第21卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.21, No.1
1997年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1997

奇异拉氏量系统相空间路径积分中的整体对称性*

李 子 平[1)]

(北京工业大学应用物理系 北京 100022)

1996-01-15收稿

摘 要

基于奇异拉氏量系统Green函数的相空间生成泛函，导出了相空间中整体变换下的Ward恒等式和整体对称下的量子守恒律. 一般它有别于经典Noether守恒律. 用于杨-Mills理论，导出了BRS变换下的Ward-Takahashi恒等式和BRS守恒量；用于非Abel-Chern-Simons理论，导出了系统的量子角动量，它有别于经典角动量在于计及了鬼粒子对角动量的贡献.

关键词 奇异拉氏量，路径积分量子化，守恒律，Chern-Simons理论.

1 引 言

定域规范不变的拉氏量是奇异的. 用奇异拉氏量描述的系统(简称奇异系统)在相空间中含固有约束，为约束Hamilton系统[1]. 仅含第一类约束的系统的路径(泛函积分)量子化首先是Faddeev给出的[2], Senjanovic将其推广到含第二类约束的系统[3]. 至今规范场和引力场中出现的量子化问题已基本解决[4]，特别是BFV和BRST量子化方案更是受到广泛的关注[5,6]. 在动力系的路径积分量子化中，Green函数的相空间生成泛函占有基本的地位. 当相空间路径积分中关于正则动量的积分为Gauss型时，相空间路径积分可化为位形空间中的路径积分. 传统的用路径积分方法导出Ward恒等式就是通过位形空间中的生成泛函来实现的[7,8]，它仅适用于相空间路径积分中关于正则动量的积分为可积的情形. 相空间路径积分则适用于普遍情形，它比位形空间路径积分更基本[9]. 对约束Hamilton系统，当约束结构复杂时，要做出相空间路径积分中关于正则动量的积分往往是很困难的，甚至是不可能的[10]. 因此，从相空间路径积分来研究系统的量子对称性质，就具有更重要的意义. 前面的工作中讨论了定域对称[11,12]，这里进一步研究整体对称性.

* 国家自然科学基金和北京市自然科学基金资助.

1) CCAST成员.

整体对称是系统的基本性质之一，它包括时空对称和内部对称，如 Lorentz 不变性、Poincaré 不变性、共形对称、超对称和 Siegel 不变性[13] 等．基于 Faddeev－Senjanovic 量子化方案，分析相空间生成泛函中的整体对称性，可建对应的 Ward 恒等式，导出系统的量子守恒荷．在本文第 2 节中，从奇异系统 Green 函数的相空间生成泛函出发，考虑该生成泛函在增广相空间中变换下的不变性，导出了整体变换下的 Ward 恒等式．在第 3 节中考虑了与整体变换相应的定域变换下系统的性质，导出了系统的量子守恒律，一般它有别于经典守恒律．表明经典理论中对称性所联系的守恒量，在量子理论中一般不再保持，这是因为对称变换可能破坏泛函积分中测度的不变性以及约束带来的量子效应使有效正则作用量不等于经典作用量．在第 4 节中给出了理论在杨－Mills 场中的应用，导出了 BRS 变换下的 Ward－Takahashi 恒等式和 BRS 守恒量．在第 5 节中给出了理论在非 Abel－Chern－Simons 场论中的应用，指出了守恒的量子角动量有别于经典角动量在于存在鬼粒子对角动量的贡献．

这里给出的理论形式其突出优点在于勿需作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，一般情形，是不能作出该积分的．

2　整体变换的 Ward 恒等式

设动力系由奇异拉氏量 $\mathbb{L}$: $(\varphi^\alpha, \varphi^\alpha_{,\mu})$ 描述，$\varphi^\alpha_{,\mu}=\partial_\mu\varphi^\alpha(x)$，$\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$ $(\mu=0, 1, 2, 3, x^0=t)$．系统在相空间中的所有第一类约束为 Λ_k $(k=1, 2, \cdots, K)$，所有第二类约束为 θ_i $(i=1, 2, \cdots, I)$，与第一类约束相应的规范条件为 Ω_k $(k=1, 2, \cdots, K)$．系统 Green 函数的相空间生成泛函为[11]（这里仅对场量 φ^α 引入外源 J_α）:

$$Z[J]=\int \mathrm{D}\varphi^\alpha \mathrm{D}\pi_\alpha\ \mathrm{D}\lambda_m \mathrm{D}\overline{C}\ \mathrm{D}C \exp\left\{\mathrm{i}\, I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\, J_\alpha \varphi^\alpha\right\}, \tag{1}$$

