含反射边界条件与广义统计的谐振子代数

赵 柳
(西北大学现代物理所 西安 710069)

1995-12-29 收稿

摘 要

通过定义 B. C 型 Weyl 群对任意多粒子态矢量空间的作用构造了含有反射边界条件及广义统计的谐振子代数及相应的 Fock 空间，并将结果推广到了多分量情形. 构造所得的谐振子代数的 Fock 空间系由普通谐振子的 Fock 空间经与 Weyl 群相联系的投影运算得到. 给出了单分量情形下关联函数的递推关系.

关键词 谐振子代数，反射边界，Fock 空间，广义统计.

1 引 言

谐振子代数是量子场论、凝聚态及固体物理中处理许多问题的基本工具之一，也是二次量子化方法的理论基础. 近年来，随着量子群理论的发展，各种推广的谐振子代数也相继被提出并获得了越来越多的关注. 其中值得一提的有 q 谐振子代数[1,2]，q 子(quon)代数[3,4]，(p, q)形变的谐振子代数[5-7]等等.

另一方面，有迹象表明，固体中的集团激发对应的准粒子，如有可能与分数量子霍尔效应有关的任意子，并不满足通常的玻色或费米统计[8-11]. 据此，有人构造了相应于固体中准粒子激发的产生、湮没算符所满足的具有所谓的“广义统计”的谐振子代数及其 Fock 空间[12, 13].

最近，关于有质量带边界的可积量子场论及带有可解边界条件的格点统计模型的研究变得十分活跃[14, 15]. 在这个领域最近的进展之一是提出所谓的“边界态”的概念[14,15]，即有边界的量子场论或统计模型的最低能量状态，并在此基础上形成了计算有可积边界的统计模型[15]和场论体系[16]的关联函数及形状因子的一套方法. 然而，在存在可积边界时相应的场论体系与统计模型的完整的 Fock 空间的构造问题仍然没有很好地解决.

本文将考虑在存在可积反射边界的情况下相应的谐振子代数及具有广义统计的谐振子代数及其 Fock 空间的构造问题. 将发现，在存在反射边界的情况下，谐振子代数显著地依赖于边界反射因子，但相应的 Fock 空间可从无反射边界的谐振子代数的 Fock

空间经过简单的投影得到．类似的结论也可以推广到存在不止一种准粒子激发的情形．

2 反射条件与谐振子代数

考虑一个 s 维凝聚态体系的连续极限，在这样的体系中，粒子的产生、湮没算符(分别记为 b^* 和 b)将依赖于某一连续变化的 s 维矢量 x(坐标或波矢)．在不存在反射边界的情形下系统中粒子的产生、湮没算符满足通常的谐振子代数：

$$\begin{aligned}&[b(x),\ b(y)]=[b^*(x),\ b^*(y)]=0,\\&[b(x),\ b^*(y)]=\delta(x-y),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\delta(x-y)=\prod_{i=1}^{s}\delta(x^i-y^i)$，$x^i$ 是 x 的第 i 个分量．

现在假定系统在某一方向(例如第一个方向)是有界的，而且产生算符 $a^*(x)$ 作用在系统的最低能量状态 Ω_B(边界真空态)上满足如下的反射条件：

$$a^*(x)\Omega_B=K(x)a^*(\sigma(x))\,\Omega_B,\tag{2}$$

式中的算符 σ 定义为

$$\sigma(x)=\sigma(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^s)=(-x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^s),\ \sigma^2=1,\tag{3}$$

$K(x)$ 称为反射因子．为使(2)式能够自恰，要求 $K(x)$ 满足关系

$$K(x)\,K(\sigma(x))=1.\tag{4}$$

我们将证明，满足条件(2)—(4)的产生算符与可以湮没“真空态”Ω_B 的湮没算符一道，满足一个和(1)式不同的谐振子代数，而且相应的 Fock 空间可经由(1)式的 Fock 空间经过一个投影运算得到．

