第23卷 第11期 高能物理与核物理 Vol.23, No.11
1999 年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1999

规范作用与引力的统一*

刘耀阳
(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026)
(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

孙腊珍
(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026)

江向东
(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 在标准模型手征扩充理论的基础上，假定规范作用与引力统一，计算表明，夸克和轻子只可能有三代；所定出的统一点的能量标度为 4.4×10^{18}GeV，轻子性夸克的质量标度为 10^{10}GeV.

关键词 手征性 引力统一 规范作用

标准模型(SM)理论自建立以来，虽然实验上还未发现任何对它的明显偏离，但人们仍旧认为它不是一个完备的理论. 因此，为减少它的自由参数而提出了大统一理论(GUT)[1]，为克服其不自然性问题又将它作了最小超对称扩充(MSSM)[2]. 人们惊奇地发现，MSSM的3个耦合常数在质量标度 $M \approx 2 \times 10^{16}$GeV 处相交，与普朗克质量 $M_{\rm P}$仅相差3个数量级. 这促使人们提出引力亦可能与之相统一的想法，弦理论在这方面作了许多重要的尝试[3]. 我们曾进一步提出一些想法，即认为SM假定了两种宇称不守恒的来源是不合乎美学要求的；它所采用的手征群 $SU(2)_{\rm L}$亦不满足公理化场论的要求，因而做了SM的手征扩充[4]. 这种手征扩充理论是一个矢量型的规范理论，经过自发破缺，粒子被分为轻的左手型的普通夸克和重的右手型的新夸克，前者是构成强子的强子性夸克，后者是构成轻子的轻子性夸克. 我们还提到过，仅当代的数目 $n_{\rm g} \geqslant 3$时这样一个模型才是可能的，因为只有此时在短距离才有一个强的吸引力为重夸克构成束缚态提供可能性，这点因无法处理束缚态问题而不能给予严格证明. 此外，以前我们还不能给出轻子性夸克的能标，也不能把代的数目完全确定下来. 而在本文，假定规范耦合与引力进一步统一，在被广泛采用的夸克阈的假定下，计算表明，只有 $n_{\rm g} = 3$ 才是允许的，所定出的轻子性夸克的能标为

1998-08-10收稿
* 国家自然科学基金资助项目和中国科学院LWTZ-1298资助

10^{10}GeV，正好落在宇宙线研究的 $E \geqslant 10^{19}$eV 的区域．

从耦合常数的演化方程着手：

$$\mu \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\beta_i}{\pi} \alpha_i^2, \tag{1}$$

$i = 1, 2, 3$，分别对应于 $U(1)$，$SU(2)_L$，$SU(3)_C$．在单圈近似下，β 函数是容易计算的．设 M_1 为轻子性夸克的能标．当 $M_Z \leqslant \mu \leqslant M_1$ 时，广泛认为所有的轻夸克道都被打开，计算得到[5]：

$$\beta_1 = \frac{1}{6}(10n_g + n_e), \quad \beta_2 = \frac{1}{6}(6n_g - 18 + n_e),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6}(6n_g - 27), \tag{2}$$

$$n_e = n_{\tilde{H}} + \frac{1}{2} n_H, \tag{3}$$

其中 $n_{\tilde{H}}$ 和 n_H 分别为质量大于 Z° 的质量 M_Z 小于 M_1 的 Higgsino 和 Higgs 二重态的数目．当取两个二重态 Higgs 时，$n_{\tilde{H}}$ 和 n_H 的最大取值为 2．类似地，当 $\mu \geqslant M_1$ 时，则应加上轻子性夸克的贡献，假定 n_e 取最大值则有：

$$\beta_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{31}{2} n_g + 3\right), \quad \beta_2 = \frac{1}{6}\left(\frac{21}{2} n_g - 15\right),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6}(12n_g - 27), \tag{4}$$

于是得到耦合常数的演化方程：

当 $M_Z \leqslant \mu \leqslant M_1$ 时：

$$\frac{k}{\frac{5}{3}\alpha_1(\mu)} = \frac{k}{\frac{5}{3}\alpha_1(M)} + \frac{k}{6\pi}\left(6n_g + \frac{3}{5} n_e\right) \ln \frac{M}{\mu}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(M)} + \frac{1}{6\pi}(6n_g - 18 + n_e) \ln \frac{M}{\mu}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)} = \frac{1}{\alpha_3(M)} + \frac{1}{6\pi}(6n_g - 27) \ln \frac{M}{\mu}; \tag{7}$$

