第 21 卷 第 8 期
1997年 8 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.21, No.8
Aug., 1997

有效屏蔽势的能级和波函数*

黄博文 王德云

(首都师范大学物理系 北京 100037)

1996-07-29收到

摘 要

应用点正则变换和路径积分的方法求解有效屏蔽势的能谱和波函数；并且证明有效屏蔽势具有形不变性. 从这点出发，可得到有效屏蔽势的能级.

关键词 有效屏蔽势，点正则变换，形不变性，路径积分.

1 引 言

有效屏蔽势(Effective Screened Potential——ESP)[1]与汤川势(Yukawa Potential)之间有着密切的联系，正因为如此，近些年来，不少理论物理工作者从各方面对有效屏蔽势的问题进行了研究。本文运用三种不同的计算方法，对有效屏蔽势的一些问题进行了讨论.

第一种方法运用点正则变换的方法[2]，通过求解 ESP 的 Schrödinger 方程，确定其能级和波函数；第 2 种方法采用 Feynman 路径积分的方法，讨论 ESP 的能量格林函数、传播子、波函数和能级[3]；第 3 种方法通过有效屏蔽势超对称性问题的讨论，从形不变性出发，得到其能级[4].

2 运用点正则变换方法求解 ESP 的薛定谔方程

设所求 Schrödinger方程为

$$[-\hbar^2/2m\ \mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2 + V(r) - E]\psi(r) = 0, \tag{1}$$

借助于点正则变换

$$r = f(\theta), \tag{2}$$

$$\psi(r) = v(\theta)\tilde{\psi}(\theta), \tag{3}$$

方程(1)变为

$$[-\hbar^2/2m\ \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\theta^2 + \tilde{V}(\theta) - \tilde{E}]\tilde{\psi}(\theta) = 0, \tag{4}$$

* 北京市自然科学基金资助.

其中

$$v(\theta)=c\sqrt{f'(\theta)},\qquad c\text{ 为常数},\tag{5}$$

$$\tilde{V}(\theta)-\tilde{E}=f'^{2}[V(r)-E]+\hbar^{2}/4m[3/2(f''/f')^{2}-f'''/f'].\tag{6}$$

如果方程(4)可以求得精确解，则可由(2)式反演求得(1)式的精确解.

有效屏蔽势的形式为

$$V(r)=-(\lambda-\mu)/(\mathrm{e}^{r/a}-1)+\mu/(\mathrm{e}^{r/a}-1)^{2},\tag{7}$$

式中 $\mu=\hbar^{2}l(l+1)/2ma^{2}$.

经正则变换

$$r=f(\theta)=-2a\ln(\cos\theta/2)\tag{8}$$

之后，(4)式中的

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\theta)-\tilde{E}=&-\lambda a^{2}+Ea^{2}+(\mu a^{2}+3\hbar^{2}/32m)\csc^{2}(\theta/2)\\&+(-Ea^{2}-\hbar^{2}/32m)\sec^{2}(\theta/2).\end{aligned}\tag{9}$$

与可以求出精确解的 Pöschl–Teller势及其能谱

$$\tilde{V}_{\mathrm{P-T}}=\tilde{A}(\tilde{A}-\hbar/2\sqrt{2m})\sec^{2}(\theta/2)+\tilde{B}(\tilde{B}-\hbar/2\sqrt{2m})\csc^{2}(\theta/2),\tag{10}$$

$$\tilde{E}_{\mathrm{P-T}}=(\tilde{A}+\tilde{B}+n\hbar/\sqrt{2m})^{2}\tag{11}$$

相比较，便可得到一组方程:

$$-(\tilde{A}+\tilde{B}+n\hbar/\sqrt{2m})^{2}=-\lambda a;\tag{12}$$

$$\tilde{A}(\tilde{A}-\hbar/2\sqrt{2m})=-Ea^{2}-\hbar^{2}/32m;\tag{13}$$

$$\tilde{B}(\tilde{B}-\hbar/2\sqrt{2m})=\mu a^{2}+3\hbar^{2}/32m.\tag{14}$$

解这组方程，便可得到

$$\tilde{A}=\hbar/4\sqrt{2m}+a\sqrt{-E};\tag{15}$$

$$\tilde{B}=3\hbar/4\sqrt{2m}+\hbar l/\sqrt{2m},\tag{16}$$

相应的有效屏蔽势的能级为

$$E_{n}=-\hbar^{2}/2ma^{2}[b^{2}-(n+l+1)^{2}/2(n+l+1)]^{2},\tag{17}$$

其中 $b^{2}=2ma^{2}\lambda/\hbar^{2}$.

