

# 经典粒子在轴对称八极形变势场中的混沌运动\*

李君清

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

1996-07-24 收稿

## 摘 要

在自然界中长的变形核数目多于扁的变形核数目,这一事实发现与核子的混沌运动有关. 经典理论的初步研究表明,粒子在扁椭球加八极形变场中比在长椭球加八极形变场中的运动能在更小的形变参数下产生混沌运动,原因是前者的势能面能在更小的形变参数下出现负曲率.

**关键词** 八极形变, 势能面, 混沌运动.

## 1 引 言

原子核的独立粒子模型认为,任何一个核子都在所有其它核子所共同形成的平均场里运动. 这个平均场可以是球形的,如对双满壳核;也可以是变形的,如对变形核. 这是壳模型的基本假定,在描述原子核结构和核集体态方面都取得了极大的成功. 变形的原子核往往表现出非线性特征,而非线性角度来观察和研究原子核目前还在尝试阶段. 近年来对非线性哈密顿系统的经典混沌运动的研究表明,即使是具有很少自由度的简单系统,也显示了非常丰富多彩的性质<sup>[1,2]</sup>. 因此,研究原子核中核子的运动是规则的或是混沌的,将有可能把研究原子核的性质问题与物理界普遍存在的非线性问题相联系. 这方面的初步工作表明,当平均场由球形逐渐变形,如用球谐多极函数来描写这种变形,则当多极性大于等于八极形变,且当形变足够强时,核子的运动可由规则变为混沌<sup>[3,4]</sup>. 最近 W. D. Heiss 等人发现<sup>[5]</sup>在长椭球加八极形变势场,对较大的形变仍没有发现混沌运动,而在扁椭球加八极形变势场,对较小的形变就发现有混沌运动发生. 这个发现的意义不仅仅在理论研究上,而且在于在自然界中确实长椭球核的数目多于扁椭球核,长椭球加三轴形变核的数目多于扁椭球加三轴形变核. 他们是用经典和量子的两种方法来研究这个问题的,但没有探讨过发生这种现象的原因. 本文首先从经典上探讨发生这种现象的

\* 国家自然科学基金、中国科学院理论物理特别支持费及德国马克思·普朗克协会资助.

原因.

## 2 动力学条件

### 2.1 轴对称的八极形变势场

与 Heiss 等人所用的哈密顿量相同, 考虑单粒子在如下的势场中运动:<sup>[5]</sup>

$$V(\rho, z) = \frac{m\omega^2}{2} \left[ \rho^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3z\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right], \quad (1)$$

式中,  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $x, y, z$  为直角坐标变量, 方括号中的前两项给出了轴对称的谐振子势,  $z$  方向的频率与  $x, y$  方向的频率不同,  $\omega_x = \omega_y = b\omega_z$ . 如果  $\lambda = 0$ , 则  $b > 1$  时, 平均场为长椭球核;  $b < 1$  时为扁椭球核. 方括号第三项为轴对称八极形变项, 它正比于  $r^2 Y_{30}$ , 其中  $Y_{30}$  为三极球谐函数,  $r^2 = \rho^2 + z^2$ . 无论在  $b > 1$  或  $b < 1$  的情况下, 都会有一个临界形变参数  $\lambda_c$  存在, 当  $|\lambda| > \lambda_c$  时, 势能  $V(\rho, z)$  将不封闭, 而在某处趋于无穷远. 对长椭球,  $b > 1$ , 在当前的情况下, 有  $\lambda_c = \frac{1}{2b^2}$ ; 对扁椭球, 当  $b = 0.5$  时  $\lambda_c = 1.64$ .

### 2.2 动力学方程

在上述势场中, 解经典粒子的正则运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = mP_z, & \frac{\partial \rho}{\partial t} = mP_\rho, \\ \frac{\partial P_z}{\partial t} = -\frac{m\omega^2}{2} \left\{ \frac{2z}{b^2} + \lambda \frac{3(2z^2 - \rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \lambda \frac{z^2(2z^2 - 3\rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}, \\ \frac{\partial P_\rho}{\partial t} = -\frac{m\omega^2}{2} \left\{ 2\rho - \lambda \frac{6z\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} - \lambda \frac{\rho z(2z^2 - 3\rho^2)}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}, \end{cases} \quad (2)$$

方程为非线性联立方程组, 无解析解, 故需用数值解. 我们采用龙德-库塔法解方程, 时间步长为 0.1fm.

