

$U(1)$ 规范理论的定量分析

阎循领 姜志进 李作宏

(聊城师范学院物理系 山东 252059)

1994-02-08 收稿

摘 要

在 Migdal 及 Migdal-Kadanoff 变换方案基础上导出了重整化群方程,并将其应用到 Wilson 形式的 $U(1)$ 格点规范理论,给出了强耦合区,弱耦合区及临界耦合点,中间耦合区的数值结果. 这些结果与严格的强耦合展开,弱耦合展开及 Monte Carlo 模拟结果一致. 从而说明: 本文得到的重整化群方程在讨论规范理论的非微扰特性方面是可行而有效的.

关键词 格点规范,重整化群, MK 变换.

1 引 言

格点规范理论^[1]为规范场非微扰效应的研究提供了有效途径. 近些年来,不少作者讨论了 Migdal 变换^[2]以及由 Kadanoff 建出的 MK 变换^[3],应用于规范场的问题取得了很好的结果^[4-6]. Migdal 变换及 MK 变换都是近似的实空间重整化群变换. 重整化群理论是一种有效的方法,为建立量子场论中小尺度和大尺度间的联系提供了一种可行的途径. 利用它可以从某一给定格距的格点理论得到一具有较大格距的相应理论. 文献[11]把这两种变换应用于 $U(1)$ 规范理论中. 得到的强耦合区,弱耦合区,临界耦合点及中间区的数值结果与严格的结果有一定的偏差.

本文主要是在 Migdal 近似及 Migdal-Kadanoff 近似变换的基础上,导出了严格的重整化群方程. 并将其应用于 Wilson 形式的 $U(1)$ 格点规范理论作定量分析,给出了弱耦合区,强耦合区,临界耦合点及中间区的数值结果. 并将这些结果与严格的强耦合展开,弱耦合展开以及 Monte Carlo 模拟结果进行了比较.

2 重整化群方程

我们讨论具有最一般相互作用形式的规范理论,其格林函数生成泛函或配分函数可表示为

$$Z = \int (dU) e^S, \quad (1)$$

式中的作用量是单方块作用量 $S_p(U_p)$ 之和:

$$S(U_p) = \sum_p S_p(U_p). \quad (2)$$

其中 U_p 为方块 p 的四个边周上的链变量之有序乘积。规范不变性要求

$$S_p(U_p) = S_p(U_p^{-1}). \quad (3)$$

对于规范群, 方块作用量可表示为

$$S_p(g) = \sum_n \beta_n \chi_n(g), \quad (4)$$

其中 χ_n 为群 g 的特征标, β_n 为展开系数。配分函数为

$$e^{S_p(U)} = \sum_n b_n \chi_n(U). \quad (5)$$

Migdal-Kadanoff 变换是键移动操作与进位操作是交替进行。若在 $d-2$ 个方向上同时进行键操作, 则 Migdal-Kadanoff 变换为

$$F(U, \lambda a) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n^{1^2}(\lambda a) \chi_n, \quad (6)$$

其中

$$\tilde{b}_n(\lambda a) = \int dU \chi_n^* [F(U, a)]^{\lambda^{d-2}}, \quad (7)$$

即:

$$b_n(\lambda a) = \left[\int dU \chi_n^* F(U, a)^{\lambda^{d-2}} \right]^{\lambda^2}. \quad (8)$$

令

$$\lambda = 1 + dx \quad (9)$$

对(8)式微分。则得到重整化群方程

$$\frac{db_n}{dx} = 2b_n \ln(b_n/\alpha_n) + (d-2) \sum_m \beta_m \frac{\partial b_n}{\partial \beta_m}. \quad (10)$$

考虑到泛函积分(1)式中的边界效应可以忽略, 这时有

$$b_n \rightarrow 0 \quad (n \neq 0) \quad (11)$$

因此自由能为

$$f = \frac{\ln b_0 \left[\left(\exp \int dx \right) a \right]}{\exp \left[\int dx \right]}, \quad (12)$$