同样，与 Pöschl–Teller势的波函数

$$\psi_{\mathrm{P-T}}=C_{n}'(\tan\theta/2)(1-y)^{\lambda/2}(1+y)^{\beta/2}P_{n}^{(\lambda-1/2,\,\beta-1/2)}(y),\tag{18}$$

式中

$$\begin{aligned}y&=1-2\sin^{2}(\theta/2),\\\lambda&=2\sqrt{2m}/\hbar\cdot\tilde{B},\\\beta&=2\sqrt{2m}/\hbar\cdot\tilde{A},\end{aligned}\tag{19}$$

相比较，便得到 ESP 的波函数为

$$\psi=C_{n}(\mathrm{e}^{-r/a})^{\sqrt{-\alpha}}(1-\mathrm{e}^{-r/a})^{l+1}F(-n,2l+2+2\sqrt{-\alpha}+n,2l+2;1-\mathrm{e}^{-r/a}),\tag{20}$$

其中

$$\alpha = 2ma^2E / \hbar^2.$$

3 应用 Feynman 路径积分方法处理 ESP 系统问题

近些年来，应用 Feynman 路径积分方法处理短程势问题，已经引起人们的兴趣和关注，因为它是一种有效的方法和手段；对于 ESP 同样可以运用这种方法求解相应的有关问题.

对于给定的势 $V(x)$，相应的传播子为

$$K(x_2,\ x_1;\ T) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{D}[x(t)] \exp\left[\mathrm{i} / \hbar \int_0^T \mathrm{d}t(m\dot{x}^2 / 2 - V)\right]. \tag{21}$$

引入空间变换和时间变换:

$$x = f(z), \qquad t \rightarrow s, \tag{22}$$

则有

$$\mathrm{d}t / \mathrm{d}s = [f'(z)]^2. \tag{23}$$

于是得到能量格林函数为

$$G(z_2,\ z_1;\ E) = [f'(z_2)f'(z_1)]^{1/2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}s \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{D}[z(s)] \right.$$
$$\left. \cdot \exp\left[\mathrm{i} / \hbar \int_0^s \mathrm{d}s(m\dot{z}^2 / 2 - \tilde{V}(z))\right]\right\}, \tag{24}$$

其中

$$\tilde{V}(z) = f'^2[V(z) - E] + \hbar^2 / 4m[3/2 \cdot (f''/f')^2 - f'''/f']。 \tag{25}$$

公式(21)用能量格林函数表示，则为

$$K(x_2,\ x_1;\ T) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}E(2\pi\hbar)^{-1} \exp[-\mathrm{i}ET / \hbar]\, G(x_2,\ x_1;\ E). \tag{26}$$

对于公式(7)表示的有效屏蔽势，经正则变换之后，能量格林函数的表示式为

$$G(\theta_2,\ \theta_1;\ E) = [\tan(\theta_1 / 2)\tan(\theta_2 / 2)]^{1/2}$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta\{\sqrt{-E} - \hbar / \sqrt{2m}\, a[b^2 - (n+l+1)^2 / 2(n+l+1)]\}$$
$$\cdot (1-y_2)^{\lambda/2}(1+y_2)^{\beta/2}P_n^{[(\lambda-1/2),(\beta-1/2)]}(y_2)(1-y_1)^{\lambda/2}(1+y_1)^{\beta/2}$$
$$\cdot P_n^{[(\lambda-1/2),(\beta-1/2)]}(y_1), \tag{27}$$

公式中 $b^2 = 2ma^2\lambda / \hbar^2$，而 y、λ 与 β 由公式(19)确定.

将(27)式代入 (26)式，并利用 Feynman–Kac公式

$$K(x_2,\ x_1;\ T) = \sum_n \exp[-\mathrm{i} / \hbar E_n T]\, \psi_n^*(x_1)\, \psi_n(x_2), \tag{28}$$

便可求得相应的传播子、波函数和能级. 它们分别是

$$K(r_2,\ r_1;\ T) = \sum_n \exp[-\mathrm{i}/\hbar E_n T]\,\psi_n^*(r_1)\,\psi_n(r_2); \tag{29}$$

$$E_n = -\hbar^2/2ma^2[b^2-(n+l+1)^2/2(n+l+1)]^2; \tag{30}$$

$$\psi_n = C_n(\mathrm{e}^{-r/a})^{\sqrt{-\alpha}}(1-\mathrm{e}^{-r/a})^{l+1}F(-n,\ 2l+2+2\sqrt{-\alpha}+n,\ 2l+2;\ 1-\mathrm{e}^{-r/a}). \tag{31}$$

4 求解ESP系统的超对称性方法

由于(7)式表示的有效屏蔽势具有超对称性和形不变性，因而可以运用简单代数方法便可确定ESP的能级.

在超对称量子力学中，通常运用超势 $W(x)$ 这个物理量，而不使用基态波函数的概念，但两者之间满足一定的关系. 对于公式(7)，如果引入

$$E_{l+1} = -\hbar^2/2ma^2[b^2-(l+1)^2/2(l+1)]. \tag{32}$$

其中 $b^2 = 2ma^2\lambda/\hbar^2$,

那么，便可以定义一个超势

$$W(r) = \sqrt{-E_{l+1}} - \hbar/a\sqrt{2m}\cdot(l+1)/(\mathrm{e}^{r/a}-1). \tag{33}$$