## 3 势能面的负曲率与粒子的混沌运动

在哈密顿系统  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} + V(\mathbf{q})$  中由粒子的轨道稳定性的分析可知<sup>[3,6]</sup>, 如在势场某处两相邻轨道  $\{\mathbf{q}_1(t), \mathbf{p}_1(t)\}$  和  $\{\mathbf{q}_2(t), \mathbf{p}_2(t)\}$  之差  $\xi(t) = \mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)$ ,  $\eta(t) = \mathbf{p}_1(t) - \mathbf{p}_2(t)$  随时间的变化呈指数形式分离, 对两个自由度的系统则必须有

$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2 < 0, \quad (3)$$

式中,微分以  $q_1$  轨道为基准轨道,无矢量号的  $q_1, q_2$  是两自由度向量  $q$  的两个分量. 由于  $C$  与势能面的高斯曲率<sup>[7]</sup>

$$K(q_1, q_2) = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \right)^2}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial q_2} \right)^2 \right]^2} \quad (4)$$

具有相同的符号. 则可认为势能面的负曲率将导致相邻经典轨道的指数性分离. 如果粒子多次经过势能面的负曲率区域, 相邻轨道的相位差大大改变, 将导致粒子的混沌运动. 为方便起见, 这里用 (3) 式来定义势能面的曲率. 图 1 的左边一列给出  $b = 0.5$  的扁椭球加八极形变, 当  $y = 0$  时势能面  $V(\rho, z)$  在  $x-z$  平面内的等位面图, 自上而下  $\lambda / \lambda_c$  分别为 0.1, 0.2 和 0.5 (这里  $\lambda_c = 1.64$ ). 由于本文所研究的势能有刻度不变性, 如  $V(\gamma r) = \gamma^2 V(r)$ , 不同能量的势能面具有相似的形状, 因此只给出一个能量的势能面形状. 右

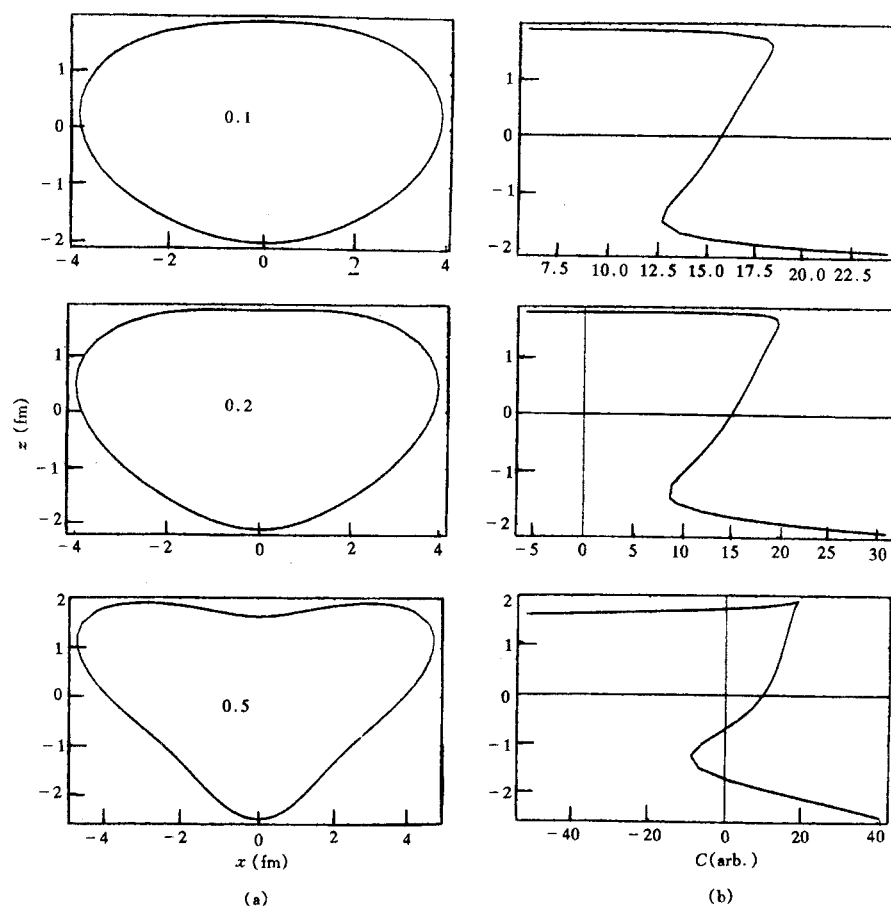


图 1 (a)扁椭球 ( $b=0.5$ ) 加八极形变核在  $y=0$  的  $x-z$  平面的等位面图;  
(b) 相应的势能等位面曲率

边的一列给出相应的势能面的曲率  $C$ . 可见当  $\lambda / \lambda_c = 0.2$  时, 在势能面上顶部有少许负曲率出现, 当  $\lambda / \lambda_c = 0.5$  时, 在势能面顶部的负曲率增大, 侧面下方也出现负曲率.

