第 21 卷　第 7 期
1997年7月

高 能 物 理 与 核 物 理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.21, No.7
July, 1997

集体运动态中的辛弱数混合*

卢　大　海

(北京大学物理系　北京　100871)

1996-06-17收稿

摘　　要

在由 S 和 D 核子关联对构成的原子核集体运动态中，存在由辛弱数混合造成的伪态成份. 给出了计算这种伪态成份的公式，并进行计算和讨论.

关键词　集体运动态，核子关联对，辛弱数混合，伪态成份.

1　引　　言

辛弱数混合问题(seniority mixing)是相互作用玻色子模型[1]的微观理论研究中所遇到的一个重要困难. 通常 S 和 D 关联对直接由下面的(1)和(2)式的核子对来定义[2]. 然而这样定义的 S 对和 D 对并不是相互独立的，因为它们不相互对易. 这样就产生了所谓的辛弱数混合问题，即由两个或两个以上 D 对构成的态含有多种辛弱数不同的分量，特别是含有辛弱数为零($v=0$)的分量，因而产生了伪态成份. 文献[3]为解决这个问题定义了辛弱数投影算符，形式地避开了这个困难，但是在更接近现实的非简并多 j 壳的情况下，并没有给出投影算符的明显表达式来进行这种投影. 文献[4, 5]引入了量子化的波戈留玻夫变换(OBT)[5]来明显地、严格地处理辛弱数混合问题，但是这又给计算带来了一些复杂性.

本文利用 OBT 方法分析辛弱数混合的严重程度. 对这个问题的分析将说明在 IBM 的微观理论中，利用通常定义的核子对构造集体态是否合理，因而也就说明在实际计算中处理辛弱数混合问题有无实践上的必要性.

2　量子化的波戈留玻夫变换和不成对粒子算符

在 IBM 的微观理论中，S 和 D 对通常是用核子的产生算符 $c_{jm}^{\dagger}$ 来定义的[2](本文将其称为“普通的”S 对和 D 对，并用 $S(u)$ 和 $D(u)$ 表示)，即

$$S^{\dagger}(u)=\sum_{j}\varphi_{j}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c_{j}^{\dagger}c_{j}^{\dagger}\right)_{0},\tag{1}$$

* 国家自然科学基金资助.

$$D_{2\mu}^{\dagger}(u)=\sum_{j\leqslant j'}\psi_{jj'}\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{jj'}}}(c_j^{\dagger}c_{j'}^{\dagger})_{2\mu}, \tag{2}$$

这里φ_j是$\psi_{jj'}$是各关联对的结构迭加系数，可用变分法来确定[6, 7]. 然而这样定义的$S(u)$和$D(u)$对并不能完全代表两个相互独立的自由度，因为它们不相互对易. 这样就会发生辛弱数混合从而在携带有多个$D(u)$对的集体运动态中产生伪态成份. 为了解决这个问题，OBT方法[5]按如下方式修改了S对和D对的定义，

$$S^{\dagger}=\sum_j\varphi_j s_j^{\dagger}, \tag{3}$$

$$D_{2\mu}^{\dagger}=\sum_{j\leqslant j'}\psi_{jj'}\frac{1}{\sqrt{1+\delta_{jj'}}}(a_j^{\dagger}a_{j'}^{\dagger})_{2\mu}, \tag{4}$$

这里$s_j^{\dagger}$是每一个j轨道上新定义的S对，而$a_{jm}^{\dagger}$是所谓的不成对粒子的产生算符，当它作用于一个态矢量时，将使该态的辛弱数加1. 它们由如下的量子化的波戈留玻夫变换(OBT)与核子产生算符$c_{jm}^{\dagger}$相联系[4, 5]，

$$c_{jm}^{\dagger}=a_{jm}^{\dagger}\hat{u}_j-\frac{s_j^{\dagger}}{\sqrt{2\hat{S}_j}}a_{\bar{j}m}, \tag{5}$$

