第22卷 第12期　　高能物理与核物理　　Vol.22, No.12
1998 年12月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Dec., 1998

三维流形上的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程*

杨富中　侯伯元
(中国科技大学研究生院　北京　100039)

马　中　骐
(中国科学院高能物理研究所　北京　100039)

摘要　给出了一般三维流形上变型的 Seiberg-Witten 磁单极方程，该方程是共形不变的，而且在欧空间上给出了一个有限能量的解析的精确解.

关键词　规范场　Higgs 场　Seiberg-Witten 磁单极方程

1　引言

经典规范场的精确解是物理学家和数学家共同关心的问题. 事实上，正是在研究四维流形上 SU(2) 规范场的瞬子解模空间时，Donaldson 于 1983 年提出了著名的 Donaldson 多项式不变量[1]. 它是微分同胚不变量，但不是同胚不变量，因而可以区分同一拓扑流形上互不微分同胚的微分流形. 然而，由于计算上的困难，极大地限制了它的实用性. 1988 年，Witten 虽然在他的拓扑量子场论一文中给出了 Donaldson 不变量的一个超对称场论表达式[2]，从而加深了对它的理解，但是，仍然不能很好地解决计算上的问题. 1994 年，Seiberg 和 Witten 提出了著名的 Seiberg-Witten 磁单极方程[3,4]，通过研究该方程解的模空间，得到了 Seiberg-Witten 不变量. 虽未证明它就是 Donaldson 不变量，但是就目前所知，它们是一致的. 重要的是，较之 Donaldson 不变量，Seiberg-Witten 不变量很容易计算. 而且用它证明了著名的 Thom 猜测等. 因而受到了极大的关注.

然而，在平坦空间，Seiberg-Witten 磁单极方程并不存在 L^2 解. Freund 给出了一个 Seiberg-Witten 磁单极方程的存在奇点的解[5]，文章[6]的作者给出了一个四维闵空间上共形不变的变型的 Seiberg-Witten 磁单极方程，同时给出了一个能量有限的解析的精确解. 本文给出了三维流形上共形不变的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程，并且给出了该方程在三维欧空间上能量有限且解析的精确解.

1998-01-24收稿，1998-03-02收修改稿

* "世纪之交的理论物理学若干重大问题"攀登计划项目和中国科学院理论物理特别资助项目支持

第二节回顾四维闭空间上的 Seiberg-Witten 磁单极方程及其变型方程，第三节给出三维流形上共形不变的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程及其精确解，最后是小结．

2　四维流形上 Seiberg-Witten 磁单极方程及其变型

Seiberg-Witten 磁单极方程是：

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu D_\mu \psi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{1}$$

$$F_{\mu\nu}^{+}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\psi}(\boldsymbol{r})\gamma_{\mu\nu}^{+}\psi(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

上式中的 D_μ 包含 $U(1)$ 规范联络(即规范势)和自旋联络(对于平坦的时空流形，D_μ 不包含自旋联络)． $F_{\mu\nu}^{+}(\boldsymbol{r})$ 是规范场强的自对偶部分，$\psi(\boldsymbol{r})$ 是 Dirac 旋量．

上述方程也可推广到非阿贝尔规范场情况[7]，两者的方程形式上相似，仅以非阿贝尔规范场代替 $U(1)$ 规范场，使规范场强和旋量场都含有同位旋指标．文章[6]进一步修改了上述方程(2)，给出了四维流形上变型的 Seiberg-Witten 非阿贝尔磁单极方程：

$$\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu D_\mu \psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eW_\mu)\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{3}$$

$$G^{+}(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau} = u^{+}(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}, \tag{4}$$

其中的 γ 矩阵取如下表象：

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\vec{\sigma} \\ -\mathrm{i}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

方程 (3)中的 e 是旋量场的荷，W_μ 是 $SU(2)$ 规范势，对应的规范场强如下：

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - \mathrm{i}e(W_\mu W_\nu - W_\nu W_\mu).$$

