第22卷 第10期 高能物理与核物理 Vol.22, No.10
1998 年10月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Oct., 1998

用改进的哈密顿量计算 Wilson 费米子真空凝聚

江 俊 勤
(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 用改进的哈密顿量和变分法计算格点(1 + 1)维 QED(Schwinger 模型)中 Wilson 费米子真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$,结果(同使用未改进的哈密顿量的计算结果相比较)与 Wilson 参数r的依赖关系明显地减小了.

关键词 格点 Schwinger 模型 改进哈密顿量 费米子真空凝聚

1 引言

费米子真空凝聚$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$是量子场论中非常重要的物理量,它不但显示理论的非微扰特征,而且表征手征对称性自发破缺,人们还猜测它与费米子禁闭紧密相关[1].

Schwinger 模型是描写(1 + 1)维 QED 的严格可解模型,为量子场论的许多设想提供了实验室. 人们希望在(1 + 1)维模型中取得经验后推广到高维理论中去. 为了检验我们所用方法的正确性,曾经用变分法研究了格点 Schwinger 模型中费米子真空凝聚,矢量介子质量M_V以及$\partial M_V / \partial m$,取得了较好结果[2—7]. 为了解决“费米子加倍”问题,采用了 Wilson 方案,其哈密顿量为[3]:

$$H = H_g + H_f,$$
$$H_f = H_m + H_k + H_r,$$
$$H_g = \frac{g^2}{2a}\sum_x E_j^2(x)\ ,\quad H_m = m\sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x)\ ,$$
$$H_k = \frac{1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)\ ,$$
$$H_r = \frac{r}{2a}\sum_{x,k}[\bar{\psi}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)U(x,k)\psi(x+k)]. \tag{1}$$

式中,$E_j(x)$为$U(1)$规范群的生成元,$U(x,k)$为规范链变量,$k = \pm 1$, $j = 1$, $\gamma_{-k} = -\gamma_k$为泡利矩阵:

1997-10-20收稿

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma_0\gamma_1 . \tag{2}$$

a, r, m 分别为格距，Wilson 参数，费米子质量(本文取 $m = 0$)，$g = ea$ 为无量纲的裸耦合常数，e 为带质量量纲的裸耦合常数，二分量旋量场 $\psi(x)$ 表示为：

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x) \\ \eta^+(x) \end{pmatrix} . \tag{3}$$

裸真空定义为 $\xi(x)|0\rangle = \eta(x)|0\rangle = E_1(x)|0\rangle = 0$.

当 $a \to 0$ 时，(1)式中的 H_r 项趋于零，因此理论上要求，格点计算结果应不依赖于参数 r. 本文使用改进的哈密顿量[8]计算 Schwinger 模型中的 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，结果与参数 r 的依赖关系明显地减小了.

2 改进哈密顿量

带 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型的改进哈密顿量为[8]：

$$H = H_g + H_{\mathrm{f}}^{\mathrm{improved}} ,$$

$$H_{\mathrm{f}}^{\mathrm{improved}} = H_m + H_k^{\mathrm{improved}} + H_r^{\mathrm{improved}} ,$$

$$H_g = \frac{g^2}{2a} \sum_x E_j^2(x) , \quad H_m = m \sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x) ,$$

$$\begin{aligned} H_k^{\mathrm{improved}} = & \frac{b_1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k) + \\ & \frac{b_2}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_r^{\mathrm{improved}} = & \frac{r}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x)\psi(x) - c_1 \frac{r}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) U(x,k)\psi(x+k) - \\ & c_2 \frac{r}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(x) U(x,2k)\psi(x+2k) . \end{aligned} \tag{4}$$

式中，$U(x,2k) = U(x,k)U(x+k,k)$. 当 $a \to 0$ 时，格点理论过渡到连续理论，故 b_1, b_2, c_1, c_2 应满足

$$\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 1 \\ b_1 + 8b_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} . \tag{5}$$

解得 $b_1 = \frac{4}{3}, b_2 = -\frac{1}{6}, c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$.

3 改进费米子真空凝聚

带费米子的规范场的物理真空态 $|\Omega\rangle$ 为[3]:

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta_1 s_1 + i\theta_2 s_2}|0\rangle \ . \tag{6}$$

其中,

$$s_1 = i\sum_{x,k} \psi^+(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k) \ ,$$

$$s_2 = i\sum_{x,k} \psi^+(x)\gamma_k U(x,2k)\psi(x+2k) \ . \tag{7}$$

θ_1, θ_2为独立变分参数,由真空能量

$$E_\Omega = \langle \Omega | H | \Omega\rangle / \langle \Omega | \Omega\rangle \ . \tag{8}$$

取极小值的条件决定,即由

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_1} = 0\ ,\quad \frac{\partial E_\Omega}{\partial \theta_2} = 0 . \tag{9}$$

可确定$\theta_i = \theta_i(1/g^2, r)$, $(i = 1,2)$.

把θ_1, θ_2代入

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle_1 = \langle \Omega | \sum_x \bar{\psi}(x)\psi(x) | \Omega\rangle / \langle \Omega | \Omega\rangle \ . \tag{10}$$

可求得$\langle \bar{\psi}\psi\rangle_1$

但由于 $r \neq 0$ 时,Wilson 项破坏了手征对称性,使$\bar{\psi}\psi$与单位算符混合,诱导了非零的自由费米子真空凝聚$\langle \bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}$,要比较标度性时应将它减除[3,7]:

$$\frac{\langle \bar{\psi}\psi\rangle_c}{e} = \frac{\langle \bar{\psi}\psi\rangle_1 - \langle \bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}}}{gN_1} \ . \tag{11}$$

N_1 为总格点数.