而$\hat{u}_j$和$2\hat{S}_j$的定义是

$$\hat{u}_j=\sqrt{1-\frac{\hat{n}_s(j)}{2\hat{S}_j}},$$

$$2\hat{S}_j=\Omega_j-\hat{n}_a(j),\quad \left(\Omega_j=j+\frac{1}{2}\right),$$

$$\hat{n}_s(j)=s_j^{\dagger}s_j,$$

$$\hat{n}_a(j)=\sum_m a_{jm}^{\dagger}a_{jm}.$$

(5)式的OBT变换的功能是把非零对自由度从核子自由度$c_{jm}^{\dagger}$中分离出去. 可以证明[5]

$$[s_j,\ a_{j'm'}^{\dagger}]=0, \tag{6}$$

这就是说OBT中的j壳上的新s_j对和不成对粒子算符是相互独立的(但由于泡利不相容原理，在每一个j壳上它们仍然相互堵塞). 正是由于这个原因，如果用(3)和(4)式所定义的修改后的S、D对构造集体运动态，则这样的集体态中就不再有辛弱数混合的问题. 可以证明[5]s_j对和不成对粒子算符各自满足如下的对易关系式1).

$$[s_j,\ s_{j'}^{\dagger}]=\delta_{jj'}, \tag{7}$$

$$\{a_{jm}^{\dagger},\ a_{j'm'}^{\dagger}\}=0, \tag{8}$$

$$\{a_{jm},\ a_{j'm'}^{\dagger}\}=\delta_{jj'}\delta_{mm'}-a_{\bar{j}m}^{\dagger}\frac{\delta_{jj'}}{2\hat{S}_j}a_{\bar{j}'m'}. \tag{9}$$

1) (6)、(7)、(9)各式在它们作用于被填满(即$n_s(j)+n_a(j)=\Omega_j$)的准自旋态时不适用.

3　辛弱数混合的计算方法

利用(5)式的OBT变换，可以把通常的 $J=0$，2 核子对用 s_j 对和不成对粒子算符 $a_{jm}^{\dagger}$ 表示出，即

$$(c_j^{\dagger}c_j^{\dagger})_0 = \sqrt{\frac{2}{\Omega_j}}\, s_j^{\dagger}\sqrt{\Omega_j - \hat{n}_s(j) - \hat{n}_a(j)}\,, \tag{10}$$

$$(c_1^{\dagger}c_2^{\dagger})_{2\mu} = \hat{u}_1' A_{2\mu}^{\dagger}(1,\ 2)\hat{u}_2 - \frac{s_1^{\dagger}}{\sqrt{2\hat{S}_1}}\frac{s_2^{\dagger}}{\sqrt{2\hat{S}_2-\delta_{12}}}A_{\tilde{2}\mu}(1,\ 2)$$
$$-\frac{s_2^{\dagger}}{\sqrt{2\hat{S}_2}}B_{2\mu}^{\dagger}(1,\ 2)\hat{u}_1 + \frac{s_1^{\dagger}}{\sqrt{2\hat{S}_1}}B_{2\mu}^{\dagger}(2,\ 1)\hat{u}_2, \tag{11}$$

这里指标 1，2 是 j_1，j_2的简写，角动量的耦合方向是从 j_1到 j_2，而

$$A_{2\mu}^{\dagger}(1,\ 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^{\dagger}a_2^{\dagger})_{2\mu},$$
$$B_{2\mu}^{\dagger}(1,\ 2) = (a_1^{\dagger}a_{\tilde{2}})_{2\mu},$$
$$\hat{u}_1' = \sqrt{1-\frac{\hat{n}_s(1)}{2\hat{S}_1+1}}\,,$$

上述 A 和 B 算符的对易关系式则为

$$[A_{JM}(1,\ 2),\ A_{J'M'}^{\dagger}(3,\ 4)]$$
$$= \frac{1}{2}(1-(-1)^{j_1+j_2-J}\hat{P}_{12})(1-(-1)^{j_3+j_4-J'}\hat{P}_{34})$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{13}\delta_{24} + (-1)^{J-M}\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}\sum_L\langle J-M,\ J'M'|LM_L\rangle\right.$$
$$\times\begin{Bmatrix} J' & J & L \\ j_4 & j_1 & j_2\end{Bmatrix}\delta_{23}B_{LM_L}^{\dagger}(41) - (-1)^{J-M}B_{J-M}^{\dagger}(12)\frac{\delta_{14}}{2\hat{S}_1}B_{J'M'}^{\dagger}(34)$$
$$\left.-(-1)^{J-M}A_{J-M}^{\dagger}(12)\frac{\delta_{13}\delta_{24}}{2\hat{S}_2(2\hat{S}_1-\delta_{12})}A_{\tilde{J}'M'}(34)\right\}, \tag{12}$$