相应的磁场强度：$B_k = \varepsilon_{ijk}G_{ij}$，这里 μ, ν 是时空指标，i, j, k 是空间指标．

方程(4)中的自对偶场强 $G^{+}(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$ 和 $u^{+}(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$ 分别定义如下．

$$G^{+}(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau} = B(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau},$$

而 $B(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$ 由如下的 2×2 矩阵定义，

$$\sigma\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{\tau=-1}^{1}\sigma^k B_k^{\tau} T_\tau,\ B(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau} \equiv \sum_{k=1}^{3}\sigma_{ab}^{k} B_k^{\tau}, \tag{5}$$

a, b 是 Pauli 矩阵 σ^k 的行列指标，即旋量指标(取值 $\pm 1/2$)． T_τ 是同位旋群 $SU(2)$ 的生成元，$\tau = 1, 0, -1$ 是同位旋指标，

$$T_1 = -2^{-1/2}(T_x + \mathrm{i}T_y), \quad T_0 = T_z, \quad T_{-1} = 2^{-1/2}(T_x - \mathrm{i}T_y).$$

方程(3)的解 $\psi(r)$ 表为：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} u^+(\boldsymbol{r}) \\ u^-(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix},$$

其中$u^{\pm}(\boldsymbol{r})$在自旋空间是2×1矩阵,在同位旋空间是3×1矩阵,写成分量形式为$u^{\pm}(\boldsymbol{r})_a^{\tau}$.

对于确定的同位旋指标τ,方程(4)中的$u^+(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$定义为一个$2\times2$矩阵,行列指标$a$和$b$取值$\pm1/2$.矩阵第一列是方程(3)的解$u^+(\boldsymbol{r})_a^{\tau}$,即$u^+(\boldsymbol{r})_{a(1/2)}^{\tau}=u^+(\boldsymbol{r})_a^{\tau}$,第二列定义如下:

$$u^+(\boldsymbol{r})_{a(-1/2)}^{\tau} = \sum_{c=\pm1/2}\sum_{\lambda=-1}^{1} d_{ac}^{1/2}(\pi)\,d_{\tau\lambda}^{1}(\pi)\,(u^+(\boldsymbol{r})_c^{\lambda})^*,\quad d_{ab}^{j}(\pi) = (-1)^{j+a}\delta_{a(-b)}. \tag{6}$$

从方程(3),(4)的指标结构可以看出,它们是共形不变的.另外,文章[6]还给出了上述变型方程的一个能量有限且解析的精确解.

3　三维流形上的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程及其精确解

在三维流形上,可以用二分量旋量$u(\boldsymbol{r})$表示自旋为1/2的费米场,仍用W_k表示$SU(2)$规范势.同时,还引入 Higgs 标量场$\Phi(\boldsymbol{r})$.它们都是同位旋矢量,取值在同位旋群$SU(2)$的伴随表示中.类比于上述文章[6],给出如下的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程:

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma^k D_k u(\boldsymbol{r}) + e\Phi(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{7}$$

$$H(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau} = U(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}, \tag{8}$$

其中$D_k=\partial_k+\omega_k-\mathrm{i}eW_k$,对于平坦流形,$D_k$中不包含自旋联络$\omega_k$.方程(8)中的$H(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$定义为:

$$H(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau} = \sum_{i=1}^{3}(B_k(\boldsymbol{r})^{\tau} - D_k\Phi(\boldsymbol{r})^{\tau})\,\sigma_{ab}^{k}, \tag{9}$$

而B_k是磁场强度,可由规范场强G_{ij}定义如下:

$$G_{ij} = \partial_i W_j - \partial_j W_i - \mathrm{i}e(W_iW_j - W_jW_i),$$

$$\sum_{\tau=-1}^{+1} B_k^{\tau}T_{\tau} = \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}G_{ij},$$

T_{τ}是$SU(2)$表示的生成元.

