

# 热场动力学中的切割图方法及 热格林函数的虚部\*

侯德富<sup>1,2</sup> 李家荣<sup>1</sup>

1 (华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

2 (武汉交通科技大学 武汉 430063)

1994-08-11 收稿

## 摘 要

在热场动力学的框架下,依据有限温度下的切割定理提出了一套直观的费曼图切割方法及其相应的费曼规则,从而给出了一条计算热格林函数虚部的方便途径。作为应用的例子我们分别讨论了二点、三点和四点格林函数的虚部。

**关键词** 热场动力学,切割规则,虚部。

## 1 引 言

热场动力学(TFD)是一种实时形式的温度场论<sup>[1-3]</sup>。随着关于夸克胶子等离子体(QGP)研究的进展,理论上提出了若干温度场论的计算方法问题。尤其是人们十分关注的QGP中波的激发与传播,以及QGP中的输运问题。需要解决如何方便地计算在有限温度与密度下费曼图的虚部,从而给出QGP中本征激发的色散关系、波的阻尼及输运系数等具体结果<sup>[4]</sup>。

在零温下Cutkosky切割规则给出了计算费曼图的虚部方法<sup>[5]</sup>。这种规则是将费曼图的内线按照一定的方式作各种满足零温下切割定理的切割,而且每条被切割的切线用一个向前的质壳 $\delta$ 函数代换。后来R. Kobes等在实时温度场下将这种方法推广到有限温度和密度的情况<sup>[6-8]</sup>。但这种推广在切割方式上不是很直接。前者是对费曼图内线切割,后者则是对顶点按一定规则“划圈”。这种“划圈”的方式对于多圈或多点费曼图来讲有很多,所以处理起来不方便<sup>[6]</sup>。再则从费曼规则上看,Kobes的切割方法需要引进另外两个新函数 $\Delta^\pm(x)$ ,用它们对费曼图中的内线传播子按内线两 endpoint “划圈”的情况作不同的代换,而且这种代换依赖于内线上动量的方向<sup>[8]</sup>,因而实际用起来比较烦琐,尤其是对于多圈图或多点格林函数更是如此<sup>[6,7]</sup>。

本文将有限温度下的切割定理出发,提出另一种等效的切割方法。从切割方式看比Kobes的更直接,本文的方法是直接对费曼图的内线作切割,切割的次数只有Kobes的一半。从费曼规则看,传播子不需引进新的函数 $\Delta^\pm(x)$ ,只需在TFD内利用热传播

\* 国家自然科学基金资助。

子各分量之间的关系进行转换和对外顶角作简单变换即可。而且下面会看到，正是这种变换使计算尤为简化。作为应用的例子还分别计算了二点、三点和四点格林函数的虚部，并与以前的结果作了比较。

## 2 热传播子及其相互关系

热场动力学的一个显著特点是对场量及相应的传播子有加倍指标：1 和 2<sup>[1-3]</sup>。对于标量场在动量空间的传播子因而有如下类型：

$$i\Delta_{11}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + 2\pi n_B(p)\delta(p^2 - m^2) = -i\Delta_{22}^*(p), \quad (1)$$

$$i\Delta_{12}(p) = i\Delta_{21}(p) = 2\pi\delta(p^2 - m^2)e^{\beta|p_0|/2}n_B(p), \quad (2)$$

其中  $p$  是粒子的四动量， $m$  为粒子的质量， $n_B$  为玻色场的分布函数，

$$n_B(p) = (e^{\beta|p_0|} - 1)^{-1}$$

注意到  $i\Delta_{11}(p)$  和  $i\Delta_{22}(p)$  包含实部和虚部，而  $i\Delta_{12}(p)$  和  $i\Delta_{21}(p)$  是纯实的，在实际计算过程中若能找到  $i\Delta_{11}(i\Delta_{22})$  与  $i\Delta_{12}(i\Delta_{21})$  间的联系，并将有关  $i\Delta_{11}(i\Delta_{22})$  的计算转换成对  $i\Delta_{12}(i\Delta_{21})$  的计算，那么整个计算将大为简化。下面可以看到这在我们的切割计算中可以实现，这也正是本方法之所以方便的原因之一。