图 2 中给出了相应于  $\rho = 0$  时在  $P_z$ - $z$  平面的 Poincare 截面. 由图中可以看出, 对图 (a), 势能面没有负曲率, 可看到完全规则的 Poincare 截面; 图 (b) 相应于势能面上有少许的负曲率, Poincare 截面中显示了分布在一个薄环上的不规则区域; 图 (c) 与分布在势能面上的三个区域的较强的负曲率 (图 1) 相对应, 可看到有大面积不规则区域的 Poincare 截面.

对长椭球情况, 也做了相应的计算. 在这里选  $b=2$ . 图 3 的左边一列, 给出了相应于  $\lambda / \lambda_c = 0.5, 0.6, 0.7$  时 ( $\lambda_c = \frac{1}{2b^2}$ ) 的势能面在  $y=0$  的  $x$ - $z$  平面的等位面图. 当  $\lambda / \lambda_c \geq 0.6$  时, 在势能面两侧有不太大的负曲率, 这在右列图中给出. 注意由于作图的困难, 在左列图中相对于  $x$  方向的刻度, 在  $z$  方向的刻度被大大地压缩了, 因此在表观上长椭球似乎不够长. 如果在  $z$  方向和  $x$  方向的刻度取为相同, 则等势面将被大大地拉长. 相应地, 图 4 中 Poincare 截面显示: 对 (a) 图,  $\lambda / \lambda_c = 0.5$ , 势能面无负曲率, Poincare 截面完全规则; 对图 (b)  $\lambda / \lambda_c = 0.6$  及图 (c)  $\lambda / \lambda_c = 0.7$ , 与势能面中所观测到的负曲率相对应, 在 Poincare 截面上可找到混沌区域. 在 Heiss 等人的工作中, 在  $\rho = 0$  的  $P_z$ - $z$  Poincare 截面中, 对  $b = 2$  的长椭球加八极形变情况, 当  $\lambda / \lambda_c = 2/3 - 0.67$  时, 没有观测到混沌结构. 这是因为在同一势能作用下, 不同初始条件的轨道在势能范围的特定区域内出现, 如找不到导致混沌轨道的初始条件, 混沌轨道就不会出现, 则有可能在

Poincare 截面中漏掉混沌区域. 实际上, 我们发现的混沌区域正好在他们的  $P_z$ - $z$  Poincare 截面空白区域. 对  $b = 0.58$  的扁椭球加八极形变的情况, 当  $\lambda / \lambda_c = 1/3$  时, 他们得到了很少规则结构的、混沌的 Poincare 截面, 与我们的结果相同.

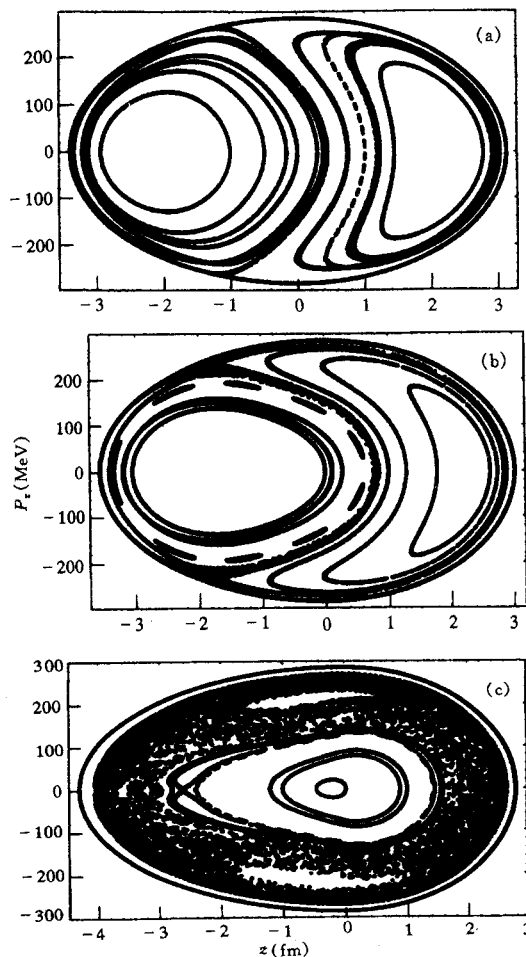


图 2 在扁椭球加八极形变势作用下经典粒子轨道在  $\rho = 0$  的  $P_z$ - $z$  平面的 Poincare 截面  
八极形变参数  $\lambda / \lambda_c$  为 (a) 0.1; (b) 0.2; (c) 0.5.

