第 21 卷 第 11 期 高能物理与核物理 Vol.21, No.11
1997年 11 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1997

双参数变形多模玻色算符的代数结构及其应用(Ⅰ)

于肇贤[1)] 张德兴
(大庆石油学院电子工程系 安达 151400)
刘业厚
(重庆石油高等专科学校 重庆 630042)

1996-11-26收稿

摘 要

构造了两个满足量子 Heisenberg-Weyl代数的双参数变形多模玻色算符,研究了它们的代数结构.作为应用,给出了双参数变形多模量子群 $SU(2)_{q,s}$和 $SU(1,1)_{q,s}$的 Holstein-Primakoff 实现,并分别构造了这两个玻色算符二次幂的本征态,证明了它们的完备性.

关键词 多模玻色算符,双参数变形,Holstein-Primakoff实现,完备性.

1 引 言

近年来,量子群、量子杨-Baxter方程的研究引起了物理学和数学工作者的极大关注[1].量子群在物理学中的应用是一个人们十分关注的问题.类似于通常的简谐振子可以给出角动量理论的 Jordan-Schwinger表象,1989 年几位作者各自独立地提出了 q 变形振子的概念[2-4],给出了最简单的量子群 $SU(2)_q$的玻色子表象.人们还发现,可以将 Lie 代数 $SU(2)$和谐振子的许多经典结果移植到 q 变形情形,其中包括 Jordan-Schwinger实现[2,3]、Holstein-Primakoff实现[5]等.作为通常 Glauber[6]相干态的推广,人们又得到了 q-Glauber相干态,并借助 q 积分公式证明该态是完备的,也即构成完备 Hilbert 空间[7].

实际上,从物理应用的角度看,多个变形参数的多模量子群及其玻色算符可能更有用一些.最近,人们得到了双参数变形量子群 $SU(2)_{q,s}$和 $SU(1,1)_{q,s}$的 Jordan-Schwinger实现和 Holstein-Primakoff实现[8-11],还得到了双参数变形玻色振子湮没算符二次幂及高次幂的本征态及完备性的证明[12,13].然而这些工作都是基于双模(如 Jordan-Schwinger实现)和单模(如玻色湮没算符的本征态)而言的.一个自然的问题是,能否找到这样的多模双参数

1) 胜利油田职工大学,山东东营 257004.

变形玻色算符,它具有玻色湮没算符的代数结构,用它可以构造出多模量子群 $SU(2)_{q,s}$和 $SU(1,1)_{q,s}$的 Holstein-Primakoff实现及该算符二次幂的本征态?本文将对这些问题给出肯定的回答.

2 双参数变形多模玻色算符与 $SU(2)_{q,s}$和 $SU(1,1)_{q,s}$多模 Holstein-Primakoff 实现

对于一个多模场,由于不同模是用来描述彼此在动力学上没有关联的不同量子系统的,因此有理由认为不同模之间的算符是对易的[14].为了描述多模场,定义 k 个彼此独立的双参数变形玻色振子 $\{a_1^+,a_1,n_1\},\{a_2^+,a_2,n_2\},\cdots,\{a_k^+,a_k,n_k\}$,它们满足关系[8]

$$a_i^+a_i=[n_i]_{q,s},\quad a_ia_i^+=[n_i+1]_{q,s},\tag{1a}$$

$$[n_i,a_i^+]=a_i^+,\quad [n_i,a_i]=-a_i,\tag{1b}$$

$$a_ia_i^+-s^{-1}qa_i^+a_i=(sq)^{-n_i},\quad a_ia_i^+-(sq)^{-1}a_i^+a_i=(s^{-1}q)^{n_i},\tag{1c}$$

式中 $i=1,2,3,\cdots,k$.记号 $[x]_{q,s}=s^{1-x}[x]=s^{1-x}(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$.

定义一个双参数变形 k 模玻色算符

$$A_k=a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k\left\{\frac{[n_1]_{q,s}[n_2]_{q,s}\cdots[n_{k-1}]_{q,s}[n_k]_{q,s}}{\min([n_1]_{q,s},[n_2]_{q,s},\cdots,[n_{k-1}]_{q,s},[n_k]_{q,s})}\right\}^{-1/2}.\tag{2}$$

容易证明

$$A_kA_k^+-s^{-1}qA_k^+A_k=(sq)^{-N_k},\quad A_kA_k^+-(sq)^{-1}A_k^+A_k=(s^{-1}q)^{N_k}.\tag{3}$$

