第19卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 19, No. 5
1995年5月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1995

关于双参数量子代数$SU_{qs}(2)$和双参数形变谐振子的若干结果*

周焕强　贺劲松　管习文[1)]
(四川师范大学物理系　成都　610066)

1994-02-01 收稿

摘　　要

构造了双参数形变量子代数$SU_{qs}(2)$的Holstein-Primakoff实现和Nodvik实现,并给出了量子代数$SU_{qs}(2)$和双参数形变谐振子的形变映射.

关键词　双参数量子代数,形变谐振子,H-P实现,Nodvik实现.

量子反散射方法[1]的发展导致了一类新的极其重要的代数结构,即李代数普遍包络代数的q形变,其数学结构是既不对易也不余对易的Hopf代数,通常称之为量子群或量子代数[2]. 量子群最简单的例子是$SU_q(2)$[3]和q谐振子[4-6]. 后者可由前者经群收缩得到[7]. 近年来的研究工作表明,有关李代数$SU(2)$和谐振子的许多经典结果可以移植至q形变的情形,其中包括Jordan-Schwinger实现[4,5], Holstein-Primakoff (HP)实现[8]和Nodvik实现[9],等等.

从物理应用的角度考虑,多参数形变量子代数[10-15]的研究无疑是有意义的,因而也受到普遍的关注. 其相应的最简单例子是$SU_{qs}(2)$[13]和双参数形变qs谐振子[14-16]. 因此一个自然的问题是,对于双参数形变的情形,是否存在相应的Jordan-Schwinger实现、HP实现和Nodvik实现. Chakrabarti和Jagannathan[14]以及Jing[15]通过Jordan-Schwinger实现的构造给出了上述问题的部分回答. 本文讨论上述问题的其余部分.

量子代数$SU_{qs}(2)$是由三个生成元J_0和$J_\pm$生成的结合代数,满足如下的对易关系[13]:

$$[J_0,J_\pm]=\pm J_\pm, \tag{1}$$

$$[J_+,J_-]_s\equiv s^{-1}J_+J_- - sJ_-J_+ = s^{-2J_0}\frac{q^{2J_0}-q^{-2J_0}}{q-q^{-1}}. \tag{2}$$

此外,$SU_{qs}(2)$是一个Hopf代数,其余乘、余逆和余单位分别为

余乘 (coproduct): $\Delta(J_0)=J_0\otimes 1+1\otimes J_0,\qquad (3)$

$$\Delta(J_\pm)=(qs)^{-J_0}\otimes J_\pm + J_\pm\otimes(q^{-1}s)^{-J_0}, \tag{4}$$

$$\Delta(1)=1\otimes 1. \tag{5}$$

* 四川省教育委员会资助.
1) 青岛职工大学,青岛 266021.

余逆 (antipode): $s(J_0) = -J_0$, (6)

$$s(J_+) = -(qs)J_+s^{2J_0}, \tag{7}$$

$$s(J_-) = -(qs)^{-1}J_-s^{2J_0}, \tag{8}$$

余单位 (counit): $\varepsilon(J_0) = \varepsilon(J_\pm) = 0$, (9)

$$\varepsilon(1) = 1. \tag{10}$$

与通常的角动量量子理论相类似，$SU_{qs}(2)$ 存在有限维 j 表示[15]:

$$J_+|j,m\rangle = \sqrt{[j+m+1]_{qs}[j-m]_{qs^{-1}}}\,|j,m+1\rangle, \tag{11}$$

$$J_-|j,m\rangle = \sqrt{[j+m]_{qs}[j-m+1]_{qs^{-1}}}\,|j,m-1\rangle, \tag{12}$$

$$J_0|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \tag{13}$$

$$C|j,m\rangle = s^{2j}[j]_{qs}[j+1]_{qs}|j,m\rangle. \tag{14}$$

这里C为 $SU_{qs}(2)$ 的 Casimir 算符

$$\begin{aligned} C &= s^{2J_0}(J_+J_- + s^{-2}[J_0]_{qs}[J_0-1]_{qs}) = s^{2J_0}(s^2J_-J_+ + [J_0]_{qs}[J_0+1]_{qs}) \\ &= s^{2J}[J]_{qs}[J+1]_{qs}. \end{aligned} \tag{15}$$