当 $\mu \geqslant M_1$ 时：

$$\frac{k}{\frac{5}{3}\alpha_1(\mu)} = \frac{k}{\frac{5}{3}\alpha_1(N)} + \frac{k}{6\pi}\left(\frac{93}{10} n_g + \frac{9}{5}\right) \ln \frac{N}{\mu}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{1}{\alpha_2(N)} + \frac{1}{6\pi}\left(\frac{21}{2} n_g - 15\right) \ln \frac{N}{\mu}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)}=\frac{1}{\alpha_3(N)}+\frac{1}{6\pi}(12n_g-27)\ln\frac{N}{\mu}\,. \tag{10}$$

上式中的 M 相当于 GUT 能标，N 是一个新的更高的能标，k 是新引入的参数，用来保证两个区域的演化方程自洽．M_1 并不明显地出现，以后会发现，在引力被统一之后，M_1 由 $\alpha(N)$ 所决定．受 GUT 的启示，假定在(5)(6)(7)中，满足下述条件：

$$\frac{5}{3k}\alpha_1(M)=\alpha_2(M)=\alpha_3(M)=\alpha(M)\,; \tag{11}$$

而在(8)(9)(10)中满足下述条件：

$$\frac{5}{3k}\alpha_1(N)=\alpha_2(N)=\alpha_3(N)=\alpha(N)\,. \tag{12}$$

若规范耦合与引力统一，采用经典近似则有：

$$\alpha(N)=\left(\frac{N}{M_P}\right)^2. \tag{13}$$

(5)—(13)式构成一组完整的动力学方程，下面对这组方程求解．

将(5)、(6)、(7)式分别与(8)、(9)、(10)式在 M_1 处相衔接，得到：

$$\frac{1}{\alpha(M)}+\frac{k}{6\pi}\left(6n_g+\frac{3}{5}n_e\right)\ln\frac{M}{M_1}=\frac{1}{\alpha(N)}+\frac{k}{6\pi}\left(\frac{93}{10}n_g+\frac{9}{5}\right)\ln\frac{N}{M_1}\,, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\alpha(M)}+\frac{1}{6\pi}(6n_g-18+n_e)\ln\frac{M}{M_1}=\frac{1}{\alpha(N)}+\frac{1}{6\pi}\left(\frac{21}{2}n_g-15\right)\ln\frac{N}{M_1}\,, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\alpha(M)}+\frac{1}{6\pi}(6n_g-27)\ln\frac{M}{M_1}=\frac{1}{\alpha(N)}+\frac{1}{6\pi}(12n_g-27)\ln\frac{N}{M_1}\,. \tag{16}$$

从(14)—(16)式易得：

$$\left[(6n_g-18+n_e)-\left(6n_g+\frac{3}{5}n_e\right)k\right]\ln\frac{M}{M_1}=$$

$$\left[\left(\frac{21}{2}n_g-15\right)-\left(\frac{93}{10}n_g+\frac{9}{5}\right)k\right]\ln\frac{N}{M_1}\,, \tag{17}$$

$$\left(9+n_e\right)\ln\frac{M}{M_1}=\left(12-\frac{3}{2}n_g\right)\ln\frac{N}{M_1}\,. \tag{18}$$

由(18)式解得：

$$M_1=M\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{24-3n_g}{3n_g+2n_e-6}}. \tag{19}$$

从(17)和(18)式解得:

$$k=\frac{30n_g^2+40n_gn_e-15n_g-90n_e+270}{30n_g^2+34n_gn_e+39n_g-18n_e+54}\ . \tag{20}$$

从(4)—(6)式易得:

$$\frac{1}{\alpha_2(\mu)}-\frac{k}{\frac{5}{3}\alpha_1(\mu)}=\frac{1}{6\pi}\left[(1-k)n_g+\left(1-\frac{3}{5}k\right)n_e-18\right]\ln\frac{M}{\mu}\ , \tag{21}$$

$$\frac{1}{\alpha_3(\mu)}-\frac{1}{\alpha_2(\mu)}=-\frac{1}{6\pi}(9+n_e)\ln\frac{M}{\mu}\ . \tag{22}$$