利用主值公式及(2)式可以将 1-1 型传播子分解为：

$$\begin{aligned} i\Delta_{11}(p) &= \text{Pr} \frac{i}{p^2 - m^2} + \pi\delta(p^2 - m^2) + 2\pi n_B\delta(p^2 - m^2) \\ &= \text{Pr} \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{e^{\beta|p_0|} + 1}{2e^{\beta|p_0|/2}} (i\Delta_{12}) \\ &= \text{Pr} \frac{i}{p^2 - m^2} + \cosh\beta|p_0|/2 i\Delta_{12}(p). \end{aligned} \quad (3)$$

考虑到 TDF 中 1 类顶角与 2 类顶角的耦合常数正好复共轭（如  $g_1 = ig$  则  $g_2 = -ig$ ），因而有

$$\begin{aligned} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} &= (+ig)(i\Delta_{11}(p))(ig)(i) = g^2\Delta_{11}(p) \\ \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} &= (-ig)(i\Delta_{22}(p))(-ig)(i) = g^2\Delta_{22}(p) \\ \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} &= (ig)(i\Delta_{12}(p))(-ig)(i) = -g^2\Delta_{12}(p). \end{aligned} \quad (4)$$

由(3)、(4)式可得

$$\text{Im} \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} = -\cosh\beta|p_0|/2 \text{Im} \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \quad (5a)$$

$$\text{Im} \left( \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \right) = -\cosh\beta|p_0|/2 \text{Im} \left( \text{---} \overset{p}{\bullet} \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \overset{2}{\bullet} \text{---} \right), \quad (5b)$$

实际上 (5a)、(5b) 两式对任两点函数都成立<sup>[9]</sup>. 当动量  $p_0 = 0$  时, 有

$$\text{Im} \overline{\underline{1}} = -\text{Im} \underline{\overline{2}} \quad (6)$$

这里的粗线代表任一真空图。

由上面的关系式 (5a)—(6) 可以设想在计算费曼图的虚部时, 如果可以按照某种方式对内线进行切割, 使得切割了的内线可以按这些关系式作变换, 那么就实现了把关于  $i\Delta_{11}$  的计算换成了关于  $i\Delta_{12}$  的计算。

### 3 有限温度下的切割图方法

在零温下为了计算费曼图的虚部, 提出了对任一费曼图的切割方法, 使得对该图  $F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$  的切割满足切割定理<sup>[9]</sup>:

$$\sum_{\text{cut}(j)} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) = 0, \quad (7)$$

这里的求和指标 ( $j$ ) 是指在一定的切割方式下对所有的可能切割求和,  $x_i$  是图中顶点。

在有限温度和密度下存在着类似的切割定理(或称最大时间方程)<sup>[8]</sup>

$$\sum_{\text{cut}(j)} F(l_1, l_2, \dots, l_i, \dots) = 0, \quad (8)$$

这里  $l_i$  表示第  $i$  条内线。

显然满足切割定理的切割方式不只一种。它包括对费曼图中的顶点切割和对内线的切割。Kobes 的切割方式是对顶点进行切割, 这包括: 对所有的顶点不划圈和全划圈; 包含有划圈顶点和没有划圈顶点的各种切割<sup>[7,8]</sup>. 对于一个  $n$  点图, 总共包括  $\sum_{i=0}^n C_n^i$  种切割 ( $C_n^i$  是组合符号)。本文将提出一种对费曼图的内线进行切割的方法。其特点是通过一条划过图形的割线对内线无重复性地切割。这类所有可能的切割包括: (见图 1 中的例子)(1) 每条内线都不切; (2) 每条内线都切两次, 相应的费曼图用  $\textcircled{\otimes}$  表示; (3) 每条内线只切割一次, 并注意割线不能起止于费曼图内部。在这种切割方式下切割定理可表述为:

$$F + \textcircled{\otimes} = - \sum_{\text{cut}(j)} F \quad (9)$$

这里的求和指标 ( $i$ ) 是指按手续(3)的可能切割。

TFD 中费曼图的外顶点通常对应“1”类的物理场, 而内顶点应包括“1”和“2”两类顶点, 因而费曼图的内线有  $l_{11}, l_{12}, l_{21}$  和  $l_{22}$  四种类型。为明确起见用  $l$  的数字上指标表示内线的序号,  $l$  的双重数字下指标表示内线的类型。如考虑三角图  $F_{111}(l^1, l^2, l^3)$ , 外顶点均为“1”类, 因而内线都是(11)类的。这样满足上面切割规则的完备切割有图 1 五种 (Kobes 的切割有十种<sup>[8]</sup>)相应地可把切割定理写成

$$F + \textcircled{F} + F(l^1 l^2, l^3) + F(l^1 l^3, l^2) + F(l^2 l^3, l^1) = 0 \quad (10)$$

切割后计算费曼图虚部的规则是



图 1 三角图的各种切割图

(1) 若内线  $l_{11}(l_{22})$  没有被切, 则其传播子保持不变; 若  $l_{11}(l_{22})$  被切割一次, 则按(5)式和(6)式, 其传播子  $i\Delta_{11}(i\Delta_{22})$  变成  $i\Delta_{12}(i\Delta_{21})$ , 如果内线  $l_{11}(l_{22})$  被同时切两次, 按(5)、(6)式其传播子  $i\Delta_{11}(i\Delta_{22})$  变为其复共轭  $i\Delta_{22}(i\Delta_{11})$ .

(2) 如果内线  $l_{12}(l_{21})$  没有被切割, 其传播子保持不变; 若  $l_{12}(l_{21})$  被切一次, 则其传播子  $i\Delta_{12}(i\Delta_{21})$  变为  $i\Delta_{11}(i\Delta_{22})$ ; 若  $l_{12}(l_{21})$  被切两次, 传播子  $i\Delta_{12}(i\Delta_{21})$  变为其共轭  $i\Delta_{21}(i\Delta_{12})$ .

(3) 按上述规则变换时, 若与费曼图的外腿(动量为  $p$ ) 相连的“1”类顶角变为“2”类时, 则按(5)式乘上因子  $\cosh\beta|p_0|/2$ , 反之经过切割后“2”类外顶角变为“1”类时, 除以因子  $\cosh\beta|p_0|/2$ . 对于有多条外腿的图经切割由“1”类顶角变为“2”类时, 乘以因子

$$\cosh\beta \left| \sum_i p_{0i} \right| / 2,$$

这里  $p_{0i}$  是外线动量的零分量.

由上面的费曼规则易看出  $\textcircled{F} = F^*$ , 因此由(9)式可推得 ( $F$  本身隐含因子“ $i$ ”)

$$\text{Im}F = -\frac{1}{2} \sum_{\text{cuts}(F)} F(l^1, l^2, \dots, l^i \dots). \quad (11)$$

这表明任一费曼图的虚部可以表述成对费曼图按上述规则进行切割的费曼图之和. 如对图 1 有

$$\text{Im}F_{111} = -\text{Re}F_{121} - \text{Re}F_{211} - \text{Re}F_{112}. \quad (12)$$

这里根据 TFD 中传播子间的关系, 利用了:

$$2\text{Re}F_{111} = F_{121} + F_{212}, F_{211} = F_{122}^*, F_{112} = F_{211}^*.$$

## 4 应用举例

为了简明起见, 以标量场为例, 讨论  $\phi^3$  理论中的两点、三点、四点格林函数的虚部.

### 4.1 两圈两腿图

$\phi^3$  理论的两圈自能图如图 2 所示, 这里仅考虑顶点均为“1”类的图, 其余有“2”类顶点的图处理起来容易些.