其中有效正则作用量记为 $I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}$，

$$I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4 x\ \mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\,(\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_m+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}), \tag{2}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}=\pi_\alpha\dot{\varphi}^\alpha-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}, \tag{3}$$

$$\mathscr{L}_m=\lambda_i\theta_i+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l, \tag{4}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=\int \mathrm{d}^4y\left[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x),\ \Omega_l(y)\}C_l(y)+\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\ \theta_j(y)\}C_j(y)\right], \tag{5}$$

其中 π_α 为 φ^α 的正则共轭动量，$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量，{ , }代表场的 Poisson 括号，$\overline{C}$ 和 C 为 Grassmann 变量，$\lambda_m=(\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l)$．为简化记号，设 $\varphi=(\varphi^\alpha, \lambda_m, \overline{C}, C)$，$J=(J_\alpha)$，$\pi=(\pi_\alpha)$．于是(1)式可简写为

$$Z[J]=\int \mathrm{D}\varphi \mathrm{D}\pi \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\}. \tag{6}$$

考虑增广相空间中的无穷小整体变换

$$\begin{cases} x^{\mu'}=x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x,\ \varphi,\ \pi), \\ \varphi'(x')=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_{\sigma}\xi^{\sigma}(x,\ \varphi,\ \pi), \\ \pi'(x')=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\varepsilon_{\sigma}\eta^{\sigma}(x,\ \varphi,\ \pi), \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\varepsilon_{\sigma}(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 为无穷小任意参数，$\tau^{\mu\sigma}$，ξ^{σ} 和 η^{σ} 为 x，$\varphi(x)$ 和 $\pi(x)$ 的函数. 在(7)式变换下，有效正则作用量的变分为[1]

$$\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon_{\sigma}\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi}(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\right.$$
$$\left.+\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\right\}, \tag{8}$$

其中 $\mathrm{D}\doteq\mathrm{d}\cdot/\mathrm{d}t$，

$$\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}/\delta\varphi=-\dot{\pi}-\delta H_{\mathrm{eff}}/\delta\varphi,\quad \delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}/\delta\pi=\dot{\varphi}-\delta H_{\mathrm{eff}}/\delta\pi, \tag{9}$$

H_{eff} 是与 $L^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\int\mathrm{d}^3x\,\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$ 相对应的 Hamilton 量. 假设变换(7)的 Jacobi 行列式为 1，由生成泛函(6)在(7)式变换下的不变性，有

$$Z[J]=\int\mathrm{D}\varphi\mathrm{D}\pi\left\{1+\mathrm{i}\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\varepsilon_{\sigma}\int\mathrm{d}^4x[J(\xi^{\sigma}-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}(J\varphi\tau^{\mu\sigma})]\right\}$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J\varphi)\right\}$$
$$=\left\{1+\mathrm{i}\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+\mathrm{i}\varepsilon_{\sigma}\int\mathrm{d}^4x\left[J\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}\right)+\partial_{\mu}\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]\right\}_{\substack{\pi\to\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}\\ \varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J}}Z[J]. \tag{10}$$

由此时生成泛函满足下列关系

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}\right)+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi}(\eta^{\sigma}-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]\right.$$
$$\left.+\mathrm{D}\left[\pi\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]+J\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}\right)+\partial_{\mu}\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\}_{\substack{\pi\to\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}\\ \varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J}}Z[J]=0. \tag{11}$$

如果在(7)式变换下，有效正则作用量 $I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$ 不变，$\Delta I^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=0$，这时生成泛函适合

$$\int\mathrm{d}^4x\left[J\left(\xi^{\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J}\right)+\partial_{\mu}\left(\tau^{\mu\sigma}J\frac{\delta}{\delta J}\right)\right]_{\substack{\pi\to\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}\\ \varphi\to-\mathrm{i}\delta/\delta J}}Z[J]=0. \tag{12}$$

(11)式为增广相空间中整体变换下的广义 Ward 恒等式. (12)式为整体对称时的 Ward 恒等式. 将(11)式或(12)式关于外源求多次泛函微商，然后让外源为零，即可得到诸

Green 函数间的关系式.