类似于方程(4)中的$u^+(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$,方程(8)中的$U(\boldsymbol{r})_{ab}^{\tau}$也由一个$2\times2$矩阵定义,该矩阵的行和列指标取值为$\pm1/2$.矩阵第一列是二分量旋量$u(\boldsymbol{r})_a^{\tau}$,即$U(\boldsymbol{r})_{a(1/2)}^{\tau}=u(\boldsymbol{r})_a^{\tau}$,第二列定义为:

$$U(\boldsymbol{r})_{a(-1/2)}^{\tau} = \sum_{c=\pm1/2}\sum_{\lambda=-1}^{1} d_{ac}^{1/2}(\pi)\,d_{\tau\lambda}^{1}(\pi)\,(u(\boldsymbol{r})_c^{\lambda})^*. \tag{10}$$

该方程组是共形不变的．现在给出该方程组的一个欧空间上解析的特解．下面先给出规范场和 Higgs 场的一个试探解，然后从方程(7)求解旋量波函数，最后验证它们满足方程(8)．

取规范场和 Higgs 场的精确形式如下：

$$\mathrm{W}=\frac{\hat{r}\wedge \boldsymbol{T}}{er}(1-rg(r)),$$

$$\Phi=\frac{G(r)}{e}\boldsymbol{T}\cdot\hat{r},$$

$$g(r)=\frac{\beta}{\sinh(\beta r)}\sim\begin{cases}r^{-1} & 当\ r\longrightarrow 0\\ \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\beta r}) & 当\ r\longrightarrow\infty\end{cases},$$

$$G(r)=r^{-1}-\beta\coth(\beta r)\sim\begin{cases}\mathrm{O}(r) & 当\ r\longrightarrow 0\\ -\beta & 当\ r\longrightarrow\infty\end{cases},$$

上式中的 $\hat{r}$ 是径向单位矢量，β 是实部为正值的复常数，$\boldsymbol{T}$ 是同位旋群 $SU(2)$ 的生成元．从 $\boldsymbol{B}$ 的定义可以导出磁场强度的显式表示：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\sum_{\tau=-1}^{+1}\boldsymbol{B}^{\tau}T_{\tau}=B_{/\!/}(r)\hat{r}(\boldsymbol{T}\cdot\hat{r})+B_{\perp}(r)(\boldsymbol{T}-\hat{r}(\boldsymbol{T}\cdot\hat{r})),$$

$$B_{/\!/}(r)=-\frac{1}{er^{2}}+\frac{\beta^{2}}{e\sinh^{2}(\beta r)}\sim\begin{cases}-\beta^{2}/(3e^{2}) & 当\ r\longrightarrow 0\\ -1/(er^{2}) & 当\ r\longrightarrow\infty\end{cases},$$

$$B_{\perp}(r)=\frac{\beta}{er\sinh(\beta r)}-\frac{\beta^{2}\coth(\beta r)}{e\sinh(\beta r)}\sim\begin{cases}-\beta^{2}/(3e^{2}) & 当\ r\longrightarrow 0\\ \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-\beta r}) & 当\ r\longrightarrow\infty\end{cases}$$

另一方面，可以把磁场 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 表示为 2×2 的矩阵和 3×1 矩阵的直积，从而得到如下的分量形式：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=B_{/\!/}(r)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \cos\theta\\ 2^{-1/2}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}+$$

$$B_{\perp}(r)\left\{\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & \sin\theta\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\cos\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ -\sin\theta\\ 2^{-1/2}\cos\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mathrm{i}2^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\\ 0\\ \mathrm{i}2^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\end{pmatrix}\right\}.$$

事实上，上面第二列并不独立，满足与方程(10)类似的关系式：

$$B(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(-1/2)} = \sum_{c=\pm 1/2}\sum_{\lambda=-1}^{1} d^{1/2}_{ac}(\pi)\, d^{1}_{\tau\lambda}(\pi)\{B(\boldsymbol{r})^{\lambda}_{c(1/2)}\}^{*}. \tag{11}$$