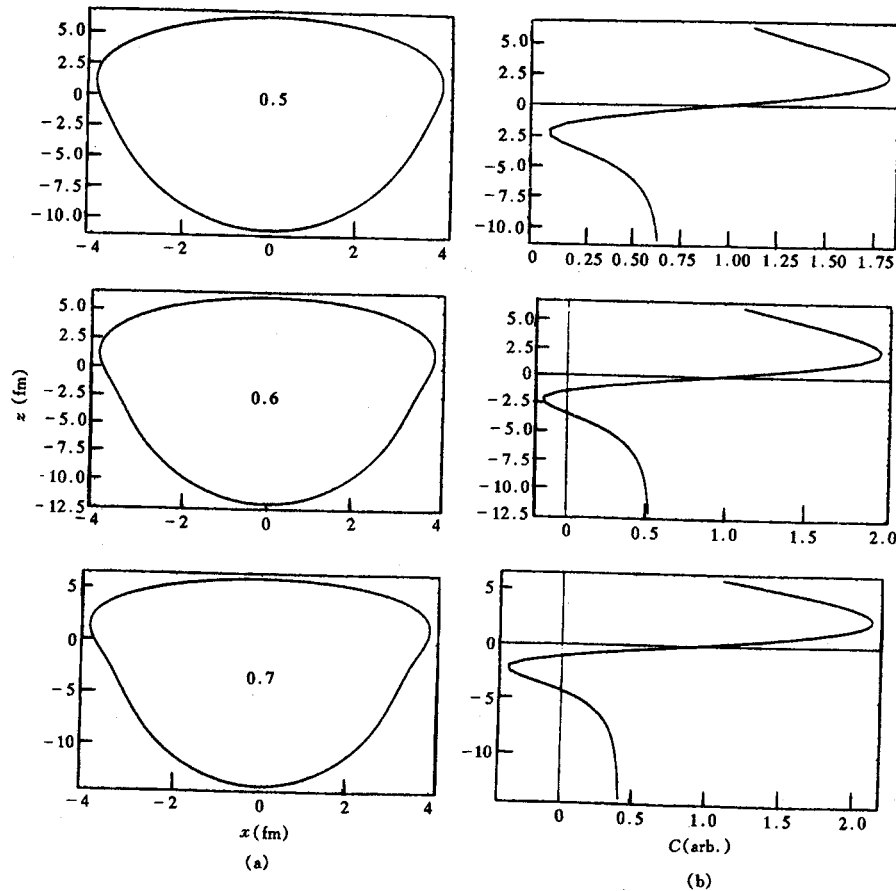


图 3 (a)长椭球( $b=2$ )加八极形变核在 $y=0$ 的 $x-z$ 平面的等位面图  
(b)相应的势能等位面曲线

## 4 总 结

对规则的可积系统,有多少自由度就有多少个运动积分.由于运动积分的限制,对各自由度在空间所能分布的区域有相应的限制,而不能任意分布至无穷大.如果某一个运动积分受到破坏,则相应的自由度脱离约束,有可能在无穷大的区域里任意分布.但 KAM 定理(Kolmogorov-Arnold-Moser)指出,情况并不是这样.对一个充分接近可积哈密顿系统的不可积系统,若把不可积性作为对可积哈密顿函数的扰动来处理,则在小扰动(系统近可积)条件下,系统运动图像与可积系统基本一致,运动轨道在相空间的分布所形成的环面仍然存在,只是有形变;当扰动足够大(不可积性足够强)时,系统运动图像发生定性改变,转变为混沌运动,运动轨道在相空间的分布所形成的环面则被破坏. KAM 定理因此被认为是“牛顿力学发展史上最重大的突破”<sup>[8]</sup>.若使运动成为混沌的,必须有破坏可积性的扰动,它使至少一个运动积分受到破坏,且破坏强度需达到一定的程度.这里所谓“一定的程度”的要求只是定性的, KAM 定理没有给出定量的要求.本文中所用到的八极形变项的加入破坏了系统的角动量守恒,只有角动量在  $Z$  轴的投影是运动积分.当