内能或 Wilson loop 的平均值为

$$\langle E \rangle = \frac{\partial f}{\partial \beta}. \quad (13)$$

3 Wilson 形式的 $U(1)$ 规范理论

3.1 重整化群方程 ($U(1)$)

对于 $U(1)$ 群, 其特征标仅依赖于一个参数 (角度 θ), 且所有不可约表示都是一维的, 因而 $U(1)$ 的特征标展开简单地就是 Fourier 展开, 且可表示为

$$F(\theta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(a) (2 \cos n\theta - \delta_{n0}), \quad (14)$$

其中

$$b_n(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \cos n\theta F(\theta, a). \quad (15)$$

$U(1)$ 规范理论的纯 Wilson 形式为

$$F(\theta, a) = e^{\beta \cos \theta}, \quad (16)$$

其中 $\beta = 1/g_0^2$, g_0 为裸耦合常数, 不少作者已经用 Monte Carlo 模拟方法研究了它的相变特征^[7-9]

通过重整化群变换出现系数的变化仍为规范不变的, 所以在变换中只有两个独立参数.

$$F(\theta, a) = e^{\beta_0 + \beta_1 \cos \theta}. \quad (17)$$

初始条件为 $\beta_1 = \beta$ 时, $\beta_0 = 0$.

我们有

$$b_n = e^{\beta_0} I_n(\beta), \quad (18)$$

其中 I_n 是第一类虚宗量贝塞耳函数, 由重整化群方程(10)式得

$$\frac{db_0}{dx} = 2b_0 \ln b_0 + (d-2) \sum_{m=0}^1 \beta_m \frac{\partial b_0}{\partial \beta_m}, \quad (19)$$

$$\frac{db_1}{dx} = 2b_1 \ln b_1 + (d-2) \sum_{m=0}^1 \beta_m \frac{\partial b_1}{\partial \beta_m}. \quad (20)$$

由微分条件得

$$\frac{db_0}{dx} = \frac{\partial b_0}{\partial \beta_0} \frac{d\beta_0}{dx} + \frac{\partial b_0}{\partial \beta_1} \frac{d\beta_1}{dx}, \quad (21)$$

$$\frac{db_1}{dx} = \frac{\partial b_1}{\partial \beta_0} \frac{d\beta_0}{dx} + \frac{\partial b_1}{\partial \beta_1} \frac{d\beta_1}{dx}. \quad (22)$$

对于四维规范体系 $d = 4$, 由(19),(20),(21) (22)得出 $U(1)$ 规范理论的重整化群方程为

$$\frac{d\beta_0}{dx} = 4\beta_0 + 2 \frac{I_0(I_0 + I_2)I_0 \ln I_0 - 2I_1^2 \ln I_1}{I_0(I_0 + I_2) - 2I_1^2}, \quad (23)$$

$$\frac{d\beta_1}{dx} = 2\beta_1 + 4 \frac{I_0 I_1 (\ln I_1 - \ln I_0)}{I_0(I_0 + I_2) - 2I_1^2}. \quad (24)$$

由固定点方程 $\frac{d\beta}{dx} = 0$, 即得临界耦合点 $\beta_c = 1.029$. 与 Monte Carlo 模拟结果 $\beta_c = 1.008$ 相一致.

在临界点附近 $\beta_1 \rightarrow \beta_c$. (23)式变为

$$\frac{d\beta_0}{dx} = 4(\beta_0 + A), \quad (25)$$

其中

$$A = \frac{1}{2} \frac{(I_0 + I_2)I_0 \ln I_0 - 2I_1^2 \ln I_1}{I_0(I_0 + I_2) - 2I_1^2}. \quad (26)$$

对(25)式积分得

$$4x = \ln \frac{\beta_0 + A}{A}. \quad (27)$$

由(12)式自由能为

$$f = \frac{\beta_0}{e^{4x}} = A - \frac{A}{e^{4x}}. \quad (28)$$

当格距无限增大时, $x \rightarrow \infty$. 所以自由能为

$$f = A \quad (29)$$

内能或 Wilson loop 的平均值

$$\langle E \rangle = \left. \frac{\partial f}{\partial \beta} \right|_{\beta_c} = 0.51. \quad (30)$$