3　量子守恒律

假设有效正则作用量在整体变换(7)式的变换下不变. 考虑与(7)式对应的定域变换

$$\begin{cases} x^{\mu'} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi), \\ \varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi), \\ \pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \varepsilon_\sigma(x)\eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi), \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1, 2, \cdots, r)$ 为无穷小任意函数，它们的值及其微商在四维时空区域的边界上为零. 在(13)式变换下，有效正则作用量的变分为

$$\begin{aligned} \Delta I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} = \int \mathrm{d}^4x\ \varepsilon_\sigma(x) \Big\{ & \frac{\delta I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\varphi}(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) + \frac{\delta I^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}}}{\delta\pi}(\eta^{\sigma} - \pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}) \\ & + \partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] \Big\} \\ & + \int \mathrm{d}^4x[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x) + \pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(x)]. \end{aligned} \tag{14}$$

变换(13)的 Jacobi 行列式记为 $J[\varphi, \pi, \varepsilon]$. 根据假设，(14)式中第一个积分为零. 对(14)式中第二个积分施行分部积分，注意到 $\varepsilon_\sigma(x)$ 的边界条件，将所得结果代入(6)式，由 $\delta Z / \delta\varepsilon_\sigma(x)|_{\varepsilon_\sigma(x)=0}=0$，得

$$\int \mathrm{D}\varphi\mathrm{D}\pi\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J^{\sigma}_{0} - M^{\sigma}\}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} + J\varphi)\right\} = 0, \tag{15}$$

其中

$$J^{\sigma}_{0} = -\mathrm{i}\delta J[\varphi, \pi, \varepsilon] / \delta\varepsilon_\sigma(x)|_{\varepsilon_\sigma(x)=0},\quad M^{\sigma} = J(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}). \tag{16}$$

将(15)式关于外源 $J(x)$ 求 n 次泛函微商，得

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{D}\varphi\mathrm{D}\pi(\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J^{\sigma}_{0} - M^{\sigma}\}\ \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \\ & - \mathrm{i}\sum_j \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)N^{\sigma}\delta(x - x_j))\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{eff}} + J\varphi)\right\} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$N^{\sigma} = \xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma}. \tag{18}$$

在(17)式中，令 $J=0$，得

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T^{*}\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi} - \mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}] + \mathrm{D}[\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})] - J^{\sigma}_{0}\}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle \\ & = \mathrm{i}\sum_j \langle 0 | T^{*}[\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_{j-1})\varphi(x_{j+1})\cdots\varphi(x_n)N^{\sigma}] | 0\rangle\delta(x - x_j), \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $|0\rangle$ 代表场的真空态，T^* 为一种特定的编时积[7]，固定 t，让

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_m \to +\infty,\ t_{m+1},\ t_{m+2},\ \cdots,\ t_n \to -\infty$$

利用约化公式[8]，可将(19)式写为

$$\langle out,\ m|\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]-J_0^\sigma\}|n-m,\ in\rangle=0. \tag{20}$$

由于 m 和 n 任意，从而得算符等式

$$\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]=J_0^\sigma\ . \tag{21}$$

在三维空间中对(21)式积分，假设场在无穷远处为零，由 Gauss 定理，得

$$\mathrm{D}\int \mathrm{d}^3x\,[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}]=\int \mathrm{d}^3x\,J_0^\sigma\ , \tag{22}$$

其中重复指标 k 由 1 至 3 求和. 这样得：如果系统的有效正则作用量在整体变换(7)式的变换下不变，且对应的定域变换(13)式的 Jacobi 行列式为常数(或与 $\varepsilon_\sigma(x)$ 无关)，$J_0^\sigma=0$，那么该系统存在如下的守恒量

$$Q^\sigma=\int \mathrm{d}^3x\,[\pi(\xi^\sigma-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}]\ \ (\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r), \tag{23}$$

此结果对理论中无反常时成立.

