经典与量子 Wilson 圈泛函的计算*

陈中秋　邵常贵　马为川
(湖北大学物理系　武汉　430062)

摘要　用微扰方法计算了 Kerr 联络的 Wilson 圈泛函(WLF)及全曲率平方型高导数引力的 WLF，结果表明在$\hbar$级该类型的高导数引力存在定域曲率激发.

关键词　Wilson 圈泛函(WLF)　holonomy　Kerr 解　全曲率平方(型)引力

在 Ashtekar 正则量子化体系中[1]，联络Γ的 holonomy (h_Γ)有着非常突出的地位。由 holonomy 的迹(Tr h_Γ)定义的 Wilson 圈泛函(WLF)，不仅可以充当量子波函数从联络表象到圈表象的表象变换，使得该体系的研究更具可操作性[2]，同时 WLF 本身具有规范不变性[3]，包含有一定的物理内涵. 比如，适当定义的 WLF 的量值反映了矢量沿空间中某一特定路线作平行移动后该矢量的改变(转动)情况；对量子引力而言，其量子平均值则反映了定域曲率激发的有无[4].

本文用微扰方法首先计算了旋转引力源引力的 WLF；随后计算了全曲率平方型高导数引力的量子 WLF，结果表明该种类型的高导数量子引力中有定域曲率激发的存在. 文献 [4] 中求得的经典与量子 WLF 是本文的特殊情况.

1　引力联络的 WLF

若所讨论的经典时空由 Lorentz 流形 M 描述，约定度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 记号为$(-+++)$. 现有一矢量 V^α 沿流形 M 上某一曲线 l 平行移动一段无穷小位移 $\mathrm{d}x^\mu$，则矢量 V^α 的改变将由下式给出：

$$\mathrm{d}V^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)V^\nu \mathrm{d}x^\mu , \tag{1}$$

式中$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$是熟知的时空流形的 christoffel 联络. 而矢量 V^α 沿一(有限的)平滑闭合曲线(圈)平移一周返回起点后，该矢量的变化情况将由联络Γ的 holonomy 给出：

$$h_\Gamma(l) = P\exp\left[\oint_l \mathrm{d}x^\mu \Gamma_\mu(x)\right] , \tag{2}$$

1997-02-03收稿
* 湖北省科委基金资助

式中 P 表示矩阵 $\Gamma_\mu((\Gamma_\mu)^\alpha{}_\beta=\Gamma^{\ \alpha}_{\mu\beta})$ 沿路线的排序算子，且 $(h_\Gamma)^\alpha_\beta$ 的指标由 $g_{\mu\nu}$ 来升降. 如果时空流形是弯曲的，h_Γ 不仅与联络 Γ 有关，还与积分的路线 l 有关.

在(2)式基础上，可进一步定义相应的 WLF

$$\omega_\Gamma(l)=\mathrm{Tr}[-\mathbb{1}+h_\Gamma(l)]=$$

$$-4+\mathrm{Tr}P\exp\left[\oint_l \mathrm{d}x^\mu\Gamma_\mu(x)\right], \tag{3}$$

上式中 $-\mathbb{1}$ 项的引入是为了保证在平坦时空里的 ω_Γ 为零.

众所周知，由作用量

$$S_{\text{Einstein}}=-\frac{2}{\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},\quad \kappa^2=32\pi G \tag{4}$$

描述的 Einstein 引力亦可用定域 Lorentz 群不变的规范理论给出. 在那里，容易证明与(2)式相应的 h_A(即由 Lorentz 联络 A 定义的 holonomy)是规范协变的，而与(3)式相应的 WLF(ω_A)是规范不变量. 并且可进一步证明 Lorentz 联络的 WLF 与 Christoffel 联络的 WLF 相等：$\omega_A(l)=\omega_\Gamma(l)$[4].

