

格点 $U(1)$ 规范场-Higgs (定模) 模型的 解析计算*

任学藻¹⁾ 陈莹 朱允伦

(北京大学物理系 北京 100871)

摘要 用变分累积展开法,在格点上对基础表示的定模 Higgs 场与 $U(1)$ 规范场的耦合系统的相结构进行了研究,变分参数用主值变分法辅之以聚点法来确定,得到了与 Monte Carlo 模拟很好符合的相图;并计算了 $N_t = 1$ 的有限温度情形下定模 $U(1)$ -Higgs 系统的 Polyakov 线 $\langle L \rangle$.

关键词 格点规范理论 累积展开方法 Higgs 场 相结构

1 引言

在格点规范理论中,对 $U(1)$ 规范场与 Higgs 场相耦合的系统已经有一系列研究^[1-9],一方面由于它是弱电统一模型的一部分,另一方面,这个研究有助于探索格点规范理论的方法.

对格点上基础表示的定模 $U(1)$ -Higgs 模型,Fralkin 和 Shenken^[1] 早已证明:其禁闭相与 Higgs 相是解析连通的. Monte Carlo 模拟^[2-7]证实了这个定理,但无论是用 MC 模拟,还是用解析方法^[8],对相变是一级还是二级的问题一直没有取得一致意见.然而,对此问题的变分累积展开^[8]只到二级,其相图与 MC 模拟结果还有一定距离,因此,有必要展开到更高级的近似.

在变分累积展开^[8]中引入了试探作用量,其变分参数的确定对累积展开的收敛速度有很大影响.通常确定变分参数有三种主要方法:(1)主值变分法,即用一级近似的自由能 F_1 对变分参数取极小值来确定.由于 Jensen 不等式的存在,这一条件可给出自由能的上界.用此方法给出的结果在强、弱耦合区与 MC 结果符合甚好,但在中间耦合区有一个很大的跳跃,引起序参量在此区间也有一个突变,这样就可能带来非物理的一级相变.(2)全变分法,即用自由能逐级的变分极小来确定变分参数.通过计算,发现此方法仅在个别模型中得到比较好的结果,在多数模型中收敛较差^[9,10],甚至无法保证高一级近似一定比低级近似更好的结果.(3)聚点法,这是近年来由 Kerler^[11]提出的方法,它是用各级自

1997-03-21收稿

* 国家自然科学基金资助

1) 通讯地址:西昌师范专科学校物理系,四川西昌 615021

由能或序参量随变分参数变化曲线“相聚”的位置(聚点)来确定的. 这个方法是经验性的, 对多数模型, 它有较快的收敛行为, 但在中间耦合区仍收敛较慢^[10], 因而较难以准确确定变分参数, 必须将自由能或序参量展开到很高阶近似才能较准确地确定变分参数. 在文献 [10, 12] 中, 对主值变分法与聚点法作了比较, 发现在强、弱耦合区两种方法所定的参数数值相差不大, 给出的序参量数值也趋于一致. 因此本文运用主值变分法与聚点法相结合的办法来确定中间耦合区的变分参数, 这样既可避免主值变分法带来的可能是非物理的一级相变, 又可较准确地确定聚点位置.

2 零温度的相结构

在 d 维超立方格子上, $U(1)$ 规范场与定模基础表示 Higgs 场耦合系统的作用量为^[5]:

$$S = S_G + h \sum_L \cos \theta_L, \quad (1)$$

$$S_G = \beta \sum_p \text{tr} U_p, \quad (2)$$

其中 S_G 是 Wilson 作用量, $U_L \in U(1)$ 定义在链上, $\beta = \frac{1}{g^2}$, h 为耦合常数.

系统的配分函数为:

$$Z = e^{-NF} = \int [dU] e^S, \quad (3)$$

其中 N 为格点数目, F 为单位格点的自由能.

相结构通常是通过计算某些序参量来研究的, 在本文中, 引入如下四个序参量:

$$P = \langle \text{Re} U_p \rangle = -\frac{2}{d(d-1)} \frac{\partial F}{\partial \beta}, \quad (4)$$

$$M = \langle \text{Re} U_L \rangle = -\frac{1}{d} \frac{\partial F}{\partial h}, \quad (5)$$

$$C_\beta = \frac{\partial P}{\partial \beta}, \quad (6)$$

$$C_h = \frac{\partial L}{\partial h}. \quad (7)$$

按变分累积展开方法, 引入如下试探作用量:

$$S_0 = J \sum_L \cos \theta_L, \quad (8)$$

J 为待定变分参数, 系统的配分函数可通过累积展开表示为^[13]:

$$Z \equiv Z_0 \exp\left(\sum_n \frac{1}{n!} K_n\right), \quad (9)$$

$$Z_0 \equiv e^{-NF_0} = \int [dU] e_0^S = [I_0(J)]^{Nd}, \quad (10)$$

其中 F_0 是以 S_0 为作用量的系统的单位格点自由能, $I_0[J]$ 为零阶变型贝塞尔函数, K_n 是以 Z_0 为配分函数的累积平均:

$$K_n = \left\langle \left[S_G + (h - J) \sum_L \cos \theta_L \right]^n \right\rangle_c. \quad (11)$$