量子守恒律(23)与正则 Noether 定理给出的经典守恒律相对应[14]. 两者一般来说是不同的. 由于奇异拉氏量系统在相空间中存在约束，量子化后系统的有效 Hamilton 量一般不同于正则 Hamilton 量，约束 Hamilton 系统的量子正则方程不同于经典正则方程[12]，自然对应的守恒量也不同. 此外，在量子情形下除变换(7)保持系统的有效正则作用量不变外，还需保持泛函测度不变，才能有量子守恒律(23)式，这也与经典理论不同. 可见，经典理论中对称性和守恒律的联系，在量子理论中一般不再保持. 在某些问题，如杨－Mills 理论[15]，非 Abel－Chern－Simons 理论[16]，当作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分后，将其化为位形空间生成泛函，位形空间中的有效拉氏量不再具有规范不变性. 在杨－Mills 理论中，仍具有 BRS 和 BRST 对称性，在量子水平下，BRS 荷或 BRST 荷代替了经典杨－Mills 守恒荷. 在这些对动量可积的情形，这里的形式给出的结果与从位形空间生成泛函导出的结果一致. 此处给出的形式的显著优点在于勿需作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，一般情况，作出该积分是十分困难的，甚至是不可能的.

4 杨－Mills 场

纯杨－Mills 场的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\ , \tag{24}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu-f^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu\ , \tag{25}$$

其中 $F_{\mu\nu}^a$ 中的耦合常数 g 已省略．拉氏量(24)是奇异的，系统在相空间的约束为

$$\Lambda_a^1=\pi_a^0\approx 0, \tag{26}$$

$$\Lambda_a^2=\partial_i\pi_a^i+\nabla^2A_a^0-f_{ab}^{\ c}A_i^b\pi_c^i\approx 0, \tag{27}$$

其中 π_a^μ 为 A_μ^a 的正则共轭动量．记号 $\approx$ 代表弱等，它表示等式在约束确定的超曲面上成立．Λ_a^1, Λ_a^2 均为第一类约束，规范条件取为[15]

$$\Omega_1^a=\partial^i\pi_i^a+\nabla^2A_0^a-f_{bc}^a A_i^b\partial^iA_0^c\approx 0, \tag{28}$$

$$\Omega_2^a=\partial^iA_i^a\approx 0. \tag{29}$$

Green 函数的相空间生成泛函为[1]

$$Z[J]=\int \mathrm{D}\,A_\mu^a\,\mathrm{D}\,\pi_a^\mu\,\delta(\Lambda_a^1)\delta(\Lambda_a^2)\delta(\Omega_1^a)\delta(\Omega_2^a)\det\{\Lambda_k,\ \Omega^l\}$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\pi_a^\mu\dot{A}_\mu^a-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+J_a^\mu A_\mu^a)\right\}, \tag{30}$$

其中 $\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为正则 Hamilton 量密度．因子 $\det\{\Lambda_k,\ \Omega^l\}\,\delta(\partial^iA_i^a)$ 可用 $\det M_{\mathrm{L}}\,\delta\,(\partial^\mu A_\mu^a)$ 来代替[15]，而

$$M_{\mathrm{L}}=(\delta_b^a\,\partial^\mu\partial_\mu+f_{\ bc}^{a}A_\mu^c\partial^\mu)\delta(x-y). \tag{31}$$

由于理论规范无关[15]，用 $\overline{\Omega}_l^a=\Omega_l^a-p_l^a(x)$ 代替 Ω_l^a，生成泛函不变．用 $\exp\left[-\frac{1}{2\alpha_l}\int \mathrm{d}^4x\,(p_l^a)^2\right]$

乘(30)式后，作关于 $p_l^a(x)$ 的路径积分，略去无关紧要因子，得

$$Z[J,\ \overline{\zeta},\ \zeta,\ \xi]=\int DA_\mu^a\,D\pi_a^\mu\ D\lambda_k^a\,D\,\overline{C}^a\,DC^a$$
$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}+J_a^\mu A_\mu^a+\overline{\zeta}^aC^a+\overline{C}^a\zeta^a+\xi_k^a\lambda_k^a)\right\}, \tag{32}$$

其中 $\overline{\zeta}^a$ 和 ζ^a 分别为鬼场 C^a 和 $\overline{C}^a$ 的外源，ξ_k^a 为乘子场 λ_k^a 的外源，

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}=\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}+\mathscr{L}_m, \tag{33a}$$

$$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}=\pi_a^\mu\dot{A}_\mu^a-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}, \tag{33b}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}=-\frac{1}{2\alpha_2}(\partial^\mu A_\mu^a)^2, \tag{33c}$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}=-\partial^\mu\overline{C}^aD_{b\mu}^aC^b\quad(D_{b\mu}^a=\delta_b^a\partial_\mu+f_{\ bc}^{a}A_\mu^c), \tag{33d}$$

$$\mathscr{L}_m=\lambda_k^a\Lambda_a^k-\frac{1}{2\alpha_1}(\Omega_1^a)^2. \tag{33e}$$