为了讨论引力的曲率激发，有必要计算其 WLF. 但在计算过程中，Christoffel 联络更容易处理，所以本文将从(3)式的定义出发. 将(3)式的指数展开，将得到含 1,2…个联络场 Γ 的项：

$$\omega_\Gamma(l)=\omega_{(1)}+\frac{1}{2}\omega_{(2)}+\cdots, \tag{5}$$

式中

$$\omega_{(1)}=\mathrm{Tr}\oint_l \mathrm{d}x^\mu\Gamma_\mu(x)=\oint_l \mathrm{d}x^\mu\,\Gamma^{\ \alpha}_{\mu\alpha}(x),$$

$$\omega_{(2)}=P\oint_l \mathrm{d}x^\mu\oint_l \mathrm{d}y^\nu\,\Gamma^{\ \alpha}_{\mu\beta}(x)\Gamma^{\ \beta}_{\nu\alpha}(y),$$

……

利用上式先就两种典型的经典解计算 Einstein 引力的 WLF，然后再计算 Einstein 引力和全曲率平方型引力的量子 WLF.

2 Einstein 引力的 WLF

2.1 球对称度规解的 WLF

由 Hilbert-Einstein作用量(4)式描述的引力的一个典型解是球对称度规解：

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}(r)\mathrm{d}t^2+g_{11}(r)\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{6}$$

这里选用的是球坐标系 $(t,\ r,\ \theta,\ \varphi)$. 与之相应，有下列的不为零的 Christoffel 联络分量：

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta / g_{11}(r),\ \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r},\ \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \mathrm{ctg}\theta. \tag{7}$$

选积分圈 l 为 $x^\mu(\varphi) = (t_0, r_0, \theta_0, \varphi)$, φ:0→2π,即 $\mathrm{d}t, \mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta = 0$. 则展式(5)中的通项为

$$\omega_{(n)} = P\oint_l \mathrm{d}x_1^{\mu_1} \cdots \oint_l \mathrm{d}x_n^{\mu_n} \Gamma^{\alpha_n}_{\mu_1\alpha_1}(x_1) \cdots \Gamma^{\alpha_{n-1}}_{\mu_n\alpha_n}(x_n) =$$

$$P\oint_l \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \oint_l \mathrm{d}\varphi_n \Gamma^{\alpha_n}_{\varphi_1\alpha_1}\Gamma^{\alpha_1}_{\varphi_2\alpha_2} \cdots \Gamma^{\alpha_{n-1}}_{\varphi_n\alpha_n} =$$

$$n!\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^{\varphi_{n-1}}\mathrm{d}\varphi_n\Gamma^{\alpha_n}_{\varphi_1\alpha_1}\Gamma^{\alpha_1}_{\varphi_2\alpha_2}\cdots\Gamma^{\alpha_{n-1}}_{\varphi_n\alpha_n},$$

形如$\Gamma^{\alpha}_{\varphi\beta}$的联络分量由(7)式给出,它们均与角$\varphi$无关,将它们代入上式可求得

$$\omega_{(n)} = \begin{cases} 0, & n = 1,\ 3,\ 5\cdots \\ 2(2\pi)^n(-)^{\frac{n}{2}}\left[\dfrac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)} + \cos^2\theta_0\right]^{\frac{n}{2}}, & n = 2,\ 4,\ 6\cdots \end{cases},$$

由此可求得该球对称引力的 WLF 值如下:

$$\omega_\Gamma = -2 + 2\cos\left[2\pi\sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{g_{11}(r_0)} + \cos^2\theta_0}\right], \tag{8}$$

(8)式为首次求得的球对称度规下的精确 WLF 结果.

以一种 Schwarzschild 解为例,

$$g_{11}(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1},\quad g_{00}(r) = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right),$$

有

$$\omega_\Gamma = -2 + 2\cos\left[2\pi\sqrt{1 - \frac{2m\sin^2\theta_0}{r_0}}\right].$$

由上式可见,i)若$\theta_0 = 0$(相应于积分圈收缩于南北极轴上的一点),$\omega_\Gamma = 0$,即矢量绕南北极轴上一点旋转一周不变; ii) 若$\theta_0 \neq 0$, $\omega_\Gamma \neq 0$,矢量沿圈 l 平行移动一周后有一小的变化;iii) 当 $r_0 \to \infty$,且$\theta_0 \neq 0$时,$\omega_\Gamma = 0$,此时圈 l 远离引力源,退化为平坦时空,矢量在平坦时空里平移一周不改变.