从定义(1)式的 Fock 空间入手．根据量子场论的标准理论，体系的单粒子态矢量空间是一个 Hilbert 空间．在我们的情形，这个空间就是 $\mathbb{R}^s$ 上关于测度 $\mathrm{d}^s x$ 平方可积的函数空间 $L^2(\mathbb{R}^s,\ \mathrm{d}^s x)\equiv\mathscr{H}$．体系的 n 粒子态矢量空间 $\mathscr{H}^n$ 就是 $\mathscr{H}^{\otimes n}$，而所有多粒子态矢量空间的直和

$$\mathscr{F}(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{H}^n,\ \mathscr{H}^0\equiv\mathbb{C},\tag{5}$$

就构成了(1)式的 Fock 空间．Fock 空间中的点可标记为 $\varphi=(\varphi^{(0)},\ \varphi^{(1)},\ \cdots,\ \varphi^{(n)},\ \cdots)$，其中 $\varphi^{(n)}\in\mathscr{H}^n$．

考虑 $\mathscr{H}^n$ 中由可分解矢量构成的子集 $\mathscr{D}^n$：

$$\mathscr{D}^n=\{f_1\otimes f_2\otimes\cdots\otimes f_n\mid f_i\in\mathscr{H}\}\subset\mathscr{H}^n.$$

在 $\mathscr{D}^n$ 上定义操作

$$b(f):\ \mathscr{D}^n\to\mathscr{D}^{n-1},\ n\geqslant1;\quad b^*(f):\ \mathscr{D}^n\to\mathscr{D}^{n+1},\ n\geqslant0,\ f\in\mathscr{H},$$

使得

$$\begin{aligned}&b(f)\,f_1\otimes\cdots\otimes f_n=\sqrt{n}\,(f,\ f_1)\,f_2\otimes\cdots\otimes f_n,\\&b^*(f)\,f_1\otimes\cdots\otimes f_n=\sqrt{n+1}\,f\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_n,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $(f, g) \equiv \int \mathrm{d}^s x \bar{f}(x) g(x)$, $\bar{f}(x)$ 表示 $f(x)$ 的共轭运算. (6)式所定义的操作可线性地推广到 $\mathscr{H}^n$ 中的密子集 $\mathscr{L}(\mathscr{D}^n)$ 上去，其中 $\mathscr{L}(\mathscr{D}^n)$ 是由 $\mathscr{D}^n$ 中元素经有限线性组合形成的子空间. 因此，对任意 $\varphi^{(n)} \in \mathscr{L}(\mathscr{D}^n)$,

$$
\begin{aligned}
&[b(f)\varphi]^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt{n+1} \int \mathrm{d}^s x \bar{f}(x) \varphi^{(n+1)}(x, x_1, \cdots, x_n), \\
&[b^*(f)\varphi]^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \varphi^{(n-1)}(x_1, \cdots, \hat{x}_k, \cdots, x_n),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

其中 $\hat{x}_k$ 表示 x_k 不应出现. 定义

$$
b(f) = \int \mathrm{d}^s x \bar{f}(x) b(x), \quad b^*(f) = \int \mathrm{d}^s x f(x) b^*(x), \tag{8}
$$

则从(7)式容易证明 $b(x)$, $b^*(x)$ 满足(1)式.