式中 $N_k=\min\{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1},n_k\}$,还可以得到

$$[N_k,A_k^+]=A_k^+,\quad [N_k,A_k]=-A_k.\tag{4}$$

可见,算符 $\{A_k^+,A_k,N_k\}$和 $\{a_i^+,a_i,n_i\}(i=1,2,\cdots,k)$具有相同的代数结构,都满足量子 Heisenberg-Weyl代数的对易关系.可以容易地得到量子群 $SU(2)_{q,s}$的 k模 Holstein-Primakoff实现:

$$(J_k)_+=\sqrt{[2\sigma+1-N_k]_{q,s^{-1}}}\,A_k^+,\ (J_k)_-=A_k\sqrt{[2\sigma+1-N_k]_{q,s^{-1}}},\tag{5a}$$

$$(J_k)_0=N_k-\sigma,\tag{5b}$$

式中 $\sigma=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\cdots$是角动量量子数,记号 $[x]_{q,s^{-1}}=s^{x-1}[x]$.容易证明(5a)、(5b)式满足对易关系

$$s^{-1}(J_k)_+(J_k)_--s(J_k)_-(J_k)_+=s^{-2(J_k)_0}[2(J_k)_0],\tag{6a}$$

$$[(J_k)_0,(J_k)_\pm]=\pm(J_k)_\pm.\tag{6b}$$

特别地,当 $s\to1,k=2$ 时,(5a)、(5b)式退化为双模 $SU(2)_q$的 Holstein-Primakoff实现[15].

为了得到量子群 $SU(1,1)_{q,s}$的多模正分立和负分立 Holstein-Primakoff实现,再定义一组 k 个彼此独立的双参数变形玻色振子,即 $\{b_1^+,b_1,n_1^b\},\{b_2^+,b_2,n_2^b\},\cdots,\{b_k^+,b_k,n_k^b\}$,它们满足[8]

$$b_i^+b_i=[n_i^b]_{q,s^{-1}},\quad b_ib_i^+=[n_i^b+1]_{q,s^{-1}},\tag{7a}$$

$$[n_i^b,\ b_i^+] = b_i^+,\quad [n_i^b,\ b_i] = -b_i, \tag{7b}$$

$$b_i b_i^+ - sq b_i^+ b_i = (sq^{-1})^{n_i^b}, \tag{7c}$$

式中 $i = 1,2,\cdots,k$.定义另一个双参数变形 k 模玻色算符

$$B_k = b_1 b_2 \cdots b_{k-1} b_k \left\{ \frac{[n_1^b]_{q,s^{-1}}[n_2^b]_{q,s^{-1}}\cdots[n_{k-1}^b]_{q,s^{-1}}[n_k^b]_{q,s^{-1}}}{\min([n_1^b]_{q,s^{-1}},[n_2^b]_{q,s^{-1}},\cdots,[n_{k-1}^b]_{q,s^{-1}},[n_k^b]_{q,s^{-1}})} \right\}^{-1/2}. \tag{8}$$

容易证明

$$B_k B_k^+ - sq B_k^+ B_k = (sq^{-1})^{N_k^b}, \tag{9}$$

式中 $N_k^b = \min\{n_1^b, n_2^b, \cdots, n_{k-1}^b, n_k^b\}$.还可以得到

$$[N_k^b,\ B_k^+] = B_k^+,\quad [N_k^b,\ B_k] = -B_k. \tag{10}$$

可见,算符 $\{B_k^+,\ B_k,\ N_k^b\}$和 $\{b_i^+,\ b_i,\ n_i^b\}(i = 1,2,\cdots,k)$具有相同的代数结构,都满足量子 Heisenberg-Weyl 代数的对易关系. 至此, 可以得到量子群 $SU(1,\ 1)_{q,s}$ 的 k 模 Holstein-Primakoff实现:

正分立情形:

$$(L_k^a)_+ = s^{-1}A_k^+\sqrt{[2\gamma + N_k]_{q,s}},\quad (L_k^a)_- = s^{-1}\sqrt{[2\gamma + N_k]_{q,s}}\ A_k, \tag{11a}$$

$$(L_k^a)_0 = \gamma + N_k, \tag{11b}$$

这里 N_k的意义同上面的定义,未加上标 a.

负分立情形:

$$(L_k^b)_+ = s\sqrt{[2\gamma + N_k^b]_{q,s^{-1}}}\ B_k,\ (L_k^b)_- = sB_k^+\sqrt{[2\gamma + N_k^b]_{q,s^{-1}}}, \tag{12a}$$

$$(L_k^b)_0 = -(\gamma + N_k^b). \tag{12b}$$

(11)、(12)式中 $\gamma = -\dfrac{1}{2},\ -1,\cdots$.容易证明

$$s^{-1}(L_k^{a(b)})_+(L_k^{a(b)})_- - s(L_k^{a(b)})_-(L_k^{a(b)})_+ = -s^{-2(L_k^{a(b)})_0}[2(L_k^{a(b)})_0], \tag{13a}$$

$$[(L_k^{a(b)})_0,\ (L_k^{a(b)})_\pm] = \pm(L_k^{a(b)})_\pm. \tag{13b}$$

3　双参数变形多模玻色算符 A_k和 B_k二次幂的本征态

从第 2 节的讨论,发现算符 A_k和 B_k具有和双参数变形玻色振子湮没算符相同的性质,这启发我们可以唯象地构造出 A_k和 B_k二次幂的本征态.