2.2 Kerr 联络的 WLF

Einstein 引力的另一个典型解是 Kerr 解(即旋转质量引起的引力场). 在球坐标系下其度规有如下形式[5]:

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -(1-2mr/\Sigma) & 0 & 0 & -2mra\sin^2\theta/\Sigma \\ 0 & \Sigma/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -2mra\sin^2\theta/\Sigma & 0 & 0 & (r^2+a^2+2mra^2\sin^2\theta/\Sigma)\sin^2\theta \end{bmatrix}. \tag{9}$$

相应的有

$$g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} -[1+2mr(r^2+a^2)]/\Sigma\Delta & 0 & 0 & -2mra/\Sigma\Delta \\ 0 & \Delta/\Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma^{-1} & 0 \\ -2mra/\Sigma\Delta & 0 & 0 & \Sigma^{-1}\sin^{-2}\theta-a^2/\Sigma\Delta \end{bmatrix},$$

式中$\Sigma(r,\theta)\equiv r^2+a^2\cos\theta$, $\Delta(r,\theta)\equiv r^2-2mr+a^2$.

由此可求得不为零的 Christoffel 联络分量如下：

$\Gamma^t_{tr}=m(r^2+a^2)(r^2-a^2\cos^2\theta)/\Sigma^2\Delta$, $\Gamma^t_{t\theta}=-2mra\sin\theta\cos\theta/\Sigma^2$,

$\Gamma^t_{\varphi r}=-ma\sin^2\theta[3r^4+r^2a^2(1+\cos^2\theta)-a^4\cos^2\theta]/\Sigma^2\Delta$,

$\Gamma^t_{\varphi\theta}=2mra^3\sin^3\theta\cos\theta/\Sigma^2$;

$\Gamma^r_{rr}=r\Sigma-(r-m)/\Delta$, $\Gamma^r_{\theta\theta}=-r\Delta/\Sigma$, $\Gamma^r_{r\theta}=-a^2\sin\theta\cos\theta/\Sigma$,

$\Gamma^r_{\varphi t}=-ma\sin^2\theta(r^2-a^2\cos^2\theta)\Delta/\Sigma^3$,

$\Gamma^r_{\varphi\varphi}=-[r-ma^2\sin^2\theta(r^2-a^2\cos^2\theta)/\Sigma^2]\Delta\sin^2\theta/\Sigma$;

$\Gamma^\theta_{tt}=-2mra^2\sin\theta\cos\theta/\Sigma^3$, $\Gamma^\theta_{rr}=a^2\sin\theta\cos\theta/\Sigma\Delta$,

$\Gamma^\theta_{\theta\theta}=-a^2\sin\theta\cos\theta/\Sigma$, $\Gamma^\theta_{\theta r}=-r/\Sigma$,

$\Gamma^\theta_{\varphi t}=2mra(r^2+a^2)\sin\theta\cos\theta/\Sigma^3$, $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}=-[\Delta+2mr(r^2+a^2)^2/\Sigma^2]\sin\theta\cos\theta/\Sigma$;

$\Gamma^\varphi_{tr}=-ma(r^2-a^2\cos^2\theta)/\Sigma^2\Delta$, $\Gamma^\varphi_{t\theta}=2mra\,\mathrm{ctg}\theta/\Sigma^2$,

$\Gamma^\varphi_{\varphi r}=[r-2mr^2/\Sigma-ma^2\sin^2\theta(r^2-a^2\cos^2\theta)/\Sigma^2]/\Delta$,

$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}=\mathrm{ctg}\theta(1+2mra^2\sin^2\theta/\Sigma^2)$.

选积分圈 l 为 $x^\mu(\varphi)=(t_0,r_0,\theta_0,\varphi)$. 由(5)式有

$$\omega_{(1)}=\oint_l \mathrm{d}x^\mu\,\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}(x)=\oint_l \mathrm{d}\varphi\,\Gamma^\alpha_{\varphi\alpha}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi(\Gamma^t_{\varphi t}+\Gamma^r_{\varphi r}+\Gamma^\theta_{\varphi\theta}+\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi})=0,$$

$$\omega_{(2)}=P\oint_l \mathrm{d}x^\mu\oint_l \mathrm{d}y^\nu\,\Gamma^\alpha_{\mu\beta}(x)\,\Gamma^\beta_{\nu\alpha}(y)=P\oint_l \mathrm{d}\varphi_1\oint_l \mathrm{d}\varphi_2\Gamma^{\ \alpha}_{\varphi_1\beta}\Gamma^{\ \beta}_{\varphi_2\alpha}=$$