按上节的切割规则, 对每条内线切割一次的各种可能的切割有以下七个图:

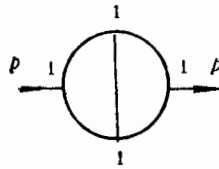


图 2  $\phi^3$  的两圈自能图

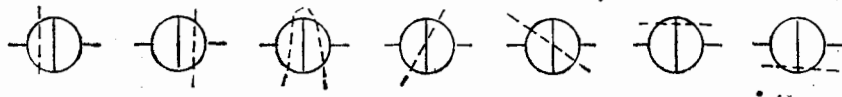


图 3 两圈自能图的各种切割图

于是由切割后的费曼规则可直接得到

$$\begin{aligned}
 \text{Im}F = -\text{Re} & \left[ \cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{array} + \cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \frac{1}{1} \begin{array}{c} 1 \\ \bigcirc \\ 2 \end{array} + \frac{2}{1} \begin{array}{c} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{array} \right. \\
 & + \cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \frac{2}{2} \begin{array}{c} 2 \\ \bigcirc \\ 1 \end{array} + \cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \frac{2}{1} \begin{array}{c} 2 \\ \bigcirc \\ 2 \end{array} \\
 & \left. + \frac{2}{1} \begin{array}{c} 2 \\ \bigcirc \\ 1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{array} \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

(13)式右边的七个图可按 TFD 中通常的费曼规则计算。由于一些(1-1)型内线转换成  $l_{12}$ , 而  $l_{12}$  的传播子是纯实的使计算大为简化。

在文献[8]中采用 Kobes 的方法计算了图 2 的虚部。但他们有十四个图要计算, 而且每个图使用的费曼规则复杂得多, 所以整个计算相当冗长, 但最后结果与我们一致<sup>[7,8]</sup>。

### 4.2 三点格林函数

$\phi^3$  理论中的三点格林函数对应如图 4 所示的三角图。

采用图 1 中相同的切割方法, 并考虑到这里有三条外腿, 动量分别为  $p, q, r$ , 按上节的费曼规则可得三点格林函数的虚部为

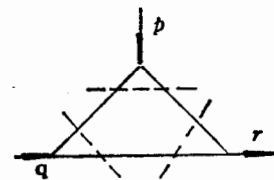


图 4 有腿三角图及其切割

$$\text{Im}F = -\cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \text{Re} \begin{array}{c} 2 \\ \bigtriangleup \\ 1 \end{array} - \cosh \frac{\beta|q_0|}{2} \text{Re} \begin{array}{c} 1 \\ \bigtriangleup \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cosh \frac{\beta|r_0|}{2} \operatorname{Re} \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 2 \end{array} \\
 & = -\cosh \frac{\beta|p_0|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{121} - \cosh \frac{\beta|q_0|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{211} - \cosh \frac{\beta|r_0|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{112}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

这与文献[6]中 Kobes 的结果完全一致,然而文献[6]中的计算过程冗长得多。

### 4.3 四点格林函数

考虑下面的四点“箱式”图,计算如下反应道

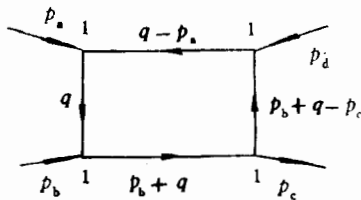


图 5 四点“箱式”图

按上节的切割手续③有下面七种可能的切割图

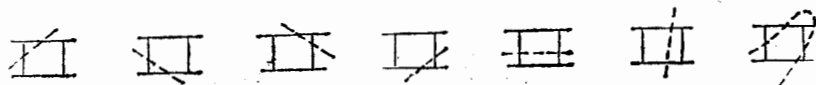


图 6 四点箱图的各种切割图

采用上节中切割后的费曼规则及(11)式就能方便地得到四点格林函数的虚部

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}\Gamma_{1111} & = -\cosh \frac{\beta|p_{a0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1222} - \cosh \frac{\beta|p_{b0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1211} - \cosh \frac{\beta|p_{c0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1121} \\
 & - \cosh \frac{\beta|p_{d0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1112} - \cosh \frac{\beta|p_{c0} - p_{b0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1221} \\
 & - \cosh \frac{\beta|p_{b0} + p_{d0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1212} - \cosh \frac{\beta|p_{c0} - p_{d0}|}{2} \operatorname{Im}\Gamma_{1122}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