3.1　A_k^2的本征态及完备性的证明

在多模 Fock 空间 $\{|r,\ r,\ \cdots\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{[r]_{q,s}!}}\ (A_k^+)^r|0,0,\cdots\rangle,\ r = 0,1,2,\cdots.\}$内,显然有

$$A_k^+|r,r,\cdots\rangle = \sqrt{[r+1]_{q,s}}\,|r+1,\ r+1,\ \cdots\rangle, \tag{14a}$$

$$A_k|r,r,\cdots\rangle = \sqrt{[r]_{q,s}}\,|r-1,\ r-1,\ \cdots\rangle, \tag{14b}$$

$$A_k|0,\ 0,\ \cdots\rangle = 0. \tag{14c}$$

Fock 空间的完备性由下面的单位分解表征:

$$I=\sum_{r=0}^{\infty}|r,r,\cdots\rangle\langle r,r,\cdots|. \tag{15}$$

构造下面两个态矢

$$|\psi_0\rangle=a_0\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r}}{\sqrt{[2r]_{q,s}!}}|2r,2r,\cdots\rangle, \tag{16a}$$

$$|\psi_1\rangle=a_1\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r+1}}{\sqrt{[2r+1]_{q,s}!}}|2r+1,2r+1,\cdots\rangle, \tag{16b}$$

式中 a_0、a_1为待定归一化系数,α为复参数.容易发现,这两个态矢均为 A_k^2的本征值均为α^2的本征态,即

$$A_k^2|\psi_0\rangle=\alpha^2|\psi_0\rangle,\quad A_k^2|\psi_1\rangle=\alpha^2|\psi_1\rangle. \tag{17}$$

类似文献 [12]的步骤,可以得到 A_k^2的两个正交归一化本征态为

$$|\psi_0\rangle=(\cosh_{q,s}(|\alpha|^2))^{-1/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r}}{\sqrt{[2r]_{q,s}!}}|2r,2r,\cdots\rangle, \tag{18a}$$

$$|\psi_1\rangle=(\sinh_{q,s}(|\alpha|^2))^{-1/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r+1}}{\sqrt{[2r+1]_{q,s}!}}|2r+1,\ 2r+1,\cdots\rangle. \tag{18b}$$

容易证明 $|\psi_0\rangle$和 $|\psi_1\rangle$构成一个完备 Hilbert 空间,即满足

$$I=\int d\mu(\alpha)\left(\frac{1}{a_0^2}|\psi_0\rangle\langle\psi_0|+\frac{1}{a_1^2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\right). \tag{19}$$

式中积分测度

$$d\mu(\alpha)=(2\pi s^2)^{-1}e_{q,s^{-1}}^{-s^{-2}|\alpha|^2}d_{q,s^{-1}}|\alpha|^2 d\theta. \tag{20}$$

3.2 B_k^2的本征态及完备性的证明

在多模 Fock 空间$\left\{|\tilde r,\tilde r,\cdots\rangle=\frac{1}{\sqrt{[\tilde r]_{q,s^{-1}}!}}(B_k^+)^{\tilde r}|0,0,\cdots\rangle,\ \tilde r=0,1,2,\cdots.\right\}$内,显然有

$$B_k^+|\tilde r,\tilde r,\cdots\rangle=\sqrt{[\tilde r+1]_{q,s^{-1}}}|\tilde r+1,\tilde r+1,\cdots\rangle, \tag{21a}$$

$$B_k|\tilde r,\tilde r,\cdots\rangle=\sqrt{[\tilde r]_{q,s^{-1}}}|\tilde r-1,\tilde r-1,\cdots\rangle, \tag{21b}$$

$$B_k|0,0,\cdots\rangle=0. \tag{21c}$$

Fock 空间的完备性由下面的单位分解表征

$$I=\sum_{\tilde r=0}^{\infty}|\tilde r,\tilde r,\cdots\rangle\langle\tilde r,\tilde r,\cdots|. \tag{22}$$

构造下面两个态矢

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = b_0 \sum_{\tilde{r}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2\tilde{r}}}{\sqrt{[2\tilde{r}]_{q,s^{-1}}!}} \,|2\tilde{r}, 2\tilde{r}, \cdots\rangle, \tag{23a}$$

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = b_1 \sum_{\tilde{r}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2\tilde{r}+1}}{\sqrt{[2\tilde{r}+1]_{q,s^{-1}}!}} \,|2\tilde{r}+1, 2\tilde{r}+1, \cdots\rangle, \tag{23b}$$