$$2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\varphi_1}\mathrm{d}\varphi_2(\Gamma^{\ t}_{\varphi_1 r}\Gamma^{\ r}_{\varphi_2 t}+\Gamma^{\ t}_{\varphi_1\theta}\Gamma^{\ \theta}_{\varphi_2 t}+\Gamma^{\ r}_{\varphi_1 t}\Gamma^{\ t}_{\varphi_2 r}+\Gamma^{\ r}_{\varphi_1\varphi}\Gamma^{\ \varphi}_{\varphi_2 r}+$$

$$\Gamma^{\ \theta}_{\varphi_1 t}\Gamma^{\ t}_{\varphi_2\theta}+\Gamma^{\ \theta}_{\varphi_1\varphi}\Gamma^{\ \varphi}_{\varphi_2\theta}+\Gamma^{\ \varphi}_{\varphi_1 r}\Gamma^{\ r}_{\varphi_2\varphi}+\Gamma^{\ \varphi}_{\varphi_1\theta}\Gamma^{\ \theta}_{\varphi_2\varphi})=$$

$$2(2\pi)^2[-1+2mr_0(r_0^2+a^2)(r_0^2-3a^2\cos^2\theta_0)\sin^2\theta_0/\Sigma^3(r_0,\theta_0)+$$

$$(ma\sin^2\theta_0)^2(r_0^4-6a^2r_0^2\cos^2\theta_0+a^4\cos^4\theta_0)/\Sigma^4(r_0,\theta_0)],$$

$\omega_{(3)}$项有$\oint d\varphi_1 \oint d\varphi_2 \oint d\varphi_3 \Gamma_{\varphi_1\beta}^{\alpha} \Gamma_{\varphi_2\gamma}^{\beta} \Gamma_{\varphi_3\alpha}^{\gamma}$形式，容易验算它的贡献为零．而$\omega_{(4)}$的贡献可求得有如下结果：

$$\begin{aligned}\omega_{(4)} = {} & 2(2\pi)^4\{[-1 + 2mr\sin^2\theta_0(r_0^2 - 3a^2\cos^2\theta_0)(r_0^2 + a^2) / \Sigma^3(r_0,\theta_0) + \\ & (ma\sin^2\theta_0)^2(r_0^4 - 6r_0^2a^2\cos^2\theta_0 + a^4\cos^2\theta_0) / \Sigma^4(r_0,\theta_0)]^2 + \\ & 2(ma\sin^2\theta_0\cos\theta_0)^2[(3r_0^2 - a^2\cos^2\theta_0)(r_0^2 + a^2) + 2mr_0a^2\sin^2\theta_0 \cdot \\ & (r_0^2 - a^2\cos^2\theta_0) / \Sigma(r_0,\theta_0)]^2\}.\end{aligned}$$

WLF更高阶项的贡献可作类似的计算．分析表明，奇次阶项的贡献($\omega_{(2k+1)}$)为零．

另外，当参数 $a = 0$ 时，以上求得的各阶WLF将退化为2.1节中相应的结果[4]．

3 量子WLF

本节将讨论量子Einstein引力以及全曲率平方型量子引力的WLF的行为．

先按下式来分解引力度规 $g_{\mu\nu}(x)$：

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \tag{10}$$

式中$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-+++)$为经典背景，$h_{\mu\nu}$可看作量子扰动，由它代表引力子在真空中的传播．

若描述系统的作用量为 S，则其生成泛函由下式给出：

$$Z[J] = \int [\mathrm{d}g_{\mu\nu}] \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(S[g] + \int \mathrm{d}^4x J^{\mu\nu} g_{\mu\nu}\right)\right\}. \tag{11}$$

在量子情况下，一个物理量 F 的行为将由其量子平均值给定，即

$$\langle F\rangle_0 = \int [\mathrm{d}g_{\mu\nu}] F[g] \exp(\mathrm{i}S/\hbar),$$

$F[g]$是该物理量相应的经典函数．

对WLF而言，有

$$\langle \omega_\Gamma\rangle_0 = \langle \omega_{(1)}\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle \omega_{(2)}\rangle_0 + \cdots. \tag{12}$$