$$[B_{LM_L}^{\dagger}(1,\ 2),\ A_{JM}^{\dagger}(3,\ 4)]$$
$$= (1-(-1)^{j_3+j_4-J}\hat{P}_{34})\left\{-\sum_{J'}\sqrt{(2L+1)(2J+1)}\langle LM_L,\ JM|J'M'\rangle\right.$$
$$\left.\times\begin{Bmatrix} J & J' & L \\ j_1 & j_2 & j_4\end{Bmatrix}\delta_{23}A_{J'M'}^{\dagger}(41) + A_{LM_L}^{\dagger}(12)\frac{\delta_{24}}{2\hat{S}_2}B_{JM}^{\dagger}(3,\ 4)\right\}, \tag{13}$$

这里 $\hat{P}_{12}$是交换指标 1 和 2 的交换算符(即交换 j_1 和 j_2)．$\hat{P}_{34}$是交换指标 3 和 4 的交换算符．

因为不成对粒子算符 $a^\dagger_{jm}(a_{jm})$ 使态矢量的辛弱数增加 1 (−1)[4, 5]，所以(11)式中的三项使态矢量的辛弱数分别增加 2，−2 和 0．利用(10)和(11)式，可以把由 1 个普通 $D(u)$ 对和 p 个 $S(u)$ 对构成的未归一的集体态表示为如下形式

$$\frac{1}{\sqrt{p!}}D^\dagger_{2\mu}(u)(S^\dagger(u))^p|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{p!}}\left[\sum_j\frac{1}{\sqrt{\Omega_j}}s^\dagger_j\sqrt{\Omega_j-\hat{n}_a(j)-\hat{n}_s(j)}\right]^p\sum_{j_1j_2}\psi'_{12}A^\dagger_{2\mu}(1,\ 2)|0\rangle, \tag{14}$$

这里

$$\psi'_{12}=\psi_{12}\sqrt{\frac{1+\delta_{12}}{2}}. \tag{15}$$

这表明在态中只含有一个普通的 $D(u)$ 对时没有辛弱数混合的问题．

如果集体态中 $D(u)$ 对的数目大于 1，就会有辛弱数混合的现象发生．利用(10)—(13)式可以得到含有 2 个 $D(u)$ 对态的具有确定辛弱数分量的表达式

$$\frac{1}{\sqrt{p!2!}}[D^\dagger_2(u)]^2_{JM}(S^\dagger(u))^p|0\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{p!2!}}\left[\sum_j\frac{1}{\sqrt{\Omega_j}}s^\dagger_j\sqrt{\Omega_j-\hat{n}_a(j)-\hat{n}_s(j)}\right]^p$$
$$\times\left\{\left[\sum_{j_1j_2}\psi'_{12}A^\dagger_{2\mu}(1,\ 2)\right]^2_{JM}-\sqrt{5}\sum_{j_1j_2}(\psi'_{12})^2\frac{s^\dagger_1}{\sqrt{2\hat{S}_1}}\frac{s^\dagger_2}{\sqrt{2\hat{S}_2-\delta_{12}}}\delta_{J0}\right.$$
$$\left.+10\sqrt{2}\sum_{j_1j_2j_4}\psi'_{12}\psi'_{24}\frac{s^\dagger_2}{\sqrt{2\hat{S}_2}}\begin{Bmatrix}2 & J & 2\\ j_1 & j_2 & j_4\end{Bmatrix}(1-\delta_{J0})A^\dagger_{JM}(41)\right\}|0\rangle. \tag{16}$$

上式右方的最后两项给出了由辛弱数混合而造成的伪态成份，它们含有的辛弱数分别为 0 和 2(因为它们分别含有 0 和 2 个不成对粒子算符)．含有更多 $D(u)$ 对的态之伪态成份的明显表达式可用类似方法得出．