另外,从 Higgs 场的表达式,可得 $D_k\Phi(\boldsymbol{r}) = -B_k$,因而 $H(\boldsymbol{r})^{\tau}_{ab} = 2B(\boldsymbol{r})^{\tau}_{ab}$ 也满足方程(11). $H(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(1/2)}$ 可明显地写出:

$$H(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(1/2)} = 2B_{/\!/}(r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\sin\theta e^{-i\varphi}\\ \cos\theta\\ 2^{-1/2}\sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix} +$$

$$2B_{\perp}(r)\left\{\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\cos\theta e^{-i\varphi}\\ -\sin\theta\\ 2^{-1/2}\cos\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix} +\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}0\\ ie^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}i2^{-1/2}e^{-i\varphi}\\ 0\\ i2^{-1/2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}\right\}. \tag{12}$$

下面给出二分量旋量 $u(\boldsymbol{r})$ 的精确解. 为此,可以把 $W_k(\boldsymbol{r})$ 和 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的表达式代入,然后直接求解方程(7). 事实上,这是带标量势 $\Phi(\boldsymbol{r})$ 的 Weyl-Dirac 方程,关于它的精确解,已有很多研究. 由于磁场和 Higgs 场是球对称的,可以选取力学量完全集为 $J^2, J_z, S^2, \boldsymbol{S}\cdot\hat{r}, T^2$ 和 $\boldsymbol{T}\cdot\hat{r}$,其中,$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}$,相当于总角动量,$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S} = \vec{\sigma}/2$ 和 $\boldsymbol{T}$ 分别是轨道,自旋和同位旋角动量. 该力学量完全集的共同本征函数完备系 $\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r})^{\tau}_{a}$ 满足如下的本征方程:

$$J^2\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = j(j+1)\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}),\qquad S^2\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = (3/4)\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}),\qquad T^2\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = 2\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}),$$

$$J_z\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = m\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}),\qquad (\boldsymbol{S}\cdot\hat{r})\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = b\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}),\qquad (\boldsymbol{T}\cdot\hat{r})\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}) = \lambda\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r}).$$

共同本征函数是:

$$\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r})^{\tau}_{a} = \left(\frac{2j+1}{4\pi}\right)^{1/2} D^{j}_{m(b+\lambda)}(\varphi,\theta,0)^{*}\, D^{1/2}_{ab}(\varphi,\theta,0)\, D^{1}_{\tau\lambda}(\varphi,\theta,0), \tag{13}$$

上式中 D 函数的确切形式是:

$$D^{j}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{n}\frac{(-1)^n\{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!\}^{1/2}}{(j+m-n)!\,(j-m'-n)!\,n!\,(n-m+m')!}\cdot$$

$$e^{-im\alpha}(\cos(\beta/2))^{2j+m-m'-2n}(\sin(\beta/2))^{2n-m+m'}e^{-im'\gamma}.$$

在这组基上展开 $u_{jm}(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a}$ 如下:

$$u_{jm}(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a} = \sum_{b=\pm 1/2}\sum_{\lambda=-1}^{1} f_{jmb\lambda}(r)\,\eta^{j}_{mb\lambda}(\hat{r})^{\tau}_{a}. \tag{14}$$

把上式代入 Weyl-Dirac 方程,得到关于 $f_{jmb\lambda}(r)$ 的常 微分方程,结合有关收敛性的边界条

件，即可解出具有良好性质的 $f_{jmb\lambda}(r)$ 如下：

$$f_{(1/2)m(1/2)0}(r) = -f_{(1/2)m(-1/2)0}(r) = c_m 2\sqrt{2\pi}\, B_{/\!/}(r),$$

$$f_{(1/2)m(1/2)(-1)}(r) = -f_{(1/2)m(-1/2)1}(r) = c_m 4\sqrt{\pi}\, B_{\perp}(r), \tag{15}$$