3.2 强耦合近似

在强耦合区 ($\beta \ll 1$), 可应用虚宗量贝塞耳函数的级数表达式

$$I_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{2k+n}, \quad (31)$$

(23),(24)式近似为

$$\frac{d\beta_0}{dx} = 4\beta_0 + 4\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \ln \frac{\beta_1}{2}, \quad (32)$$

$$\frac{d\beta_1}{dx} = 2\beta_1 \ln \frac{\beta_1}{2}. \quad (33)$$

由(33)式得

$$e^{4x} = \ln^2 \frac{\beta_1}{2} / \ln^2 \frac{\beta}{2}. \quad (34)$$

令 $Z = e^{4x}$, 则

$$f = \frac{\beta_0}{Z}$$

(32),(33)式变为

$$Z^2 \frac{df}{dZ} = -\left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2 \ln \frac{\beta_1}{2}, \quad (35)$$

$$Z \frac{d\beta_1}{dZ} = \frac{\beta_1}{2} \ln \frac{\beta_1}{2}. \quad (36)$$

由(35)和(36)得

$$Z \frac{df}{d\beta_1} = -\frac{\beta_1}{2}, \quad (37)$$

把(34)代入(37)式积分, 并考虑到初始条件 $\beta_1 = \beta$, $f = 0$, 当 $\beta_1 = 0$ 时,

$$f = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2. \quad (38)$$

内能或 Wilson loop 的平均值为

$$\langle E \rangle = \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\beta}{2}. \quad (39)$$

而严格的强耦合展开结果为^[10]

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \beta + O(\beta^3). \quad (40)$$

由(39),(40)式可知,由重整化群方程所得到的自由能和内能与严格的强耦合展开结果一致.

3.3 弱耦合近似

在弱耦合区 $\beta \gg 1$. 由变形贝塞耳函数的渐近表达式可得

$$b_n = e^{\beta_0} \frac{e^{\beta_1}}{\sqrt{2\pi\beta_1}} \left[1 - O\left(\frac{1}{\beta_1}\right) \right]. \quad (41)$$

在这一近似下,重整化群方程(23),(24)变为

$$\frac{d\beta_0}{dx} = 4\beta_0 + 2\left(\beta_1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi\beta_1\right), \quad (42)$$

$$\frac{d\beta_1}{dx} = 2\beta_1. \quad (43)$$

由(43)式得

$$e^{4x} = \frac{\beta_1^2}{\beta^2}. \quad (44)$$

由(42),(43)式得

$$\frac{d\beta_0}{d\beta_1} = \frac{2\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi\beta_1}{\beta_1}. \quad (45)$$

解方程(45)式可得

$$\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{4} \ln 2\pi\beta_1 - \frac{1}{8} = C\beta_1^2. \quad (46)$$

考虑到初始条件 $\beta_1 = \beta$ 时, $\beta_0 = 0$ 得

$$C = \frac{1}{\beta^2} \left(\beta - \frac{1}{4} \ln 2\pi\beta - \frac{1}{8} \right) \quad (47)$$

考虑到临界耦合,即 $\beta = \beta_c$ 时, $\frac{d\beta_1}{dx} = 0$

$$\beta_0 + \beta_c - \frac{1}{4} \ln 2\pi\beta_c - \frac{1}{8} = C\beta_c^2. \quad (48)$$

因为在临界耦合点时,有一定的自由能. 所以

$$f = \left(\beta_0 + \beta_c - \frac{1}{4} \ln 2\pi\beta_c - \frac{1}{8} \right) / e^{4x} = \beta - \frac{1}{4} \ln 2\pi\beta - \frac{1}{8}. \quad (49)$$

内能或 Wilson loop 的平均值为

$$\langle E \rangle = \frac{\partial f}{\partial \beta} = 1 - \frac{1}{4\beta}. \quad (50)$$

