi(l,r)\omega^{-l} \prod_{k=1}^{a-1} (q' - \omega^{k-l-1}p') \prod_{k=1}^{r-a} (q' - \omega^{k+a-l-1}p), \tag{4.23}$$

上式中，已用 RHS(4.22) 表示式(4.22)的右边项。把上式中出现的连乘积

$$\prod_{k=1}^{a-1} (q - \omega^{k-l-1}p)、\prod_{k=1}^{r-a} (q' - \omega^{k+a-l-1}p)$$

以及 $\prod_{k=1}^{a-1} (q' - \omega^{k-l-1}p)$ 按 z 的幂次展开，并考虑到：

$$\sum_{l=0}^{r} (-)^{l}\varphi(l,r)\omega^{-l(k_1+k_2+1)} = \prod_{k=1}^{r} (1 - \omega^{k-k_1-k_2-1}) = 0, \tag{4.24}$$

其中 $0\leqslant k_1 + k_2 \leqslant r - 1$，可以得出

$$\mathrm{RHS}(4.22)|_{q=\omega^{-a}q'} = \mathrm{RHS}(4.22)|_{p'=\omega^{a}p} = 0, \tag{4.25}$$

其中 $1 \leqslant a \leqslant r$。于是有：

$$\sum_{l=0}^{r} \varphi(l,r) \prod_{k=1}^{l} (q - \omega^{-k}p)(\omega^{-k}p' - q') \prod_{k=1}^{r-l} (q - \omega^{k-r-2}p')(\omega q' - \omega^{k}p)$$

$$= C(p,p',q,q') \prod_{k=1}^{r} (q - \omega^{-k}q')(p' - \omega^{k}p). \tag{4.26}$$

注意到上式两边各谱参数的最高幂次均为 r，从而得出系数 $C(p,p',q,q')$ 与各谱参数

无关。对上式两边的项，比如 $q^r p'^{r}$ 前的系数作比较，得到 $C(p,p',q,q')=1$。这样，式(4.22)即式(4.20)正确，从而证明了三维星-星关系。

作者感谢王佩教授、侯伯宇教授的有益讨论。

参 考 文 献

[1] R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (Academic Press, London, 1982).
[2] M. T. Jaekel and J.M. Maillard, *J. Phys.*, **A15**(1982)1309.
[3] A. B. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **79**(1981)489.
[4] V.V. Bazhanov and R. J. Baxter, Preprint SMS-015-92.
[5] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeer and Yu. G. Stroganov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A8**(1993)587.

Three-Dimensional Exactly Solvable Model With Cubic Lattice

Hu Zhanning
(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xian* 710069)
Received on October 12, 1993

Abstract

The weight function S_k of Baxter-Bazhanov model is discussed in detail and a complete proof of the three-dimensional star-star relation is obtained.

Key words Baxter-Bazhanov model, weight function S_k, three-dimensional star-star relation.