为了引入反射条件(2)—(4)，在 $\mathscr{L}(\mathscr{D}^n)$ 上引入下面的操作 π_n $(n \geqslant 1)$:

$$
[\pi_n \varphi]^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = K(x_n) \varphi^{(n)}(x_1, \cdots, x_{n-1}, \sigma(x_n)). \tag{9}
$$

由于(4)式，有

$$
\pi_n^2 = 1, \tag{10}
$$

而且为了使 π_n 是厄米算符，要求

$$
\overline{K}(x) = K(\sigma(x)). \tag{11}
$$

显然，

$$
P_{\mathrm{B}}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 + \pi_n), \quad \overline{P}_{\mathrm{B}}^{(n)} = \frac{1}{2}(1 - \pi_n) \tag{12}
$$

是两个彼此正交的投影算符. 定义 $P_{\mathrm{B}}^{(0)} = 1$，可将 $\{P_{\mathrm{B}}^{(n)} | n \geqslant 0\}$ 扩张到 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上去:

$$
\mathscr{F}_{\mathrm{B}}(\mathscr{H}) \equiv P_{\mathrm{B}} \mathscr{F}(\mathscr{H}), \quad P_{\mathrm{B}}|_{\mathscr{H}^n} = P_{\mathrm{B}}^{(n)}.
$$

易见，$\mathscr{F}_{\mathrm{B}}(\mathscr{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{H}_{\mathrm{B}}^n$，$\mathscr{H}_{\mathrm{B}}^n = P_{\mathrm{B}}^{(n)} \mathscr{H}^n$. 相应地，有投影后的产生、湮没算符

$$
a^{\#}(f) = P_{\mathrm{B}} b^{\#}(f) P_{\mathrm{B}}, \tag{13}
$$

其中 $b^{\#} = b$ 或 b^*. 对任意 $\varphi^{(n)} \in \mathscr{L}(\mathscr{D}_{\mathrm{B}}^n)$，由(7)，(9)，(12)与(13)式可得

$$
[a(f)\varphi]^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt{n+1} \int \mathrm{d}^s x \bar{f}(x) \varphi^{(n+1)}(x, x_1, \cdots, x_n), \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
[a^*(f)\varphi]^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + K(x_k) f(\sigma(x_k))] \\
\cdot \varphi^{(n-1)}(x_1, \cdots, \hat{x}_k, \cdots, x_n).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

和(8)式类似，定义

$$a(f)=\int \mathrm{d}^s x \bar{f}(x) a(x), \quad a^*(f)=\int \mathrm{d}^s x f(x) a^*(x),$$

从(14)，(15)两式可以很容易推得

$$\begin{aligned}&[a(x), a(y)]=[a^*(x), a^*(y)]=0,\\&[a(x), a^*(y)]=\delta(y-x)+K(x)\delta(y-\sigma(x)).\end{aligned} \tag{16}$$

注意到(1)式相应的真空态 $\Omega\in\mathscr{H}^0$，$P_B^{(0)}=1$，故 $\Omega_B=\Omega$.

下面证明，满足(16)式的推广的谐振子代数同时也满足反射条件(2)—(4)．事实上，由于 $a^*(f)\Omega_B\in\mathscr{H}_B=P_B^{(1)}\mathscr{H}$，必有

$$\bar{P}_B^{(1)}(a^*(f)\Omega_B)=0, \tag{17}$$

或写为

$$a^*(f)\Omega_B-\pi_1 a^*(f)\Omega_B=0 . \tag{18}$$

利用 π_1 的定义及 $a^*(f)$ 与 $a^*(x)$ 的关系可以容易地看出(18)式实际上就是(2)式．这样就得到了满足反射条件(2)—(4)的谐振子代数(16)及相应的 Fock 空间 $\mathscr{F}_B(\mathscr{H})$.

3 具有广义统计和反射条件的谐振子代数

方程(16)给出了满足反射条件(2)—(4)的一组谐振子代数，但这种代数仍遵从通常的玻色统计．在本节将把广义统计引入上述谐振子代数．为此，对任意 $\varphi^{(n)}\in\mathscr{H}^n$ 引入操作[12, 13]

$$\begin{aligned}&[s_i\varphi]^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=R(x_i,x_{i+1})\varphi^{(n)}(x_1,\cdots,x_{i+1},x_i,\cdots,x_n),\\&R(x_i,x_{i+1})R(x_{i+1},x_i)=1,\ \bar{R}(x_i,x_{i+1})=R(x_{i+1},x_i),\\&i=1,\cdots,n-1.\end{aligned} \tag{19}$$