式中 b_0, b_1为待定归一化系数，α为复参数.容易发现，这两个态矢均为 B_k^2的本征值为α^2的本征态，即

$$B_k^2\,|\,\tilde{\psi}_0\rangle = \alpha^2\,|\tilde{\psi}_0\rangle, \quad B_k^2\,|\,\tilde{\psi}_1\rangle = \alpha^2\,|\,\tilde{\psi}_1\rangle. \tag{24}$$

类似文献 [12]的步骤，可以得到 B_k^2的两个正交归一化本征态为

$$|\tilde{\psi}_0\rangle = (\cosh_{q,s^{-1}}(|\alpha|^2))^{-1/2} \sum_{\tilde{r}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2\tilde{r}}}{\sqrt{[2r]_{q,s^{-1}}!}} \,|2\tilde{r}, 2\tilde{r}, \cdots\rangle, \tag{25a}$$

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = (\sinh_{q,s^{-1}}(|\alpha|^2))^{-1/2} \sum_{\tilde{r}=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2\tilde{r}+1}}{\sqrt{[2r+1]_{q,s^{-1}}!}} \,|2\tilde{r}+1, 2\tilde{r}+1, \cdots\rangle. \tag{25b}$$

利用积分测度

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu(\alpha)} = (2\pi s^{-2})^{-1} \mathrm{e}_{q,s}^{-s^2|\alpha|^2} \mathrm{d}_{q,s}|\alpha|^2 \mathrm{d}\theta \tag{26}$$

容易证明 $|\tilde{\psi}_0\rangle$和 $|\tilde{\psi}_1\rangle$构成一个完备 Hilbert 空间，即满足

$$I = \int \mathrm{d}\widetilde{\mu(\alpha)} \left(\frac{1}{b_0^2} \,|\tilde{\psi}_0\rangle\langle\tilde{\psi}_0| + \frac{1}{b_1^2} \,|\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| \right). \tag{27}$$

4 讨　　论

本文给出的双参数变形多模玻色算符 A_k和 B_k具有和双参数变形振子湮没算符相同的代数对易式，因而可以将双参数变形振子湮没算符有关的工作移植到 A_k和 B_k作用的情形(本文给出的两则应用说明了这一点)，这对于研究双参数变形多模量子群的应用将是有意义的.

参　考　文　献

[1] 马中骐，杨-巴克斯特方程和量子包络代数，科学出版社，1993，P334—343 中所列有关文献.

[2] A.J. Macfar lane, *J. Phys.*, **A22**(1989)4581.

[3] L.C. Biedenharn, *J.Phys.*, **A22**(1989)L873.

[4] C.P. Sun, H.C. Fu, *J.Phys.*, **A22**(1989)L983.

[5] J.Katriel, A.I.Solomon, *J.Phys.*, **A24**(1991)2093.

[6] R.J.Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **10**(1963)84.

[7] R.W.Gray, C.A.Neison, *J.Phys.*, **A23**(1990)L945.

[8] 井思聪，中国科学技术大学学报，**23**(1993)55.

[9] Jing Sicong, Frank Cuypers, *Commun. Theor. Phys.*, **19**(1993)495.

[10] 周焕强、贺劲松、管习文,高能物理与核物理,**19**(1995)420.
[11] 于肇贤、于舸、张德兴等,高能物理与核物理,**20**(1996)1082.
[12] 周焕强、贺劲松、张新明,高能物理与核物理,**19**(1995)251.
[13] 王继锁、孙长勇、贺金玉,高能物理与核物理,**20**(1996)703.
[14] 郭光灿,量子光学,高等教育出版社,1990,第 67 页.
[15] A.I.Solomon, J.Katriel, *J. Phys.*, **A26**(1993)5443.

Algebraic Structure of Two-Parameter Deformed Multi-Mode Bose Operators and Their Applications (Ⅰ)

Yu Zhaoxian Zhang Dexing

(*Department of Electronic Engineering, Daqing Institute of Petroleum, Anda* 151400)

Liu Yehou

(*Chongqing Petroleum Advanced College, Chongqing* 630042)

Received 26 November 1996

Abstract

Two two-parameter deformed multi-mode bose operators which satisfy quantum Heisenberg-Weyl algebra are constructed, and their algebraic structure are studied. As examples, the Holstein-Primokoff realizations for multi-mode quantum group $SU(2)_{q,s}$ and $SU(1,1)_{q,s}$ are presented, and the eigenstates of the second power of the two-parameter deformed multi-mode bose operators are constructed, and their completenesses are proved.

Key words multi-mode bose operator, two-parameter deformation, Holstein-Primakoff realization, completeness.