在 BRS 变换

$$
\begin{cases}
\delta A_\mu^a = -\tau D_{b\mu}^a C_b \,, & (34a)\\
\delta \pi_a^\mu = \tau f^a_{\ bc}\ \pi_c^\mu\ C_b \,, & (34b)\\
\delta C^a = \dfrac{1}{2}\ \tau f^{\ a}_{bc} C_b C_c \,, & (34c)\\
\delta \overline{C}^a = -\dfrac{1}{\alpha_2}\ \tau \partial^\mu A_\mu^a & (34d)
\end{cases}
$$

下，$\delta(D_{b\mu}^a C_b)=0$，$\delta(\delta C^a)=0$[8]．对 δA_μ^a 和 δC^a 引入相应的外源 u_a^μ 和 v^a，将生成泛函写为

$$
Z[J,\overline{\zeta},\zeta,\xi,u,v]=\int \mathrm{D}A_\mu^a\,\mathrm{D}\pi_a^\mu\,\mathrm{D}\lambda_k^a\,\mathrm{D}\overline{C}^a\,\mathrm{D}C^a \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}+J_a^\mu A_\mu^a +\overline{\zeta}^a C^a+\overline{C}^a\zeta^a+\xi_k^a\lambda_k^a+u_a^\mu\,\delta A_\mu^a+v^a\delta C^a)\right\}. \tag{35}
$$

在(34)式变换下，$\mathscr{L}^{\mathrm{P}}+\mathscr{L}_{\mathrm{fix}}+\mathscr{L}_{\mathrm{gh}}$ 是不变的．变换(34a)和(34b)是第一类约束作为规范生成元所产生的变换，它不会离开约束超曲面[12]．因此，在上述变换下，$\delta\mathscr{L}_m\approx 0$．这样，在(34)式变换下，$\delta\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}\approx 0$．变换(34)的 Jacobi 行列式为 1．生成泛函(35)在(34)式变换下不变,就有

$$
\int \mathrm{D}A_\mu^a\,\mathrm{D}\pi_a^\mu\,\mathrm{D}\lambda_k^a\,\mathrm{D}\overline{C}^a\,\mathrm{D}C^a \left[\int \mathrm{d}^4x\,(J_a^\mu\delta A_\mu^a+\overline{\zeta}^a\delta C^a+\delta\overline{C}^a\zeta^a)\right] \times\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{P}}+J_a^\mu A_\mu^a+\overline{\zeta}^a C^a+\overline{C}^a\zeta+\xi_k^a\lambda_k^a+u_a^\mu\,\delta A_\mu^a+v^a\delta C^a)\right\}=0, \tag{36}
$$

由此得 Green 函数的 Ward－Takahashi 恒等式

$$
\int \mathrm{d}^4x\left[J_a^\mu\frac{\delta}{\delta u_a^\mu}-\overline{\zeta}^a\frac{\delta}{\delta v^a}-\frac{1}{\alpha_2}\,\zeta^a\partial_\mu\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}\right)\right]Z[J,\overline{\zeta},\zeta,\xi,u,v]=0. \tag{37}
$$

在(34)式变换下，沿着约束决定的超曲面上，有效正则作用量不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1．按(23)式得系统的量子 BRS 守恒荷为

$$
Q=\int \mathrm{d}^3x\,(\pi_a^\mu\,\delta A_\mu^a+\overline{\pi}_a\delta C^a+\delta\overline{C}^a\pi_a), \tag{38}
$$

其中$\overline{\pi}_a$ 和 π_a 分别为 C^a和$\overline{C}^a$的正则动量．这样勿需作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，即可导出 BRS 变换下的 Ward－Takahashi 恒等式和守恒量．

5 非 Abel－Chern－Simons 规范场

近来大量的工作研究了(2+1)维规范理论的拉氏量中含 Chern－Simons 项后，在 Abel 规范理论中呈现出分数自旋和分数统计性质[17,18]．这一性质在量子分数 Hall 效应乃

至高温超导理论中得到应用[19]．在文[17,18]中分数角动量是基于经典拉氏量按 Noether 定理导出的，在量子 水平上该结论是否有效，应仔细研究．根据这里给出的理论形式，空间转动不变性给出的量子守恒角动量，由(23)式导出的结果，不难验证与文[17,18]中的结果相同．而在非 Abel－Chern－Simons 理论，情况则不同．