辛弱数混合程度可由模的计算给出．由辛弱数混合而产生的伪态成份比例可定义为

(伪态成份的模) / (全部态的模)．

在态矢量含有两个普通的 D 对时，其伪态成份对模的贡献是

$$\frac{5p!}{2}\sum_{12}\sum_{1'2'}(\psi'_{12}\psi'_{1'2'})^2\frac{\delta_{J0}}{\sqrt{\Omega_1(\Omega_2-\delta_{12})}\sqrt{\Omega_{1'}(\Omega_{2'}-\delta_{1'2'})}}\frac{\varphi_1\varphi_2}{\varphi_{1'}\varphi_{2'}}\sqrt{\frac{\Omega_{1'}\Omega_{2'}}{\Omega_1\Omega_2}}$$
$$\times\sum_{p_i\leqslant\Omega_i-\Delta_i}^{|p|}\prod_i\frac{\varphi_i^{2p_i}}{p_i!}\frac{\sqrt{(\Omega_i-\Delta_i)!(\Omega_i-\Delta'_i)!}}{\Omega_i^{p_i}(\Omega_i-\Delta_i-p_i)!}(p_{1'}+\Delta_{1'})(p_{2'}+\Delta_{2'}-\delta_{1'2'})$$
$$+100p!\sum_{124}\sum_{2'}\psi'_{12}\psi'_{24}\psi'_{12'}\psi'_{2'4}\frac{1}{\sqrt{(\Omega_2-\delta_{12}-\delta_{24})(\Omega_{2'}-\delta_{12'}-\delta_{2'4})}}$$

$$\times \sum_{p_i < \Omega_i - \Delta_i^a}^{|p|} \frac{\varphi_2}{\varphi_{2'}} \sqrt{\frac{\Omega_{2'}}{\Omega_2}} \begin{Bmatrix} 2 & J & 2 \\ j_1 & j_2 & j_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & J & 2 \\ j_1 & j_{2'} & j_4 \end{Bmatrix}$$

$$\times \prod_i \frac{\varphi_i^{2p_i}}{p_i!} \frac{\sqrt{(\Omega_i - \Delta_i^a)!(\Omega_i - \Delta_i^b)!}}{\Omega_i^{p_i}(\Omega_i - \Delta_i^a - p_i)!} (p_{2'} + \delta_{22'}),$$

这里$\sum^{|p|}$表示对所有可能的配分求和(即$\sum p_i = p$),而$\Delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2}$, $\Delta_i' = \delta_{i1'} + \delta_{i2'}$, $\Delta_i^a = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i4}$, $\Delta_i^b = \delta_{i1} + \delta_{i2'} + \delta_{i4}$.

4 数值计算

4.1 单j壳

为了避免由对(1)和(2)式中的对结构迭加系数φ_j和$\psi_{jj'}$的不同选择所带来的不确定性(它们可由变分法来确定[6, 7], 取值依赖于相互作用及其强度的选择.), 首先考虑单j壳的情况. 图 1 给出由辛弱数混合而造成的伪态成份的比例随j和p的变化(态矢量含有 2 个普通的$D(u)$对和p个$S(u)$对). 由于$J = 4$和$J = 2$的态的辛弱数混合十分相近, 在图 1 中仅给出了$J = 0$和$J = 2$态的伪态成份曲线.

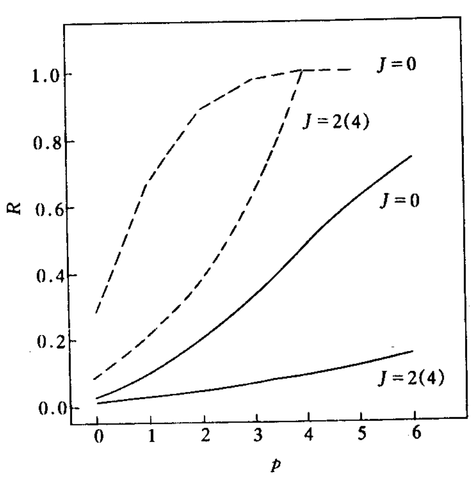

图 1　在含有两个$D(u)$对和p个$S(u)$对的单j态中的辛弱数混合的伪态成份

实线对应$j = \frac{31}{2}$, 虚线对应$j = \frac{13}{2}$.