其余分量为零．这里 c_m 是任意常数，但是，为了满足方程(8)，需选取

$$c_{1/2} = c_{-1/2} = 1. \tag{16}$$

现在验证它们确实满足方程(8)．由于 $H(\boldsymbol{r})^{\tau}_{ab}$ 的两列间满足与方程(10)类似的方程(11)．因而，只要验证它们满足方程(8)的第一列即可．

把 D 函数的确切形式代入方程(13)，容易证明下式：

$$\eta^{1/2}_{(1/2)(1/2)0}(\hat{r}) - \eta^{1/2}_{(1/2)(-1/2)0}(\hat{r}) = (2\pi)^{-1/2}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ \cos\theta \\ 2^{-1/2}\sin\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\eta^{1/2}_{(1/2)(1/2)(-1)}(\hat{r}) - \eta^{1/2}_{(1/2)(-1/2)1}(\hat{r}) = (4\pi)^{-1/2}\left\{\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}-2^{-1/2}\cos\theta e^{-i\varphi} \\ -\sin\theta \\ 2^{-1/2}\cos\theta e^{i\varphi}\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. + (4\pi)^{-1/2}\begin{pmatrix}0 \\ ie^{i\varphi}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}i2^{-1/2}e^{-i\varphi} \\ 0 \\ i2^{-1/2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}\right\}. \tag{18}$$

现取方程(8)的一个解 $u_{(1/2)(1/2)}(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a}$，利用方程(13)—(18)，容易得到 $U(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(1/2)} = u(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a} = u_{(1/2)(1/2)}(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a}$ 的明显形式．与方程(12)比较，可以发现：

$$H(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(1/2)} = U(\boldsymbol{r})^{\tau}_{a(1/2)}.$$

因此，它们确实满足方程(8)，从而给出方程(7)和(8)的一个解．

这样，就得到三维欧空间上的变型 Seiberg-Witten 磁单极方程的一个精确解，而且有良好的全空间解析性质．进一步，用上述精确解的解析式，容易验证它们带有限能量．

4　小结

Seiberg-Witten 磁单极方程在多方面有非常重要的理论和应用价值，但是，它不是共形不变的，在平坦空间，它没有 L^2 解．因而，有必要更多地研究方程本身，本文给出了一般三维流形上变型的 Seiberg-Witten 磁单极方程，该方程是共形不变的，而且在欧空间上给出了一个有限能量的解析的精确解．

作者感谢刘煜奋教授、宋行长教授和朱重远教授的有益讨论．

参 考 文 献

[1] Donaldson S. J. Diff. Geom., 1983, **18**:279; Topology, 1993, **29**:257
[2] Witten E. Commu. Math. Phys., 1988, **117**:353
[3] Witten E. Math. Res. Lett., 1994, **1**:769
[4] Seiberg N, Witten E. Nucl. Phys. 1994, **B426**:19
[5] Freund P G O. J. Math. Phys., 1995, **36**:2673
[6] Ma Zhongqi, Hou Boyuan, Yang Fuzhong. Modified Seiberg-Witten Monopole Equations and Their Exact Solutions, preprint
[7] Labastida J M F, Marino M. Nucl. Phys., 1995, **B448**:373—395

Modified Seiberg-Witten Monopole Equations on Three-Manifold*

Yang Fuzhong Hou Boyuan
(*Graduate School, University of Science and Technology of China, Beijing* 100039)
Ma Zhongqi
(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Abstract The modified Seiberg-Witten monopole equations on a three-manifold are presented in this paper. Special analytic solutions to these eqations are given. These eqations are invariant under the conformal transformation.

Key words gauge fields, Higgs fields, Seiberg-Witten monopole equations

Received 24 January 1998, Revised 2 March 1998
* Supported by Climbing Plan Project of 'Important Problems of Theoretical Physics at the Turn of the Century' & Grant No. LWTZ-1298 of the Chinese Academy of Sciences