对于未改进哈密顿量的情况,自由费米子真空凝聚为[3]:

$$\langle \bar{\psi}\psi\rangle_{\text{free}} = -\frac{N_1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dp \frac{2ar\sin^2(pa/2)}{[(2r)^2\sin^4(pa/2) + \sin^2(pa)]^{1/2}} =$$

$$-\frac{N_1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{r\sin(x/2)}{[r^2\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)]^{1/2}}\, dx \ . \tag{12}$$

式中,$x = pa$.

对于改进哈密顿量的情况，类似于文献[3]的做法，将 $H_{\mathrm{f}}^{\mathrm{improved}}$ 完全对角化，可求得自由费米子真空凝聚为：

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{free}} = -\frac{N_1}{2\pi} ra \times$$

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{[1 - c_1\cos(pa) - c_2\cos(2pa)]\,\mathrm{d}p}{\{r^2[1 - c_1\cos(pa) - c_2\cos(2pa)]^2 + \sin^2(pa)[b_1 + b_2\cos(pa)]^2\}^{1/2}} =$$

$$-\frac{N_1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{r\sin^3(x/2)}{\left[r^2\sin^6(x/2) + \cos^2(x/2)\left(1 - \frac{1}{8}\cos x\right)^2\right]^{1/2}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{13}$$

式中，$x = pa$.

4 结论与讨论

将(4)式代入(9)式求出 $\theta_i = \theta_i(1/g^2, r)$，$(i = 1,2)$，再代入(11)式和(13)式，求得 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{c}}/e$ 与 $1/g^2$的关系曲线，如图1所示．

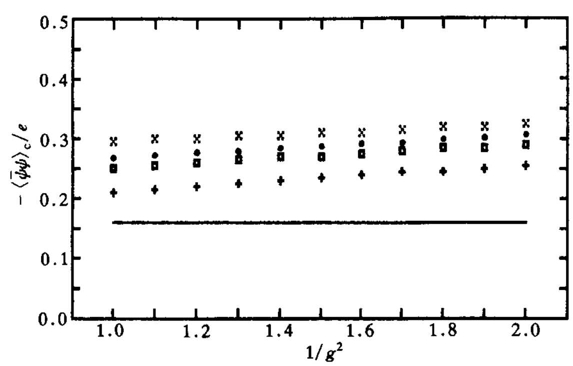

图1 $-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{c}}/e$ 与 $1/g^2$的关系

×，+ 分别为使用未改进哈密顿量时 $r = 0.2, 1.0$ 的结果．

•，□ 分别为使用改进的哈密顿量时 $r = 0.2, 1.0$ 的结果．

实线为连续理论的准确解．

为了便于比较和讨论，也将(1)式代入(9)式，求出θ_i再代入(11)式和(12)式求得未改进哈密顿量时$\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\mathrm{c}}/e$与$1/g^2$的关系曲线，如图1所示(比文献[3]多画出 $r = 0.2$ 时的曲线)．

由图1可看到，当使用未改进的哈密顿量(1)式时，$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$与 Wilson 参数 r 的依赖关系较大，在 r 较大(取 $r = 1.0$)时计算值较接近准确值(-0.16)，在 r 较小(如 $r = 0.2$)时，计算值远离准确值．当使用改进的哈密顿量(4)式时，$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$与 r 的依赖关系明显地减小了，因此(4)式比(1)式优越．当然，由于(6)式中只考虑1，2链的贡献，无论是使用(1)式，还是使用(4)式，格点计算得到的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$值都不十分接近准确值．若在(6)式中仔细考虑多链项

的贡献，相信用(4)式计算的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$值会接近于准确值.

感谢陈启洲教授对本工作所作的有益讨论.

参　考　文　献

[1] Kogut J. Rev. Mod. Phys., 1983, **55**:775

[2] Luo Xiangqian, Chen Qizhou. J. Phys., 1990, **G16**:181

[3] Chen Qizhou, Luo Xiangqian. Phys. Rev., 1990, **D42**:1293

[4] Xu Guocai, Jiang Junqin, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1993, **17**:1011
(许国材，江俊勤，陈启洲. 高能物理与核物理，1993，**17**：1011)

[5] Chen Qizhou, Fang Xiyan, Xu Guocai et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1991, **15**:518
(陈启洲，方锡岩，许国材等. 高能物理与核物理，1991，**15**：518)

[6] Jiang Junqin, Xu Guocai, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1994, **18**:222
(江俊勤，许国材，陈启洲. 高能物理与核物理，1994，**18**：222)

[7] Luo Xiangqian, Chen Qizhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1992, **16**:685
(罗向前，陈启洲. 高能物理与核物理，1992，**16**：685)

[8] Luo Xiangqian, Chen Qizhou, Xu Guocai et al. Phys. Rev., 1994, **D50**:501

The Calculation of the Fermion Condensates by Using the Improved Hamiltonian

Jiang Junqin

(*Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou* 510303)

Abstract The Wilson fermion condensates in the lattice Schwinger model is calculated by using improved Hamiltonian and variational method. The calculated result depends on the Wilson parameter much weaker than before.

Key words lattice, Schwinger model, improved Hamiltonian, fermion condensates

Received 20 October 1997