(2+1)维非 Abel－Chern－Simons 规范场 A_μ^a 与物质场 ψ 耦合的拉氏量密度为[16]

$$\mathbb{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu^a A_\rho^a+\frac{1}{3}f^{abc}A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c)$$
$$+\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}A_\mu^a T^a)\psi-m\overline{\psi}\psi \ , \tag{39}$$

场 A_μ^a，$\psi_{(\alpha)}^a$ 和 $\overline{\psi}_{(\alpha)}^a$ 的正则共轭动量分别为

$$\pi^{a\mu}=F^{a\mu 0}+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{0\mu\nu}A_\nu^a \ , \tag{40}$$

$$\overline{P}_{(\alpha)}^a=-\mathrm{i}\,(\overline{\psi}^a\gamma_0)_{(\alpha)}\ ,\ P_{(\alpha)}^a=0, \tag{41}$$

系统存在三个初级约束：

$$\Lambda_1^a=\pi^{ao}\approx 0\ , \tag{42}$$

$$\overline{\theta}_{(\alpha)}^a=\overline{P}_{(\alpha)}^a+\mathrm{i}(\overline{\psi}^a\gamma_0)_{(\alpha)}\approx 0, \tag{43}$$

$$\theta_{(\alpha)}^a=P_{(\alpha)}^a\approx 0. \tag{44}$$

初级约束(43)和(44)式的自洽性条件不导致新的约束(确定拉氏乘子)．初级约束(42)式的自洽性条件给出次级约束

$$\chi^a=-\partial_i\pi^{ai}+f_{bc}^{\ a}A_i^b\pi_c^i-\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a+if_{bc}^a\overline{\psi}^b\gamma_0\psi^c\approx 0. \tag{45}$$

将约束作线性组合

$$\Lambda_2^a=f_{\ bc}^{a}(\overline{\psi}^b P^c+\overline{P}^b\psi^c)+\partial_i\pi^{ai}-f_{bc}^{\ a}A_i^b\pi_c^i+\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}\partial_i A_j^a\ . \tag{46}$$

不难验证，Λ_1^a 和 Λ_2^a 为第一类约束，$\overline{\theta}^a$ 和 θ^a 为第二类约束．

按 Faddeev－Senjanovic 对约束 Hamilton 系统的量子化程序，对每一个第一类约束，需选取一个规范条件．当规范场与物质场耦合时，采用辐射规范($A_0=0$，$\partial_i A^i=0$)是不恰当的[15]．与文[16]不同，我们采用另外规范条件．考虑 Coulomb 规范

$$\Omega_2^a=\partial^i A_i^a\approx 0, \tag{47}$$

由 Ω_2^a 的自洽性条件 $\dot{\Omega}_2^a\approx 0$，可选另一规范条件

$$\Omega_1^a=\partial^i\pi_i^a+\nabla^2 A_0^a-f_{\ bc}^{a}A_i^b\partial^i A_0^c\approx 0. \tag{48}$$

不难验证 $\det\{\overline{\theta},\theta\}$ 与场量无关．而 $\det\{\Lambda^a,\Omega^b\}=\det M^{ab}$，

$$M^{ab}=(\delta^{ab}\partial^2-f^{abc}A_i^c\partial^i)\delta(x-y). \tag{49}$$

Green 函数的相空间生成泛函可写为

$$Z[J,\overline{\eta},\eta,\overline{\zeta},\zeta,\xi]=\int \mathrm{D}A_\mu^a\,\mathrm{D}\pi_a^\mu\,\mathrm{D}\psi\,\mathrm{D}\overline{P}\,\mathrm{D}\overline{\psi}\,\mathrm{D}P\,\mathrm{D}\lambda_k^a\,\mathrm{D}\overline{C}^a\,\mathrm{D}C^a$$

$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\,(\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}+J^{\mu}_{a}A^{a}_{\mu}+\overline{\psi}\eta+\overline{\eta}\psi+\overline{\zeta}^{a}C^{a}+\overline{C}^{a}\zeta^{a}_{0}+\xi^{a}_{k}\lambda^{a}_{k})\right\}, \tag{50}$$