s_i，$i=1,\cdots,n-1$ 与 $s_n\equiv\pi_n$ 合在一起，满足如下关系：

$$\begin{aligned}&(s_i s_j)^{m_{ij}}=1,\\&m_{ij}=1,\ |i-j|=0,\\&m_{ij}=2,\ |i-j|>1,\\&m_{ij}=3,\ |i-j|=1\text{ 且 } i,j\neq n,\\&m_{ij}=4,\ |i-j|=1\text{ 且 }\max(i,j)=n,\end{aligned} \tag{20}$$

若(19)式中的“交换因子”$R(x_i,x_{i+1})$ 还满足如下条件:

$$R(x,y)R(y,\sigma(x))=R(x,\sigma(y))R(\sigma(y),\sigma(x)). \tag{21}$$

(20)式正是 B_n 或 C_n 型的 Weyl 群 W 的生成关系[17]． 因此，方程(9)和(19)实际上定义了 Weyl 群 W 对 $\mathscr{H}^n$ 的作用．

我们的目的是在 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 中找到一个子空间 $\mathscr{F}_R(\mathscr{H})$，使得在该子空间上任一 n 粒子

态对于两个相邻单粒子的交换出现一个统计因子 $R(x_i, x_{i+1})$，且单粒子态满足条件(2)—(4)．为此构造如下的投影算符

$$P_R^{(n)}=\frac{1}{\dim W}\sum_{g\in W} g,\quad n\geqslant 2\ , \tag{22}$$

并令 $P_R^{(n)}=1$，$P_R^{(1)}=P_B^{(1)}$．显然 $P_R^{(n)}$ 与$\overline{P}_B^{(n)}$是正交的：由 $\pi_n\in W$ 及重排定理，$(1-\pi_n)P_R^{(n)}=0$．类似于 $P_B^{(n)}$，也可将 $P_R^{(n)}$ 推广至整个 Fock 空间 $\mathscr{F}(\mathscr{H})$ 上：

$$\mathscr{F}_R(\mathscr{H})=P_R\mathscr{F}(\mathscr{H}),\quad P_R|_{\mathscr{H}^n}=P_R^{(n)}\ .$$

相应地，投影 $b^{\#}$ 为 $a_R^{\#}$：

$$a_R^{\#}=Pb^{\#}P.$$

可以证明，$a_R^{\#}$ 作用在任意 $\varphi^{(n)}\in\mathscr{L}(\mathscr{D}_R^n)$ 上的结果为

$$[a_R(f)\varphi]^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\sqrt{n+1}\int \mathrm{d}^s x\bar{f}(x)\varphi^{(n+1)}(x,x_1,\cdots,x_n),$$

$$\begin{aligned}
&[a_R^*(f)\varphi]^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\\
&=\frac{1}{\sqrt{n}}[R(x_{n-1},x_n)\cdots R(x_1,x_n)f(x_n)+K(x_n)R(x_{n-1},\sigma(x_n))\\
&\quad\cdots R(x_1,\sigma(x_n))f(\sigma(x_n))]\varphi^{(n-1)}(x_1,\ldots,x_{n-1})\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}R(x_k,x_{k+1})\cdots R(x_k,x_n)[R(x_n,x_k)\cdots R(x_{k+1},x_k)\\
&\quad\times R(x_{k-1},x_k)\cdots R(x_1,x_k)f(x_k)\\
&\quad+K(x_k)R(x_n,\sigma(x_k))\cdots R(x_{k+1},\sigma(x_k))R(x_{k-1},\sigma(x_k))\\
&\qquad\cdots R(x_1,\sigma(x_k))f(\sigma(x_k))]\varphi^{(n-1)}(x_1,\cdots,\hat{x}_k,\cdots x_n).
\end{aligned}\tag{23}$$