由(33)式，得到超对称伙伴势为

$$\begin{aligned} V_- &= W^2 - \hbar/\sqrt{2m}\cdot W' \\ &= -E_{l+1} - \lambda/(\mathrm{e}^{r/a}-1) + \hbar^2 l(l+1)/2ma^2 \\ &\quad\cdot[1/(\mathrm{e}^{r/a}-1) + 1/(\mathrm{e}^{r/a}-1)^2]; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} V_+ &= W^2 + \hbar/\sqrt{2m}\cdot W' \\ &= -E_{l+1} - \lambda/(\mathrm{e}^{r/a}-1) + \hbar^2(l+1)(l+2)/2ma^2 \\ &\quad\cdot[1/(\mathrm{e}^{r/a}-1) + 1/(\mathrm{e}^{r/a}-1)^2]. \end{aligned} \tag{35}$$

显然，$(V_- + E_{l+1})$便为有效屏蔽势，即

$$V(r) = V_- + E_{l+1}.$$

如果取 $a_0 = l$, $a_1 = l+1$，由(34)和(35)两式便可看出 V_- 与 V_+ 具有形不变性，它们满足形不变条件:

$$V_+(r;\ a_0) = V_-(r;\ a_1) + R(a_1), \tag{36}$$

而

$$R(a_1) = -E_{l+1} + E_{l+2}, \tag{37}$$

其中

$$E_{l+2} = -\hbar^2/2ma^2\cdot[b^2-(l+2)^2/2(l+2)]. \tag{38}$$

于是，哈密顿量级数表示为

$$H^{(s)} = -\hbar^2/2m\cdot\mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2 + V_-(r;\ a_s) + \sum_{k=1}^{s} R(a_k), \tag{39}$$

由于 $a_s = f^s(a_0) = a_0 + s = l + s$, (40)

$s = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

因此,

$$V_-(r;\ a_s) = -E_{l+s+1} - \lambda / (e^{r/a} - 1) + \hbar^2(l+s)(l+s+1) / 2ma^2 \cdot [1 / (e^{r/a} - 1) + 1 / (e^{r/a} - 1)^2]. \tag{41}$$

若取超势 $W_s = \sqrt{-E_{l+s+1}} - \hbar / a\sqrt{2m} \cdot (l+s+1) / (e^{r/a} - 1)$, (42)

那么

$$V_+(r;\ a_s) = -E_{l+s+1} - 1 / (e^{r/a} - 1) + \hbar^2(l+s+1)(l+s+2) / 2ma^2 \cdot [1 / (e^{r/a} - 1) + 1 / (e^{r/a} - 1)^2]; \tag{43}$$

哈密顿量级数为

$$\begin{aligned} H^{(s+1)} &= -\hbar^2 / 2m \cdot d^2 / dr^2 + V_-(r;\ a_{s+1}) + \sum_{k=1}^{s+1} R(a_k) \\ &= -\hbar^2 / 2m \cdot d^2 / dr^2 + V_+(r;\ a_s) + \sum_{k=1}^{s} R(a_k). \end{aligned} \tag{44}$$

从而得到

$$R(a_{s+1}) = V_+(r;\ a_s) - V_-(r;\ a_{s+1}) = -E_{l+s+1} + E_{l+s+2}. \tag{45}$$

运用逐次递推关系, 便可确定出 $H^{(0)} = H_-$ 的能级为

$$\begin{aligned} E_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(a_k) = E_{l+n+1} - E_{l+1} \\ &= -\hbar^2 / 2ma^2[b^2 - (n+l+1)^2 / 2(n+l+1)]^2 - E_{l+1}, \quad (n \geqslant 1), \\ E_{l+1}^{(-)} &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

于是得到有效屏蔽势的能级为

$$E_n = -\hbar^2 / 2ma^2[b^2 - (n+l+1)^2 / 2(n+l+1)]^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots\cdots. \tag{47}$$

有效屏蔽势(ESP)同汤川势一样, 在原子核物理和粒子物理中有着十分重要的意义. 对 ESP 能谱和波函数的求解, 不仅有重要的理论意义; 而且有一定的应用价值. 在本文中, 运用不同的方法获得了 ESP 有关问题相同的结论, 从而拓宽了对这一问题研究的途径.

参　考　文　献

[1] T. Boundjedaa, L. Chetouani, L. Guechi, *J. Math. Phys.*, **32(2)**(1991)441.

[2] R. De, R. Dutt, U. Sukhatme, *J. Phys*, **A25**(1992)L843.

[3] R. De, R. Dutt, U. Sukhatme, *Phys. Rev.*, **A46(11)**(1992)6869.

[4] R. Dutt, A. Khare, U. P. Sukhatme, *Am. J. Phys*, **56(20)**(1988)163.

Energy Levels and Wavefunctions of Effective Screened Potential

Huang Bowen Wang Deyun

(*Physics Department, Capital Normal University, Beijing* 100037)

Received 29 July, 1996

Abstract

We use the method of point canonical transformation and the Feynman path integral method to find energy spectra and wavefunction of the effective screened potential (ESP). We show that ESP has shape invariance. In the some way, we obtain energy levels of ESP.

Key words effective screened potential, point canonical transformation, shape invariance, path integrals.