用类似文献 [13] 的方法, 可证明:

$$K_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m (h - J)^m \frac{\partial^m}{\partial J^m} \langle S_G^{n-m} \rangle_c + (h - J)^n \ln Z_0. \quad (12)$$

$\langle S_G^{n-m} \rangle_0$ 的计算与文献 [14] 完全一样, 定义:

$$\omega_n = \frac{I_n(J)}{I_0(J)}, \quad (13)$$

自由能展开到第 i 级的近似可表示为:

$$F_i(\beta, J, h) = F_0 - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} K_n, \quad (14)$$

其中自由能的主值为

$$F_1 = -d \ln I_0(J) - \frac{1}{2} d(d-1) \beta \omega_1^4 + (h - J) d \omega_1. \quad (15)$$

由 $\frac{\partial F_1}{\partial J} = 0$ 得到

$$J - h = 2(d-1) \beta \omega_1^3(J). \quad (16)$$

下面讨论几个极限情形:

(1) $h = 0$ 情形.

系统相当于 $U(1)$ 纯规范场理论, 对 $d = 4$ 情形, 由 (16) 式可得, 当 $\beta < 0.93$ 时, 只有 $J = 0$ 的强耦合解, 而当 $\beta > 0.93$ 时, 有两支解, 如用主值变分法确定变分参数, 只有当 $\beta > 1.21$ 时, 才从 $J = 0$ 的强耦合解跳到上一支解, 这样就在 $\beta = 1.21$ 处出现一个自由能突变, 相

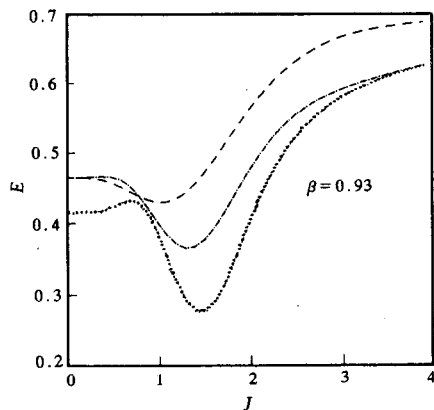


图1 4维 $U(1)$ 模型 E_i 对 J 的扫描图 ($i=1, 2, 3$)

— 1st VCE; - - - - 2nd VCE; 3rd VCE.

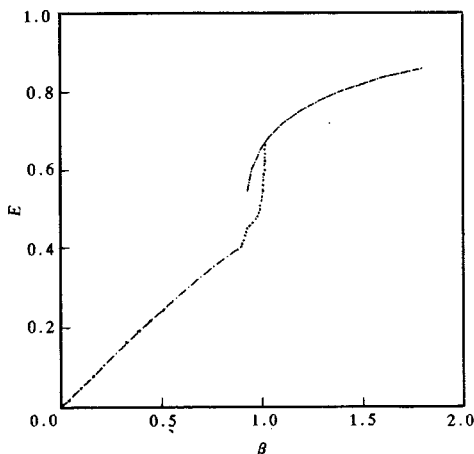


图2 4维 $U(1)$ 纯规范场模型的平均元格内能

(MC数据取自文献[15])

— VCE(MV); - - - - VCE(AP); MC.

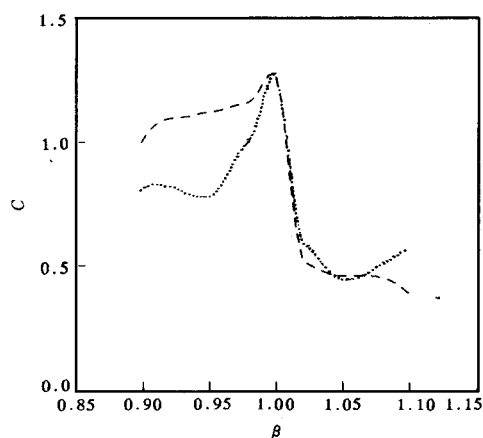


图3 4维 $U(1)$ 纯规范场模型的比热(MC数据取自文献[15])
—— 4th VCE; MC.