经过相当的计算可以得到

$$\begin{aligned}
&a_R(x)a_R(y)-R(y,x)a_R(y)a_R(x)=0,\\
&a_R^*(x)a_R^*(y)-R(y,x)a_R^*(y)a_R^*(x)=0,\\
&a_R(x)a_R^*(y)-R(x,y)a_R^*(y)a_R(x)=\delta(y-x)+F(x)\delta(y-\sigma(x)),
\end{aligned}\tag{24}$$

其中 $F(x)$ 是定义在 $\mathscr{F}_R(\mathscr{H})$ 上的厄米算符，

$$\begin{aligned}
[F(x)\varphi]^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=&R(x,x_1)\cdots R(x,x_n)K(x)R(x_n,\sigma(x))\cdots R(x_1,\sigma(x))\\
&\times\varphi^{(n)}(x_1,\cdots,x_n).
\end{aligned}\tag{25}$$

利用(23)和(25)还可以求得如下的交换关系：

$$\begin{aligned}
&R(xy)F(x)a(y)R(y,\sigma(x))-a(y)F(x)=0,\\
&F(x)a^*(y)-R(y,x)a^*(y)F(x)R(\sigma(x),y)=0,\\
&F(x)F(y)-F(y)F(x)=0.
\end{aligned}\tag{26}$$

方程(24)与(26)合在一起，构成了满足可积反射边界条件(2)—(4)并具有广义统计因子 $R(x,y)$ 的谐振子代数. 注意，如果在式(20)中不将 π_n 包含进来，则相应的生成关系就是置换群的生成关系，相应所得的代数就是具有广义统计但无反射边界的谐振子代数[12, 13].

4 多分量推广(概要)

前面考虑的体系中只能产生、湮没一种准粒子. 如果体系可以产生，湮没 N 种准粒子，相应的构造也可以推广至 N 分量情形. 由于 N 分量情形的计算比较复杂，结果又在可积场论中有特殊意义，将在另文中给出详细介绍，这里仅叙述一下要点.

单粒子态矢量空间应推广为(投影前)

$$\mathscr{H}=\bigoplus_{\alpha=1}^{N} L^2(\mathbb{R}^s,\ \mathrm{d}^s x). \tag{27}$$

相应的 Fock 空间为

$$\mathscr{F}(\mathscr{H})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{H}^n. \tag{28}$$

$\mathscr{H}$ 中内积定义为

$$(f,\ g)=\int \mathrm{d}^s x f^{\dagger\alpha}(x)\,g_\alpha(x)=\sum_{\alpha=1}^{N}\int \mathrm{d}^s x\bar{f}_\alpha(x)g_\alpha(x), \tag{29}$$

其中 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_N)^T\in\mathscr{H}$. 在上述体系中引入 $N^2\times N^2$ 矩阵 $R_{\alpha_1\alpha_2}^{\beta_1\beta_2}(x_1,\ x_2)$ 作为交换因子，引入 $N\times N$ 矩阵 $K_\alpha^\beta(x)$ 作为反射因子，并使得 R 和 K 矩阵满足以下条件:

$$R_{\alpha_1\alpha_2}^{\epsilon_1\epsilon_2}(x_1,\ x_2)R_{\epsilon_2\alpha_3}^{\gamma_2\beta_3}(x_1,\ x_3)R_{\epsilon_1\gamma_2}^{\beta_1\beta_2}(x_2,\ x_3)$$
$$=R_{\alpha_2\alpha_3}^{\epsilon_2\epsilon_3}(x_2,\ x_3)R_{\alpha_1\epsilon_2}^{\beta_1\gamma_2}(x_1,\ x_3)R_{\gamma_2\epsilon_3}^{\beta_2\beta_3}(x_1,\ x_2), \tag{30}$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2}(x_1,x_2)R_{\gamma_1\gamma_2}^{\beta_1\beta_2}(x_2,x_1)=\delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\delta_{\alpha_2}^{\beta_2}, \tag{31}$$