且

$$[x]_{qs} = ((s^{-1}q)^x - (sq)^{-x})/(s^{-1}q - s^{-1}q^{-1}). \tag{16}$$

其中 x 为数或算符。

文献[14]和[15]给出了$SU_{qs}(2)$ 的 Jorclan-Schwinger 玻色实现。$a_i^\dagger$ 和 $a_i(i=1,2)$ 分别为两个独立的 qs 玻色子的产生算符和湮灭算符，满足如下的对易关系:

$$a_1a_1^\dagger - s^{-1}qa_1^\dagger a_1 = (sq)^{-N_1}, \tag{17}$$

$$[N_1, a_1^\dagger] = a_1^\dagger, [N_1, a_1] = -a_1. \tag{18}$$

以及关于 a_2 和 $a_2^\dagger$ 的同样的对易关系，但需将 s 换成 s^{-1}. 由此可得 J_0 和 $J_\pm$ 的Jordan-Schwinger 实现:

$$J_0 = \frac{1}{2}(N_1 - N_2),\ J_+ = a_1^\dagger a_2,\ J_- = a_1a_2^\dagger, \tag{19}$$

以及

$$|j,m\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{[j+m]_{qs}![j-m]_{qs^{-1}}!}}|0\rangle. \tag{20}$$

这里$|0\rangle$为真空态，满足

$$a_1|0\rangle = a_2|0\rangle = 0. \tag{21}$$

现在讨论量子代数 $SU_{qs}(2)$ 的 Nodvik 实现和 HP 实现。对于通常的李代数 $SU(2)$，其 HP 实现为

$$j_+ = \sqrt{2j - a^\dagger a}\ a, \tag{22}$$

$$j_- = a\sqrt{2j - a^\dagger a}, \tag{23}$$

$$j_0 = j - a^\dagger a. \tag{24}$$

其中 $a^\dagger$ 和 a 为玻色子的产生算符和湮灭算符，满足如下对易关系:

$$[a, a^\dagger] = 1,\ [n, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{25}$$

其中 $n = a^\dagger a$. 而 $SU(2)$ 的 Nodvik 实现[9]为

$$j_+ = e^{-ip}\sqrt{(j-u)(j+u+1)}, \tag{26}$$

$$j_- = \sqrt{(j-u)(j+u+1)}\, e^{ip}, \tag{27}$$

$$j_0 = u. \tag{28}$$

其中正则变量 p 和 u 满足 $[u,p]=i$. 容易验证,玻色产生算符 $a^\dagger$ 和湮灭算符 a 可以用正则变量 p 和 u 表示:

$$a = e^{-ip}\sqrt{j-u},\quad a^\dagger = \sqrt{j-u}\, e^{ip},\quad n = a^\dagger a = j-u. \tag{29}$$

现在来证明,对于双参数形变量子代数 $SU_{qs}(2)$和双参数形变谐振子也有类似实现.特别地,对量子代数 $SU_{qs}(2)$,其 Nodvik 实现为

$$J_+ = e^{-ip}\sqrt{\alpha(u)[j-u]_{qs}[j+u+1]_{qs}}, \tag{30}$$

$$J_- = \sqrt{\alpha(u)[j-u]_{qs}[j+u+1]_{qs}}\, e^{ip}, \tag{31}$$

$$J_0 = u. \tag{32}$$

其中 $\alpha(u) = s^{2(j-u-1)}$. 而对于双参数形变谐振子,则有如下的实现:

$$a_{qs} = e^{-ip}\sqrt{[j-u]_{qs}},\quad a_{qs}^\dagger = \sqrt{[j-u]_{qs}}\, e^{ip}, \tag{33}$$

$$a_{qs}^\dagger a_{qs} = [n]_{qs} = [j-u]_{qs}. \tag{34}$$

由此可得量子代数 $SU_{qs}(2)$ 和双参数形变谐振子的形变映射:

$$J_+ = j_+ f(j_0),\quad J_- = f(j_0) j_-,\quad J_0 = j_0. \tag{35}$$

和

$$a_{qs} = a\sqrt{\frac{[j-u]_{qs}}{j-u}} = a\sqrt{\frac{[n]_{qs}}{n}}, \tag{36}$$

$$a_{qs}^\dagger = \sqrt{\frac{[j-u]_{qs}}{j-u}}\, a^\dagger = \sqrt{\frac{[n]_{qs}}{n}}\, a^\dagger. \tag{37}$$