这样对四点“箱式”图按上面的切割规则经过七次切割后可以将四点格林函数表述成(15)式右边七项之和。由于右边各项中有些“1”类顶点转化为“2”类,而  $i\Delta_{12}$  是纯实的,因此计算起来方便。

如果采用 Kobes 的切割方法计算同样的四点格林函数的虚部,需要经过十四次切割将其虚部表述成十四个费曼图之和。然后按文献[8]中的费曼规则对每个图进行烦琐计算,最后可以得到(15)式同样的结果。

## 5 结论与讨论

本文从有限温度和密度下的切割定理(或最大时间方程)出发,利用 TFD 中  $2 \times 2$

型热传播子间的关系,提出了一套与 Kobes 的切割方法等价但更直观、简洁方便的切割图方法及其费曼规则。由这种方法可以方便地给出 TFD 中任一格林函数的虚部。以  $\phi^3$  理论为例分别计算了二圈自能图、三点图和四点图的虚部,并与 Kobes 的方法作了比较<sup>[6,7]</sup>,其中四点格林函数的虚部未见以前有讨论。

要指出的是,本文的切割方法与 Kobes 的方法均满足有限温度下的切割定理。但本文的切割是直接对费曼图的内线切割(与零温下的切割方式一致),而不是对顶点“划圈”,切割图的个数也只有 Kobes 方法的一半。另一方面切割后的费曼规则比 Kobes 的方法方便些,不需引进新的函数  $i\Delta^\pm(x)$ <sup>[8]</sup>,只需对传播子在 TFD 内转换并对改变后的外顶角乘一个因子。因而本方法与文献[8]中方法相比更直观、简洁、方便。

值得指出的是为了简明起见仅以标量场为例。但不难发现这种切割图方法可以方便地推广到规范场、费米场的情况,只需将传播子作相应的修改。如对费米场与外腿相连的顶角由“1”(“2”)类经切割变为“2”(“1”)类时,需乘以(除以)因子  $\sinh\beta|p_0|/2$ ,其余规则完全一致。感谢来我所讲学的 Y. Fujimoto 教授和作者的有益讨论。

### 参 考 文 献

- [1] H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki, *Thermo field dynamics and condensed states*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [2] I. Ojima, *Ann. of Phys.*, **137**(1981)1.
- [3] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, *Phys. Rev.*, **D28**(1983)1931.
- [4] U. Heinz, in: *Quark-gluon Plasma*, ed. by R. Hwa (World Scientific, 1990) p117; J.-P. Blaizot, E. Iancu, *Phys. Rev. Lett.*, **70**(1993)3376.
- [5] G.'t Hooft, M. Veltman, *Diagrammer*, CERN Yellow report 73-9; *ibid*, in *Particle Interactions at Very High Energies*, edited by D. Speiser et al. (Plencem, New York, 1974).
- [6] R. Kobes, *Phys. Rev.*, **D42**(1990)562.
- [7] R. Kobes, *Phys. Rev.*, **D43**(1991)1269.
- [8] R. Kobes, G. W. Semenoff, *Nucl. Phys.*, **B260**(1985)714.
- [9] Y. Fujimoto, M. Morikawa, M. Sasaki, *Phys. Rev.*, **D33**(1986)590; H. Arthur Weldon, *Phys. Rev.*, **D28**(1983)2007.

## Cutting Rules and Imaginary Parts of Thermal Green Functions in Thermofield Dynamics

Hou Defu<sup>1,2</sup> Li Jiarong<sup>1</sup>

<sup>1</sup> (*Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430070*)

<sup>2</sup> (*Wuhan Transportary Science and Technology University, Wuhan 430063*)

Received 11 August 1994

### Abstract

Under the Thermofield Dynamics, according to the cutting theorem at finite temperature a set of systematic explicit cutting rules to the Feynman diagrams and the relative Feynman rules are proposed, which can be used as an easy approach to calculate the imaginary parts of the thermal Green functions. We applied it to study the imaginary parts of two-point, three-point and four-point Green functions as examples.

**Key words** Thermofield Dynamics, cutting rule, imaginary part.