从(20)—(22)式解得:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_W(\mu)=&(360n_g^2n_e+240n_gn_e^2+3240n_g^2-540n_e^2+\\&3240n_gn_e+11340n_g-3240n_e+14580)^{-1}\Big[90n_g^2n_e+\\&120n_gn_e^2+810n_g^2-270n_e^2+1035n_gn_e-405n_g-\\&1620n_e+7290+(120n_g^2n_e-50n_gn_e^2+1080n_g^2-180n_e^2+\\&660n_gn_e+9990n_g-1080n_e+4860)\frac{\alpha_e(\mu)}{\alpha_3(\mu)}\Big]\ .\end{aligned} \tag{23}$$

将(23)式代入(22)式得:

$$\ln\frac{M}{M_Z}=\frac{6\pi}{9+n_e}\left[\frac{\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)}-\frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right]\ . \tag{24}$$

由 M_Z、$\alpha_e(M_Z)$和$\alpha_3(M_Z)$的实验值可求得 M. 将(24)式代入(7)式得:

$$\frac{1}{\alpha(M)}=\frac{1}{9+n_e}\left[\frac{6n_g+n_e-18}{\alpha_3(M_Z)}-\frac{(6n_g-27)\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)}\right]\ . \tag{25}$$

最后,将(13)和(19)式代入(16)式得:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{M_P}{N}\right)^2-\frac{1}{2\pi}\frac{6n_g^2+8n_gn_e-3n_g-18n_e+54}{3n_g+2n_e-6}\ln\frac{M_P}{N}=\\&\frac{1}{\alpha(M)}-\frac{1}{2\pi}\frac{6n_g^2+8n_gn_e-3n_g-18n_e+54}{3n_g+2n_e-6}\ln\frac{M_P}{M}\ .\end{aligned} \tag{26}$$

这是决定 M_P/N的超越(transcendental)方程,可以数字求解. 现将方程(26)的左边和右边分别定义为函数$f(M_P/N)$和 $C(n_gn_e)$.

函数 $f(x)$ 在 $x_{\min}$ 处有极小值:

$$f(x)_{\min} = x_{\min}^2(1 - \ln x_{\min}^2), \tag{27}$$

其中

$$x_{\min} = \left(\frac{1}{4\pi}\,\frac{6n_g^2 + 8n_g n_e - 3n_g - 18n_e + 54}{3n_g + 2n_e - 6}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

取

$$M_Z = 91.16\text{GeV},\quad M_P = 1.22\times 10^{19}\text{GeV},$$

$$\alpha_e(M_Z) = \frac{1}{127.9\pm 1},\quad \alpha_s(M_Z) = 0.120\pm 0.010, \tag{29}$$

对给定的 n_g, n_e, 从方程(20)、(23)、(24)和(25)可分别求得 k、$\sin^2\theta_W(M_Z)$、M 和 $\alpha(M)$, 从而求得 $C(n_g n_e)$. 数字求解方程(26)得到 N, 再代入(19)式, 就可确定轻子性夸克的能标 M_1.

下面分别对 $n_g = 3$, $n_g = 4$ 求解.

$n_g = 3$ 时:

$$k = \frac{165 + 10n_e}{147 + 28n_e},$$

$$\sin^2\theta_W(M_Z) = (5184 + 684n_e + 12n_e^2)^{-1}\left[891 + 153n_e + 6n_e^2 + (2970 + 132n_e - 22n_e^2)\frac{\alpha_e(M_Z)}{\alpha_3(M_Z)}\right],$$

$$M = M_Z\exp\left\{\frac{6\pi}{9+n_e}\left[\frac{\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{\alpha(M)} = \frac{1}{9+n_e}\left[\frac{n_e}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{9\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)}\right],$$

$$\left(\frac{M_P}{N}\right)^2 - \frac{3}{2\pi}\,\frac{33+2n_e}{3+2n_e}\ln\frac{M_P}{N} = \frac{1}{\alpha(M)} - \frac{3}{2\pi}\,\frac{33+2n_e}{3+2n_e}\ln\frac{M_P}{M},$$

$$M_1 = M\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{15}{3+2n_e}},$$

$$f(x)_{\min} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{33+2n_e}{3+2n_e}\left(1 - \ln\frac{3}{4\pi}\,\frac{33+2n_e}{3+2n_e}\right). \tag{30}$$