形变强度 $\lambda$ 比较小,八极形变没有负曲率产生时,没有混沌运动.当变形达到一定程度,以致核势能面有负曲率出现时,则只要仔细地搜索粒子在相空间的轨道,总能找到混沌运动轨道.因此,作为对 KAM 定理的一个补充,这里为出现混沌运动而对八极形变扰动强度 $\lambda$ 的要求是,形变的势能面上应有负曲率出现,而零曲率是运动形态发生变化的临界点.由上述情况可知出现混沌运动时,长椭球加八极形变情况势能面上出现负曲率时所要求的 $\lambda/\lambda_c$ 值比扁椭球加八极形变所要求的 $\lambda/\lambda_c$ 值大.如图 3 所示,长椭球加八极形变需变形相当大才能出现混沌运动,一般的原子核形变达不到这种程度.因此长椭球加八极形变比扁椭球加八极形变显示了更强的对抗混沌运动的稳定性.进一步地讲,当轴对称也被破坏而趋于三轴形变时,如 $Y_{3m}$ 形式的形变,其中 $m \neq 0$ ,只要形变后的等位面曲率处处大于零,核子的运动基本规则,这时相关的运动积分虽然破缺,但仍分布在一定的范围之内.总之,扁椭球加八极形变比长椭球加八极形变其势能面更容易出现负曲率,因而也更容易出现混沌运动.相应的原子核则因为某些运动积分的破坏而变得更不稳定.这种负曲率的影响在量子力学处理中的反映将是一个十分有意义且吸引人的问题.

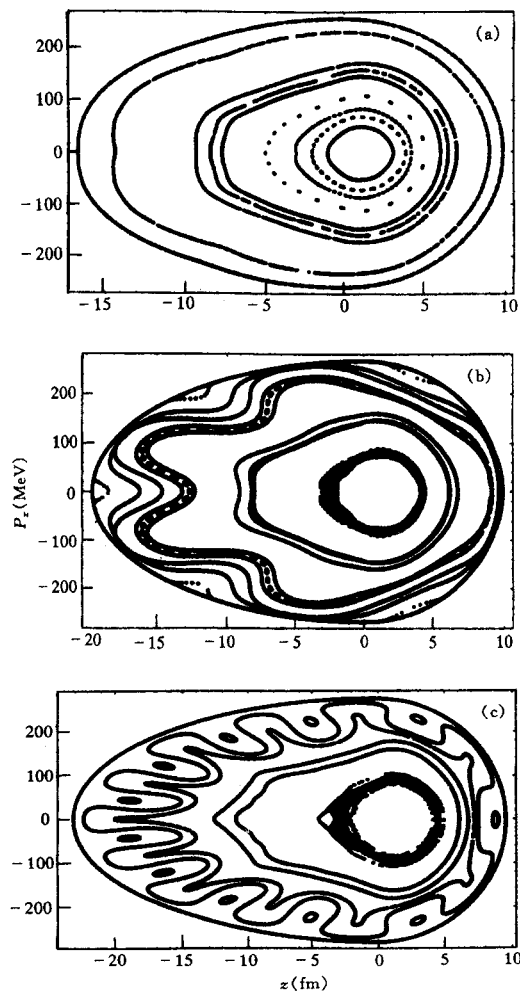


图 4 在长椭球加八极形变势作用下经典粒子轨道在 $\rho=0$ 的 $P_z-z$ 平面的 Poincaré 截面  
八极形变参数 $\lambda/\lambda_c$ 为(a)0.5; (b)0.6; (c)0.7.

### 参 考 文 献

- [1] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, New York, 1990.
- [2] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New York, 1983.
- [3] Li Junqing, Huang Weiqi, *Phys. Rev.*, **C50**(1990)1632.
- [4] J. Blocki, J. J. Shi, W. Z. Swiatecki, *Nucl. Phys.*, **A554**(1993)387.
- [5] W. D. Heiss, R. G. Nazmitdiuov, S. Radu, *Phys. Rev. Lett.*, **72**(1994)2351.
- [6] Li Junqing, Zhu Jieding, Gu Jinnan, *Phys. Rev.*, **B52**(1995)6458.
- [7] G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, McGraw Hill, New York, 1961, P508.
- [8] 苗东升、刘华杰, *混沌纵横论*, 中国人民大学出版社.

## Chaotic Motion of Classical Particles in Axially Symmetric Potentials with Octupole Deformation

Li Junqing

*(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000)*

Received 24 July 1996

### Abstract

The fact that there are more prolate-deformed nuclei than oblate-deformed ones in the nature is found to be related with the chaotic motion of nucleons. The primary investigation with classical theory shows that the particle motion in the potential with oblate-plus -octupole deformation could become chaotic in the case of smaller deformation strength as compared with the case of prolate-plus-octupole deformation. The reason is that the negative curvature in the potential surface could appear in the case of smaller deformation strength for the former one rather than for the latter.

**Key words** octupole deformation, potential surface, chaotic motion.