其中

$$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}=\pi^{\mu}_{a}\dot{A}^{a}_{\mu}+\overline{P}\dot{\psi}+\dot{\overline{\psi}}P-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda^{a}_{k}\Lambda^{a}_{k}-\frac{1}{2\alpha_1}(\Omega^{a}_{1})^2-\frac{1}{2\alpha_2}(\;{}^{a}_{2})^2-\partial^{\mu}\overline{C}^{a}D^{a}_{b\mu}C^{b}. \tag{51}$$

在空间转动下，$\mathscr{L}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{eff}}$是不变，由(23)式，得守恒量

$$\mathscr{J}_{jk}=\int \mathrm{d}^2x\left\{\pi^{\mu}_{a}\left(x_k\frac{\partial A^{a}_{\mu}}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial A^{a}_{\mu}}{\partial x_k}\right)+\pi^{\mu}_{a}\left(\sum\nolimits_{jk}\right)_{\mu\nu}A^{\nu}_{a}-\mathrm{i}\overline{\psi}^{a}\gamma_0 S_{jk}\psi^{a}\right.$$

$$\left.+\overline{P}\left(x_k\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)+\overline{\pi}_a\left(x_k\frac{\partial C^{a}}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial C^{a}}{\partial x_k}\right)+\left(x_k\frac{\partial\overline{C}^{a}}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial\overline{C}^{a}}{\partial x_k}\right)\pi_a\right\}, \tag{52}$$

其中

$$\left(\sum\nolimits_{\rho\sigma}\right)_{\mu\nu}=g_{\rho\mu}g_{\sigma\gamma}-g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}, \tag{53}$$

$$S_{jk}=\frac{1}{4}[\gamma_j,\gamma_k]. \tag{54}$$

可见系统的角动量与由经典拉氏量按Noether定理导出的结果是不同的，这里还必须计及鬼粒子对系统角动量的贡献．系统的分数角动量性质有待进一步研究．

参 考 文 献

[1] 李子平，经典和量子约束系统及其对称性质，北京工业大学出版社，北京，1993年.
[2] L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.*, **1**(1970)1.
[3] P. Senjanovic, *Ann. Phys.*, (NY), **100**(1976)227.
[4] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, Quantization of Fields with Constraints, Springer－Verlag, Berlin, 1991.
[5] M. Henneaux, *Phys. Reports*, **126**(1985)1.
[6] M. Henneaux, C. Teilboim, Quantization of Gauge System, Princeton University Press, 1992.
[7] H. Suura, B. L. Young, *Phys. Rev.*, **D8**(1973)875.
[8] B. L. Young, Introduction to Quantum Field Theories, Science Press, Beijing, 1987.
[9] M. M. Mizrahi, *J. Math. Phys.*, **19**(1978)298.
[10] T－I. Nishikawa, *Phys. Lett.*, **B309**(1993)351.
[11] 李子平，高能物理与核物理，**18**(1994)697.
[12] Ziping Li, *Int. J. Theor. Phys.*, **34**(1995)523.
[13] W. Siegel, *Phys. Lett.*, **B128**(1983)397.
[14] 李子平，物理学报，**41**(1992)710.
[15] K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Lecture Notes in Physics, 169, Springer－Verlag, Berlin, 1982.
[16] A. Foussats. E. Manavella, C. Repetto *et al.*, *Int. J. Theor. Phys.*, **34**(1995)1037.
[17] R. Banerjee, *Phys. Rev.*, **D48**(1993) 2905; *Nucl. Phys.*, **B419**(1994)611.
[18] J. K. Kim, *W－T. Kim, H. Shin, J. Phys., A: Math. Gen.*, **27**(1994)6067.
[19] A. Lerda, Anyons, Springer－Verlag, Berlin, 1992.

Global Symmetry in Phase – Space Path Integral for a System With a Singular Lagrangian

Li Ziping

(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)

Received 15 January 1996

Abstract

Based on the phase – space generating functional of a system with a singular Lagrangian, the Ward identities under global transformation in phase space are deduced. The quantum conservation laws under the global symmetry transiormation are also derived which is in general different from classical Hoether′s ones. The preliminary application of our formulation to the Yang – Mills theory the Ward – Takahashi identity and BRS conserved quantity for BRS transformation are presented. Applying to non – Abelian – Chern – Simons theory the quantum conserved angular momentum (QCAM) are obtained. The QCAM differs from classical one because the former needs to take into account the distribution of angular momentum of ghost in non – Abelian – Chern – Simons theory.

Key words singular Lagrangian, quantization of path integral, conservation law, Chern – Simons theory.