而严格的弱耦合展开结果为

$$\langle E \rangle = 1 - \frac{1}{4\beta}. \quad (51)$$

由(50),(51)式可知,由重整化群方程所得到内能与严格的弱耦合展开一致。

3.4 数值结果

前面讨论了强耦合近似与弱耦合近似及临界耦合点,在这节中我们给出包括中间耦合区的数值结果。

从(23)式和(24)式出发,可以计算出自由能 $f(\beta)$, 然后得到内能 $\langle E \rangle = \frac{\partial f}{\partial \rho}$, 由此得到内能与 $\beta = 1/g_0^2$ 的函数关系表示在图1中,从图1可以看出,通过重整化群方程(23),(24)式计算出的结果与 Monte Carlo 模拟结果一致。

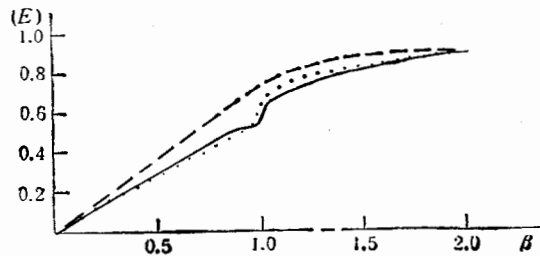


图1 内能 $\langle E \rangle$ 与 β 的关系

实线是数值结果,点线为 Monte Carlo 模拟结果。

4 结 论

利用 Migdal 变换及 Migdal-Kadanoff 变换方案得到了重整化群方程,并将该重整化群方程应用到 $U(1)$ 格点规范理论时,我们发现,这里给出的结果,不仅在弱耦合区,强耦合区与严格的结果及 Monte Carlo 模拟一致,而且在临界耦合点及中间耦合区与 Monte Carlo 模拟结果也一致,从而说明本文给出的重整化群方程是有意义的。

参 考 文 献

- [1] K.G. Wilson, *Phys. Rev.*, D10(1974)2445; J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, 51(1979)659; M. Bander, *Phys. Report*, 75(1981) 205.
- [2] A.Migdal, *J. Exp. theor. Phys.*, 42(1976) 413; 42(1976)743.
- [3] L.P. Kadanoff, *Ann. Phys.*, 100(1976) 359.
- [4] S. Caracciolo, P. Menotti, *Nucl. Phys.*, B180(FS2) (1981)428; M. Nauenberg, D. Toussaint, *Nucl. Phys.*, B190(FS3)(1981) 217.
- [5] K.M. Bitar, S. Gottlieb, C.K. Zachos, *Phys. Rev.*, D26(1982) 2853; *Phys. Lett.*, 121B(1983) 163; M. Imashi, S. Kaeake, H. Yoneyama, *Prog. Theor. Phys.*, 69(1983) 1005.
- [6] Chung-I Tan, Zai-xin Xu, Brown-HET-521, Dec. (1983)
- [7] G.Bhanot, *Phys. Rev.*, D24(1981), 461; T.A. Gegrاند, D. Toussaint, *Phys. Rev.*, D24(1981) 466; K.J.M. Moriarty, *Phys. Rev.*, D25(1982) 2185, D. Horn, M.Kailiner, E.Katznelson, S. Yankie-

- lowicz, *Phys. Lett.*, **113B** (1982) 258.
[8] G. Bhanot, *Nucl. Phys.*, **B205**(FS5)(1982)168.
[9] D.G. Caldi, *Nucl. Phys.*, **B220**(FS8)(1983)48.
[10] M. Greutz, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979) 553.
[11] 徐在新, *物理学报*, **35**(1986),1403.

Quantitative Analysis for $U(1)$ Gauge Theory

Yan Xiunling Jiang Zhijin Li Zuohong

(Department of Physics, Liaocheng Teachers' College, Shandong Province 252059)

Received 8 February 1994

Abstract

The renormalization group equation is derived under the scheme of Migdal-Kadanoff renormalization group transformations. This equation is applied to $U(1)$ lattice group theory. The numerical results for strong and weak coupling regions, including the critical coupling point and the intermediate coupling region are presented, which are consistent with the exact results obtained from the strong and weak coupling expansions and the recent Monte Carlo simulations.

Key words lattice gauge, renormalization group, MK transformation.