$$\overline{R}_{\alpha_1\alpha_2}^{\beta_1\beta_2}(x_1,\ x_2)=R_{\beta_1\beta_2}^{\alpha_1\alpha_2}(x_2,x_1), \tag{32}$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2}^{\gamma_1\gamma_2}(x_1,\ x_2)K_{\gamma_2}^{\delta_2}(x_1)R_{\gamma_1\delta_2}^{\beta_1\rho_2}(x_2,\ \sigma(x_1))K_{\rho_2}^{\beta_2}(x_2)$$
$$=K_{\alpha_2}^{\gamma_2}(x_2)R_{\alpha_1\gamma_2}^{\gamma_1\delta_2}(x_1,\ \sigma(x_2))K_{\delta_2}^{\rho_2}(x_1)R_{\gamma_1\rho_2}^{\beta_1\beta_2}(\sigma(x_2),\ \sigma(x_1)), \tag{33}$$

$$K_\gamma^\alpha(x)K_\beta^\gamma(\sigma(x))=\delta_\beta^\alpha, \tag{34}$$

$$\overline{K}_\beta^\alpha(x)=K_\alpha^\beta(\sigma(x)). \tag{35}$$

这些条件分别是具有可积边界条件的量子场论中熟知的(辫子型)Yang-Baxter 方程、R 矩阵的么正条件及交叉对称性(方程(30)—(32))以及边界 Yang-Baxter 方程、K 矩阵的么正条件及轭米解析条件(方程(33)—(35))的推广.

利用方程(30)—(35)可以证明按如下方式定义的算符 $s_i(i=1,\cdots,n-1)$ 和 $S_n\equiv\pi_n$ 满足(20)式：

$$[s_i\varphi]^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)=[R_{i\,i+1}(x_i,x_{i+1})]^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varphi^{(n)}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x_1,\cdots,x_{i+1},x_i,\cdots,x_n),\ (n\geqslant 2)$$

$$[\pi_n\varphi]^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)=[K_n(x_n)]^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\varphi^{(n)}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},\sigma(x_n)),\ n\geqslant 1,$$

$$[R_{ij}(x_i,x_j)]^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\equiv\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdots\widehat{\delta^{\beta_i}_{\alpha_i}}\cdots\widehat{\delta^{\beta_j}_{\alpha_j}}\cdots\delta^{\beta_n}_{\alpha_n}R^{\beta_i\beta_j}_{\alpha_i\alpha_j}(x_i,x_j),$$

$$[K_j(x_j)]^{\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}\equiv\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdots\widehat{\delta^{\beta_j}_{\alpha_j}}\cdots\delta^{\beta_n}_{\alpha_n}K^{\beta_j}_{\alpha_j}(x_j).$$

因此，可采用完全平行于上一节的办法定义投影算符和投影后的 Fock 空间．最后可以证明，在投影后的 Fock 空间中，产生算符、湮没算符与额外定义的算符 $F^{\beta}_{\alpha}(x)$ 一道，满足如下封闭的代数关系：

$$a_\alpha(x)a_\beta(y)-R^{\delta\gamma}_{\beta\alpha}(y,x)a_\gamma(y)\,a_\delta(x)=0,\tag{36}$$

$$a^{*\alpha}(x)a^{*\beta}(y)-a^{*\gamma}(y)a^{*\delta}(x)R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(y,x)=0,\tag{37}$$

$$a_\alpha(x)\,a^{*\beta}(y)-a^{*\gamma}(y)R^{\beta\delta}_{\alpha\gamma}(x,y)a_\delta(x)=\delta^{\beta}_{\alpha}\,\delta(y-x)+F^{\beta}_{\alpha}(x)\delta(y-\sigma(x)),\tag{38}$$