其中 $f(j_0) = \sqrt{\dfrac{\alpha(j_0)[j-j_0]_{qs}[j+j_0+1]_{qs}}{(j-j_0)(j+j_0+1)}}$. 上述结果分别是 Curtright 和 Zachos[17] 以及宋行长[18]关于 $SU_q(2)$和 q 形变谐振子相应结果的双参数推广. 另一方面,由(30—33)式可知,$SU_{qs}(2)$ 的生成元 J_0 和 $J_\pm$ 可由双参数形变谐振子的产生算符 $a_{qs}^\dagger$ 和湮灭算符 a_{qs} 表示:

$$J_+ = a_{qs}\sqrt{\beta(n)[2j-n+1]_{qs}} = \sqrt{\beta(n+1)[2j-n]_{qs}}\, a_{qs}, \tag{38}$$

$$J_- = \sqrt{\beta(n)[2j-n+1]_{qs}}\, a_{qs}^\dagger = a_{qs}^\dagger\sqrt{\beta(n+1)[2j-n]_{qs}}, \tag{39}$$

$$J_0 = j-n. \tag{40}$$

其中 $\beta(n) = s^{2(n-1)}$. 这是著名的 HP 实现的双参数形变. 特别地,当 $s=1$ 时,上述式子退化为 Quesne[19] 和于祖荣[20]的相应结果.

至此,达到了本文的目的,给出了双参数形变量子代数 $SU_{qs}(2)$的 HP 实现(38—40)式、Nodvik 实现(30—32)式. 此外,还得到了量子代数 $SU_{qs}(2)$和双参数形变谐振子的形变映射(35—37)式. 这些结果的意义表现在如下两个方面: 一方面可以看作是 Curtright 和 Zachos[17]、Quesne[19]、于祖荣[20]、宋行长[18]以及 Mallick 和 Kundu[21] 关于 $SU_q(2)$ 和 q 形变谐振子的结果的推广;另一方面,它们揭示了李代数 $SU(2)$、单参数形变量子代数 $SU_q(2)$ 和双参数形变量子代数 $SU_{qs}(2)$之间的密切联系. 事实上,由此

既可得到 $SU_{qs}(2)$的 boson 实现，也可得到 $SU(2)$的双参数形变 boson 实现，以及有关 q 形变量子代数 $SU_q(2)$的相应的结论。因此，这对于量子群及其表示理论的研究无疑是有益的。

参　考　文　献

[1] L. D. Faddeev, *Sov. Sci. Rev. Maths.*, **C1**(1981)107.
[2] V. G. Drinfeld, Proc. I. C. M. Berkeley (1986)798.
M. Jimbo, *Comm. Math. Phys.*, **102**(1986)537.
[3] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, *J. Sov. Math.*, **23**(1981)2535.
[4] L. C. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989)L873.
[5] A. J. Macfarlane, *J. Phys.*, **A22**(1989)4581.
[6] H. Yan, *J. Phys.*, **A23**(1990)L1155.
[7] Y. J. Ng, *J. Phys.*, **A23**(1990)1023.
[8] J. Katriel, A. I. Solomon, *J. Phys.*, **A24**(1991)2093.
[9] J. Nodvik, *Ann. Phys.*, **51**(1969)251.
[10] E. E. Demidov et al., *Prog. Theor. Phys. Supp.*, **102**(1990)203.
[11] A. Sudbery, *J. Phys.*, **A23**(1990)L697.
[12] A. Schirrmacher, J. Wess, B. Zumino, *J. Phys.*, **C49**(1991)317.
[13] C. Burdik, L. Hlavaty, *J. Phys.*, **A24**(1991)L165.
[14] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, *J. Phys.*, **A24**(1991)L711.
[15] S. Jing, *Mod. Phys. Lett.*, **A8**(1993)543.
[16] 周焕强、管习文、贺劲松，私人通信.
[17] T. L. Curtright, C. K. Zachos, *Phys. Lett.*, **B243**(1990)237.
[18] X. C. Song, *J. Phys.*, **A23**(1990)L821.
[19] C. Quesne, *Phys. Lett.*, **A153**(1991)303.
[20] 于祖荣，高能物理与核物理，**16**(1992)461.
[21] B. B. Mallick, A. Kundu, *Mod. Phys. Lett.*, **A6**(1991)701.

Some Remarks on a Two-Parameter Quantum Algebra $SU_{qs}(2)$ and a Two-Parameter Deformed Harmonic Oscillator

Zhou Huanqiang　　He Jingsong　　Guan Xiwen

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu, 610066)

Received 1 February 1994

Abstract

The Holstein-Primakoff realization and the Nodvik realization for a two-parameter deformed quantum algebra $SU_{qs}(2)$ are constructed, and the deformed maps of a quantum algebra $SU_{qs}(2)$ and a two-parameter deformed harmonic oscillator are given.

Key words two-parameter quantum algebra, deformed oscillator, HP realization, Nodvik realization.