因$\omega_{(1)} \propto \Gamma$，而联络场$\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}$为一对称场(即非真空破缺场)，其真空期待值$\langle\Gamma\rangle_0 = 0$，进而$\langle\omega_{(1)}\rangle_0 = 0$．所以，$\langle\omega_\Gamma\rangle_0$的带头项贡献将由联络场$\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}(x)$的裸传播子形式给出($\hbar\kappa^2$级)，

$$\langle \omega_{(2)}\rangle_0 = \oint_l \mathrm{d}x^\mu \oint_l \mathrm{d}y^\nu \langle \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}(x)\, \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta}(y)\rangle.$$

由联络的表式 $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\beta\nu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$ 及度规的展式(10)，该贡献亦可由自由引力传播子给出：

$$\begin{aligned}\langle \omega_{(2)}\rangle_0 = \frac{\mathrm{i}\kappa^2}{2} \oint_l \mathrm{d}x^\mu \oint_l \mathrm{d}y^\nu \Big[& -\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu D_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta}(x-y) + \\ & \eta^{\alpha\beta}\Box D_{\mu\alpha,\nu\beta}(x-y) - \partial^\alpha\partial^\beta D_{\mu\alpha,\nu\beta}(x-y)\Big],\end{aligned} \tag{13}$$

式中 $D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x-y)=\mathrm{i}^{-1}\langle h_{\mu\nu}(x)h_{\alpha\beta}(y)\rangle_0$为自由引力传播子.

下面将分别就两种典型情况给出其相应的$\langle\omega_{(2)}\rangle_0$项的贡献.

3.1 Einstein 引力的 WLF

若讨论的是由(4)式描述的 Einstein 引力. 应用展式(10), S_{Einstein}可表示成为引力场 h 的平方项、立方项……的幂级形式. 其中,平方项将给出引力子的传播子,高次项表示引力子的自相互作用.

应用谐和规范

$$\partial_\mu h^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial^\nu h^\mu_\mu=0 \tag{14}$$

可求得引力子传播子为

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x)=\frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}+\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)D(x), \tag{15}$$

式中
$$D(x)=-\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}=-\frac{1}{4\pi^2x^2},\ x^2=\boldsymbol{x}^2-x^{0^2}-\mathrm{i}\varepsilon,$$

且 $\Box D(x)=\delta^4(x)$.

将(15)式代入(13)式,可求得 Einstein 引力的量子 WLF 的带头项贡献为

$$\langle\omega_{(2)}\rangle_0=\frac{\mathrm{i}\kappa^2}{4}\oint_l\mathrm{d}x^\mu\oint_l\mathrm{d}y^\nu[-8\partial_\mu\partial_\nu D(x-y)+3\eta_{\mu\nu}\Box D(x-y)]=$$

$$\frac{\mathrm{i}\kappa}{4}\oint_l\mathrm{d}x^\mu\oint_l\mathrm{d}y^\nu\left[8\partial_\mu\partial_\nu\frac{1}{4\pi^2(x-y)^2}+3\eta_{\mu\nu}\delta^4(x-y)\right]. \tag{16}$$

(16)式的结果表明,该种引力的$\langle\omega_{(2)}\rangle_0$的被积函数为全梯度项与超定域项($\delta(x-y)$形式),没有第三种形式,所以积分结果应为零. 它意味着平坦背景下 Einstein 量子引力至少在$\hbar$级是无定域曲率激发的.

3.2 全曲率平方型量子引力的 WLF

若考虑有如下形式的高导数引力[7]

$$S_{\text{higher}}=\int\mathrm{d}^4x\left(\kappa^{-2}\gamma R-\beta R^2+\alpha R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}+\Omega R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right), \tag{17}$$

用展式(10)亦可以将 S_{higher}表示成为 h 的幂级数形式,由 h 的平方项贡献可求出该种高导数引力的引力子传播子有如下形式:

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x)=\frac{1}{\gamma}\left[(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}+\eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})D(x)-(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\beta\nu}+\eta_{\mu\beta}\eta_{\alpha\nu}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})D_{(M_1)}(x)+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}D_{(M_2)}(x)\right], \tag{18}$$

式中，$D_{(M)}(x) = -\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2} e^{ip \cdot x}$ 为质量为 M 的标量粒子的传播子，$M_1^2 = \gamma / (\alpha + 4\Omega)\kappa^2$，$M_2^2 = \gamma / (4\beta - \alpha)\kappa^2$，且 $(\Box - M^2) D_{(M)} = \delta^4(x)$.