$$R^{\epsilon\tilde\alpha}_{\alpha\gamma}(x,y)\,F^{\tilde\beta}_{\tilde\alpha}(x)a_{\tilde\gamma}(y)R^{\beta\tilde\gamma}_{\epsilon\tilde\beta}(y,\sigma(x))-a_\gamma(y)F^{\beta}_{\alpha}(x)=0,\tag{39}$$

$$F^{\alpha}_{\beta}(x)a^{*\gamma}(y)-R^{\epsilon\tilde\beta}_{\beta\tilde\gamma}(y,x)a^{*\tilde\gamma}(y)\,F^{\tilde\alpha}_{\tilde\beta}(x)R^{\alpha\gamma}_{\epsilon\tilde\alpha}(\sigma(x),y)=0,\tag{40}$$

$$\begin{aligned}&R^{\gamma_1\gamma_2}_{\alpha_1\alpha_2}(x,y)F^{\delta_2}_{\gamma_2}(x)\,R^{\beta_1\rho_2}_{\gamma_1\delta_2}(y,\sigma(x))F^{\beta_2}_{\rho_2}(y)\\&\quad=F^{\gamma_2}_{\alpha_2}(y)\,R^{\gamma_1\delta_2}_{\alpha_1\gamma_2}(x,\sigma(y))F^{\rho_2}_{\delta_2}(x)R^{\beta_1\beta_2}_{\gamma_1\rho_2}(\sigma(y),\sigma(x)),\end{aligned}\tag{41}$$

式中，$F^{\beta}_{\alpha}(x)$ 定义为

$$\begin{aligned}&[F^{\beta}_{\alpha}(x)\varphi]^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)\\&=[R_{01}(x,x_1)\cdots R_{n-1,n}(x,x_n)K_n(x)R_{n-1,n}(x_n,\sigma(x))\cdots R_{01}(x_1,\sigma(x))]^{\beta\beta_1\cdots\beta_n}_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}\\&\quad\times\varphi^{(n)}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x_1,\cdots,x_n).\end{aligned}$$

方程(36)—(41)就是最终得到的多分量代数．注意若令 $F^{\beta}_{\alpha}(x)=0$，则所得结果退化为无反射边界时可积场论中著名的 Faddeev－Zamolodchikov 代数[12,13]．在本文情形下，$a^{*\alpha}(x)$ 满足边界反射条件

$$a^{*\alpha}(x)\Omega_{\rm B}=K^{\alpha}_{\beta}(x)a^{*\beta}(\sigma(x))\Omega_{\rm B}\,.$$

5 讨　论

本文构造了满足可积反射条件，具有广义统计的谐振子代数及其多分量推广．这些结果已经能使我们计算相应体系中的 n 粒子关联函数．例如，对于第 3 节描述的体系，n 粒子态无非是形如 $a^*(x_1)\cdots a^*(x_n)\Omega_{\rm B}$ 的矢量的线性组合．因此相应的 n 点关联函数可用

下面的函数表达:

$$\omega_n(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) = (a^*(x_1)\cdots a^*(x_n)\Omega_B, a^*(y_1)\cdots a^*(y_n)\Omega_B)/(\Omega_B, \Omega_B).$$

事实上，对 ω_n 可以写出一个递推关系:

$$\begin{aligned}
&\omega_n(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n) \\
&=[\delta(y_1-x_1)+R(x_1, y_2)\cdots R(x_1, y_n)K(x_1)R(y_n, \sigma(x_1))\cdots R(y_2, \sigma(x_1))\delta(y_1-\sigma(x_1))] \\
&\times\omega_{n-1}(x_2, \cdots, x_n; y_2, \cdots, y_n) \\
&+\sum_{k=2}^{n} R(x_1, y_1)\cdots R(x_1, y_{k-1}) \\
&\times[\delta(y_k-x_1)+R(x_1, y_{k+1})\cdots R(x_1, y_n)K(x_1)R(y_n, \sigma(x_1))\cdots R(y_{k+1}, \sigma(x_1))\delta(y_k-\sigma(x_1))] \\
&\times\omega_{n-1}(x_2, \cdots, x_n; y_1, \cdots, \hat{y}_k, \cdots, y_n).
\end{aligned}$$