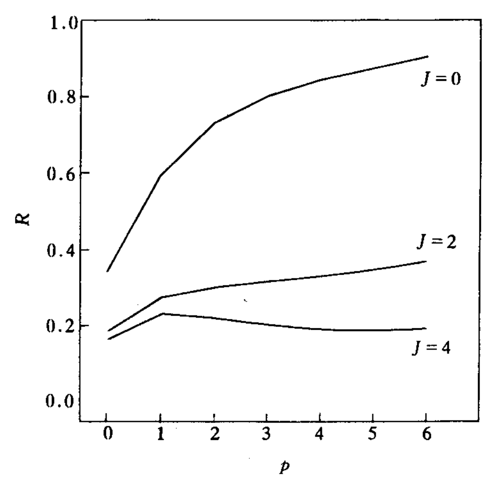

图 2　在含有两个$D(u)$对和p个$S(u)$对的多j态中的辛弱数混合的伪态成份

4.2 多j壳

在多j的场合选择了$Z = 50$—82 区域的振动型原子核为例子作典型计算, 其中结构迭加系数φ_j和$\psi_{jj'}$的计算见文献[6, 7]. 相互作用强度在计算时取为 0.18(MeV)(对力)和$0.036\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$(MeV)(四极力). 而价壳的单粒子能级(以 MeV 为单位)为$\varepsilon_{3s1/2} = 2.6$,

$\varepsilon_{2d3/2} = 2.3$，$\varepsilon_{2d5/2} = 0.9$，$\varepsilon_{1g7/2} = 0.0$，$\varepsilon_{1h11/2} = 2.4$. 这些参数是在计算 Sm 的同位素的集体运动态时所选取的[6—8]．辛弱数混合的计算结果见图 2.

从图 1 和图 2 可知即使集体态矢量仅含有 2 个普通的 $D(u)$ 对，其辛弱数混合也是十分严重的(在 $j = 7/2$ 的单 j 壳情况下，伪态比例甚至达到百分之百.)．在 $J = 0$ 态中的辛弱数混合比角动量为其他值的态中的辛弱数混合更为严重，而且随着 $S(u)$ 对的填充，辛弱数混合也会逐步加大.

从以上的计算和分析可以得到结论是：直接用普通 $S(u)$ 对和 $D(u)$ 对构造集体运动态是不适宜的，必须适当处理辛弱数混合的问题，尽管这样做会使计算变得较为复杂.

参 考 文 献

[1] A. Arima, F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.*, 35(1975)1069;
A. Arima, F. Iachello, *Ann. Phys.* (N. Y.), **99**(1976)253.

[2] M. R. Zirnbauer, D. M. Brink, *Nucl. Phys.*, **A384**(1982)1;
E. Maglionne *et al.*, *Nucl. Phys.*, **A397**(1983)102.

[3] T. Otsuka, A. Arima, F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A309**(1978)1.

[4] T. Suzuki, K. Matsuyanagi, *Prog. Theor. Phys.*, **56**(1976)1156.

[5] L. M. Yang, D. H. Lu, Z. N. Zhou, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984)223;
L. M. Yang, *Prog. Part. Nucl.*, **9**(1983)147.

[6] L. M. Yang, Z. N. Zhou, D. H. Lu, *Phys. Rev.*, **C40**(1989)2885.

[7] D. H. Lu, *Phys. Rev.*, **C47**(1993)1986.

[8] L. M. Yang, D. H. Lu, Correlated Nucleon Pair Model and Microscopic Basis of Interacting Boson Model, Commu. in Theor. Phys. (Beijing), unpublished.

Seniority Mixing in Collective States

Lu Dahai

(*Department of Physics, Peking University, Beijing*, 100871)

Received 17 June 1996

Abstract

The spurious components due to the seniority mixing in the collective states composed of the S and D nucleon pairs are expressed and evaluated.

Key words collective states, correlated nucleon pairs, seniority mixing, spurious components.