将(18)式代入(13)式，即可求得该种高导数引力的量子 WLF($\hbar\kappa^2$级)贡献为

$$\langle \omega_{(2)} \rangle_0 = \frac{i\kappa^2}{4\gamma} \oint_l dx^\mu \oint_l dy^\nu \Big[-16\Big(\partial_\mu \partial_\nu - \frac{3}{8}\eta_{\mu\nu}\Box\Big) D(x-y) + 19\Big(\partial_\mu \partial_\nu - \frac{7}{19}\eta_{\mu\nu}\Box\Big) D_{(M_1)}(x-y) - 3\Big(\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\Box\Big) D_{(M_2)}(x-y) \Big] = \frac{i\kappa^2}{4\gamma} \oint_l dx^\mu \oint_l dy^\nu \Big[16\partial_\mu \partial_\nu \frac{1}{4\pi^2 (x-y)^2} + 19\partial_\mu \partial_\nu D_{(M_1)}(x-y) - 3\partial_\mu \partial_\nu D_{(M_2)}(x-y) - 7M_1^2 \eta_{\mu\nu} D_{(M_1)}(x-y) + M_2^2 \eta_{\mu\nu} D_{(M_2)}(x-y) \Big], \tag{19}$$

上式除第一项为 R 的贡献外，其余均为曲率平方项所贡献，其中第二、四项来自 $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 的贡献，第三、五项来自 $R^2 + R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 的贡献. 由于(19)式中有 $M^2 D_{(M)}(x)$ 形式项的存在，$\langle \omega_{(2)} \rangle_0$ 将有不为零的结果. 即在$\hbar\kappa^2$级，一矢量沿任意圈l平行移动一周返回起点后矢量的方向有一个小的改变(或转动了一个小角度)，或者说这种高导数引力在$\hbar\kappa^2$级有定域曲率激发[6].

若令$\Omega = 0$，(19)式即回到 Stelle 量子引力的情形[6,8]. 此时的$\langle \omega_{(2)} \rangle_0 \neq 0$，即 Stelle 量子引力亦存在定域曲率激发.

参　考　文　献

[1] Ashtekar A. New Perspectives in Canonical Gravity (with Invited Contributions). Naples: Bibliopolis, 1988

[2] Rovelli C, Smolin L. Nucl. Phys., 1990, **B331**:80—152

[3] Di Bartolo C, Gambini R, Griego J. Phys. Rev., 1995, **D51**(2):502—516

[4] Modanese G. Phys. Rev., 1994, **D49**:6534—6542

[5] Kerr R P. Phys. Rev. Lett., 1963, **11**:237—240

[6] Modanese G. Phys. Lett., 1992, **B288**:69—71

[7] Shao Changgui, Chen Zhongqiu. J Hubei University (Natural Science Edition, in Chinese), 1995, **17**(4):401—407

(邵常贵，陈中秋. 湖北大学学报(自然科学版)，1995，**17**(4):401—407)

[8] Stelle K S. Phys. Rev., 1977, **D16**:953—969

Calculation of Wilson Loop Functionals for Classical and Quantum Gravities *

Chen Zhongqiu Shao Changgui Ma Weichuan

(*Department of Physics, Hubei University, Wuhan* 430062)

Abstract Using perturbative method we calculate Wilson loop functionals (WLFs) for Kerr gravitational field and for $R+R^2+R.R^{\cdot}+R....R^{\cdots}$ quantum gravity. The results show that localized curvature excitations of order $\hbar\kappa^2$ exist in this type of higherderivative quantum gravity.

Key words Wilson loop functional (WLF), holonomy, Kerr solution, gravity of type $R+R^2+R.R^{\cdot\cdot}+R....R^{\cdots}$

Received 3 February 1997

* Supported by the Provincial Science and Technology Commission Foundation of Hubei