ω_n 的前几个例子为

$$\begin{aligned}
&\omega_0=1,\ \omega_1(x, y)=\delta(y-x)+K(x)\delta(y-\sigma(x)), \\
&\omega_2(x_1, x_2; y_1, y_2)=[\delta(y_1-x_1)+R(x_1, y_2)K(x_1)R(y_2, \sigma(x_1))] \\
&\quad\times[\delta(y_2-x_2)+K(x_2)\delta(y_2-\sigma(x_2))] \\
&\quad+R(x_1, y_1)[\delta(y_2-x_1)+K(x_1)\delta(y_2-\sigma(x_1))][\delta(y_1-x_2)+K(x_2)\delta(y_1-\sigma(x_2))].
\end{aligned}$$

与本文的构造相关的还有许多问题尚待解决，例如相应的二次量子化构造、相干态、多粒子体系的配分函数以及理想气体体系的描述等等．对于二次量子化问题，在J. 存在反射边界的情况下，Liguori 和 Mintchev[12, 13] 已经考虑了从单粒子自由哈密顿量构造多粒子相互作用哈密顿量的可能性，并且成功地将结果应用于 Leinaas－Myrheim 任意子体系[18, 19]．希望通过进一步研究将 L－M 任意子体系推广到包含自作用的情形．

参 考 文 献

[1] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22** (1989) 4581.
[2] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22** (1989)L873.
[3] O. W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990)705; *Phys. Rev.*, **D43** (1991)4111.
[4] R. N. Mohapatra, *Phys. Lett.*, **B242** (1990)407.
[5] R. Chakrabarti, R. Jagannathan, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **24** (1991) L711.
[6] G. Brodimas, A. Jannussis, R. Mignani, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992)L329.
[7] M. Arik, E. Demircan, T. Turgut *et al.*, *Z. Phys. C: Particle & Fields*, **55** (1992)89.
[8] V. Kalmeyer, R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 2095.
[9] S. Forte, *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992)193.
[10] B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1583.
[11] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983) 1395.
[12] A. Liguori, M. Mintchev, *Commun, Math. Phys.*, **169** (1995)635.
[13] A. Liguori, M. Mintchev, *Lett. Math. Phys.*, **33** (1995)283.
[14] S. Ghoshal, A. Zamolodchkov, *Int. J. Mod. Phys.*, **A9** (1994) 3841.
[15] M. Jimbo, R. Kedom, T. Kojima *et al.*, *Nucl. Phys.*, **B441** (1995) 437.

[16] B. -Y. Hou, K. -J. Shi, Y. -S. Wang *et al.*, NWU-IMP preprint 1995.
[17] Finite reflection group, Graduate Text in Mathematics 99, Spinger-Verlag.
[18] J. M. Leinaas, J. Myrheim, *Nuow, Cim.*, **B37** (1977) 1.
[19] G. V. Duune, A. Lerda, S. Sciuto *et al.*, *Nucl. Phys.*, **B370** (1992) 601.

Oscillator Algebra With Reflecting Boundary and Generalized Statistics

Zhao Liu
(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

Received 29 December 1995

Abstract

The oscillator algebra with reflecting boundary is constructed together with its Fock space, and is generalized to the cases with generalized statistics and multicomponent. Such oscillators depend manifestly on the reflection factor and the statistical (exchange) factor. By construction, the Fock space of such oscillator algebras can be obtained by certain projection operation. from that of the usual bosonic oscillator without reflection condition.

Key words oscillator algebra, reflection boundary, Fock space, generalized statistics.