应地带来了其他序参量的突变,所以,用主值变分法总要出现一个一级相变,而与模型无关,这显然是不合理的,这个一级相变可能是非物理的.最近文献[10]讨论了累积展开的收敛性问题,指出在不同耦合区域应采用不同方法来确定变分参数,因此我们在 $0.9 < \beta < 1.2$ 这个中间耦合区,尝试采用聚点法来确定变分参数,但发现只有近似的聚点区(如图1所示),因此我们只能在(16)式解的附近寻找聚点区,得到了与MC^[15]一致的结果(图2,3),由图3可见,在 $\beta = 1.0$ 处有一比热峰,因此4维 $U(1)$ 纯规范场在 $\beta = 1.0$ 处有一个二级相变.

(2) $\beta \rightarrow \infty$ 情形.

这时规范场自由度冻结,系统退化为4维

$O(2)$ 自旋模型,按照文献[3]的结果,其相变点在 $h_c = 0.30$,本文结果与此相符.

因此我们的结果在以上两个极限情形,都与已有结果一致,表明所用方法是正确的.通过采用主值变分法与在相变点附近采用聚点法(图4)确定变分参数,得到与MC^[3]符合甚好的结果(图5).

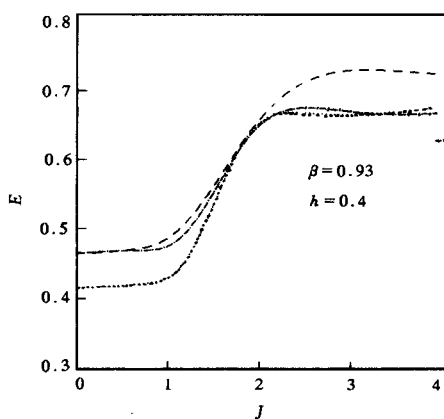


图4 4维定模 $U(1)$ -Higgs模型 E_i 对 J 的扫描图
($i=1, 2, 3$)
— 1st VCE; - - - 2nd VCE; 3rd VCE.

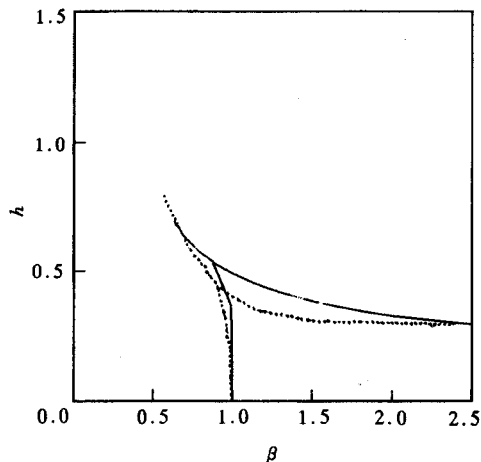


图5 4维 $U(1)$ -Higgs(定模)模型的相图
(MC数据取自文献[3])
—— VCE; MC.

我们的计算还显示,在相变点都有一明显的比热峰,这表明,所有的相变都是二级的.

3 有限温度情形($N_\tau = 1$)

对于有限温度 $U(1)$ -Higgs系统只有文献[16]作了一些分析.

在有限温度情形, 研究相变采用的序参量为 Polyakov 线, 在 $N_t = 1$ 时为

$$\langle L \rangle = \cos \theta_{l_c} \quad (17)$$

采用的试探作用量为

$$S_0 = J \sum_{l_s} \cos \theta_{l_s} + K \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t}, \quad (18)$$

其中求和分别对所有空间链 l_s 和类时链 l_t 进行, J, K 为变分参数.

$\langle L \rangle$ 可以通过累积展开来计算, 到第 i 级时为:

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^i \langle L(S - S_0)^n \rangle_c. \quad (19)$$

由于 $N_t = 1$ 时类时方向的周期性, 所有含类空元格或与单纯类空链的关联图的累积平均均为零, 因此在第四级近似时有

$$\langle L \rangle = \langle L \rangle_0 + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n!} \langle L[S_G + (h - K) \sum_{l_t} \cos \theta_{l_t}]^n \rangle_c. \quad (20)$$

$\langle L \rangle$ 依赖于 β, K 和 h , 它的计算与文献 [14] 相似. 变分参数 J, K 仍用主值变分法确定.

$$\begin{aligned} F_1 = & -(d-1) \ln I_0(J) - \ln I_0(K) - \frac{1}{2} \beta(d-1)(d-2) \omega_1^4(J) - \\ & \beta(d-1) \xi_1^2(K) - h(d-1) \omega_1(J) - h \xi_1(K) + \\ & (d-1) J \omega_1(J) + K \xi_1(K), \end{aligned} \quad (21)$$

这里

$$\xi_1(K) = \frac{I_1(K)}{I_0(K)}, \quad (22)$$

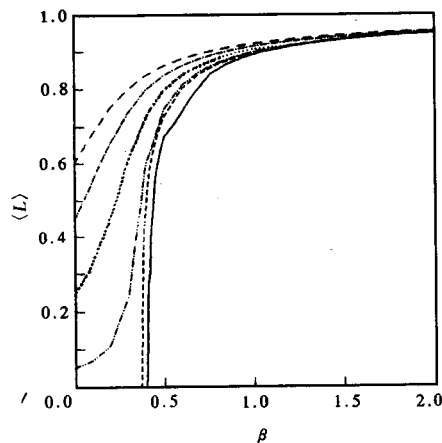


图 6 4维 $U(1)$ -Higgs 模型 $\langle L \rangle$ 与 β 的关系
($N_t=1$) (MC 数据取自 [17])

-- $h=1.5$; -·-·- $h=1.0$; ····· $h=0.5$;
- - - - $h=0.1$ - - - - $h=0$; —— MC ($h=0$).

由 $\frac{\partial F_1}{\partial J} = 0$ 与 $\frac{\partial F_1}{\partial K} = 0$ 得到:

$$J - h = 2\beta(d-2)\omega_1^3(J), \quad (23)$$

$$K - h = 2\beta(d-1)\xi_1(K). \quad (24)$$

显然, J, K 完全独立.

在 $h = 0$ 情形, 系统为有限温度 $U(1)$ 纯规范理论模型, 在 $\beta < 0.33$ 时, $K = 0$. 在 $\beta > 0.33$ 时, $K \neq 0$, 在 $0.33 < \beta < 0.45$ 的中间耦合区辅之以聚点扫描法, 可以得到相变点在 $\beta_c = 0.38$ 处, 与 Monte Carlo 结果^[17]符合较好. 而在 $h \neq 0$ 时, 用相似的方法计算了 $N_c = 1$ 的 Polyakov 线平均值 $\langle L \rangle$ (图 6), 可以看出, 没有相变发生, 这与文献 [17] 中 $N_c = 2$ 的结果一致.

总之, 我们采用主值变分法与聚点法相结合的方法来确定中间耦合区的变分参数, 对定模 $U(1)$ -Higgs 系统在零温和有限温度下都给出了与 Monte Carlo 模拟符合很好的结果.

参 考 文 献

- [1] Fradkin E, Shenker S H. Phys. Rev., 1979, **D19**:3682
- [2] Callaway D J E, Carson L J. Phys. Rev., 1982, **D25**:531
- [3] Labastica J M F et al. Phys. Rev., 1981, **D34**:3165
- [4] Alonso J L et al. Phys. Lett., 1992, **B296**:154
- [5] Bhanot G, Freedman B A. Nucl. Phys., 1981, **B190**: 357
- [6] Esprin D, Wheater J F. Nucl. Phys., 1985, **B258**:101
- [7] Zhu Yunlun. Nucl. Phys., B(Proc. Suppl.) 1992, **26**:552
- [8] Yang J M. Commun. Theor. Phys., 1992, **18**:119; Wu C M et al. Phys. Lett., 1989, **216B**:381
- [9] Zheng Xite, Chen Hong, Lu Zhao et al. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1995, **19**:137 (郑希特, 陈洪, 卢昭等. 高能物理与核物理, 1995, **19**:137.)
- [10] Chen Ying, Zhu Yunlun. to be published in Commun. Theor. Phys.
- [11] Kerler W. Phys. Rev. Lett., 1988, **60**:1906; Kerler W, Schulke L. Phys. Lett. 1988, **B201**:123
- [12] Zheng Xite, Ren Xuezhao. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1993, **17**:134 (郑希特, 任学藻. 高能物理与核物理, 1993, **17**:134.)
- [13] Zheng X T, Tan Z G, Wang J. Nucl. Phys., 1987, **B287**:171
- [14] Wang Jie, Tan Zuguo, Zheng Xite. High Energ. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1988, **12**:329 (王杰, 谭祖国, 郑希特. 高能物理与核物理, 1988, **12**:329.)
- [15] Creutz M, Jacobs L, Rebbi C. Phys. Rev., 1979, **D20**:1915; Lautup B, Nauenberg M. Phys. Lett., 1980, **B95**:63
- [16] Banks T, Bobinovici E. Nucl. Phys., 1979, **B160**:349
- [17] Lilic N B et al. Phys. Lett., 1987, **B198**:35

Analytical Study of Lattice $U(1)$ Gauge-Higgs Models With Fixed Modulus*

Ren Xuezhao Chen Ying Zhu Yunlun

(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract Using variational cumulant expansion we study the lattice $U(1)$ gauge-Higgs models with fixed modulus. To determine the variational parameters, we combine main-value method and accumulated point method. The phase diagrams obtained are consistent with Monte Carlo results. We also calculate Polyakov line $\langle L \rangle$ with $N_t = 1$ in finite temperature.

Key words lattice gauge theory, cumulant expansion, Higgs, phase structure