$n_g = 4$ 时：

$$k = \frac{345 + 35n_e}{345 + 59n_e},$$

$$\sin^2\theta_W(M_Z) = (11178 + 1620n_e + 42n_e^2)^{-1}\Bigg[1863 + 396n_e +$$

$$21n_e^2 + (6210 + 384n_e - 38n_e^2)\frac{\alpha_e(M_Z)}{\alpha_3(M_Z)}\Bigg],$$

$$M = M_Z\exp\left\{\frac{6\pi}{9 + n_e}\left[\frac{\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)} - \frac{1}{\alpha_3(M_Z)}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{\alpha(M)} = \frac{1}{9 + n_e}\left[\frac{6 + n_e}{\alpha_3(M_Z)} + \frac{3\sin^2\theta_W(M_Z)}{\alpha_e(M_Z)}\right],$$

$$\left(\frac{M_P}{N}\right)^2 - \frac{1}{2\pi}\frac{69 + 7n_e}{3 + n_e}\ln\frac{M_P}{N} = \frac{1}{\alpha(M)} - \frac{1}{2\pi}\frac{69 + 7n_e}{3 + n_e}\ln\frac{M_P}{M},$$

$$f(x)_{\min} = \frac{1}{4\pi}\frac{69 + 7n_e}{3 + n_e}\left(1 - \ln\frac{1}{4\pi}\frac{69 + 7n_e}{3 + n_e}\right). \tag{31}$$

数字计算结果列于表 1.

表 1 显示出，当 $n_g = 3$ 时，对 n_e的所有取值方程(26)都有解，而当 $n_g = 4$ 时，只在 n_e为零或 1/2 时有解，随着 n_e的增大 C 则逆减并变为负值，而 $f(M/N)$总是正值，因此方程无解. 我们猜想，当 $n_g > 4$ 时也可能无解，因参数间存在的复杂关系而难以作普遍证明. 对于 $n_g = 3$ 时的情况，我们希望它们对应于真实的物理世界，相应的重夸克的质量标度为 10^{10}GeV 量级. 此时的 $\alpha(N)$仍在微扰论允许的范围内，但已到了规范作用的双圈修正和引力的辐射修正必须加以考虑的地步，遗憾的是至今我们还没有一个量子引力理论. 尽

表1　轻子性夸克质量标度等量的计算结果

	$n_g=3$						
n_e	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
k	1.12	1.06	1	0.952	0.911	0.876	0.844
$\sin^2\theta_W$	0.209	0.211	0.213	0.214	0.216	0.218	0.219
M/GeV	5.08×10^{18}	1.05×10^{18}	2.50×10^{17}	6.79×10^{16}	2.08×10^{16}	6.91×10^{15}	2.52×10^{15}
C	22.0	16.1	12.3	9.81	8.03	6.63	5.55
$f(x)_{\min}$	0.091	0.593	0.813	0.918	0.968	0.991	0.999
M_P/N	5.57	4.73	4.14	3.68	3.33	3.03	2.77
$\alpha(N)$	0.0322	0.0447	0.0583	0.0738	0.0901	0.109	0.130
M_l/GeV	3.41×10^{20}	3.68×10^{16}	1.52×10^{14}	4.08×10^{12}	3.20×10^{11}	4.51×10^{10}	9.88×10^{9}

续表

				$n_g=4$			
n_e	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
k	1	0.968	0.941	0.917	0.896	0.878	0.862
$\sin^2\theta_W$	0.203	0.207	0.211	0.214	0.219	0.222	0.225
M/GeV	9.05×10^{17}	3.72×10^{17}	1.58×10^{17}	6.95×10^{16}	3.22×10^{16}	1.56×10^{16}	7.80×10^{15}
C	4.92	2.55	0.776	−0.740	−2.22	−3.12	−4.15
$f(x)_{min}$	0.724	0.825	0.887	0.927	0.953	0.971	0.982
M_P/N	2.99	1.32					
$\alpha(N)$	0.112	0.574					
M_1/GeV	4.45×10^{16}	1.51×10^{15}					

管如此，作为一阶近似，$n_g=3$ 和 $M_1\sim10^{10}$GeV 的结论定性来说还是可信的．此外，阈效应也是一个困难的问题．最后，若采用矢量型规范理论，则本文的结果可解释为，存在一组左手征型的轻子和夸克以及与之相应的超对称相伴粒子，其能标在 M_Z附近或以下；同时存在一组右手征型重夸克及其相伴粒子，能标约为 M_1，以及一组右手征型重轻子及其相伴粒子，其能标在 N附近．

对与杜东生教授的有益讨论表示感谢．

参 考 文 献

1 Pati J, Salam A. Phys. Rev. Lett., 1973, **31**:275
Georgi H, Glashow S L. Phys. Rev. Lett., 1974, **32**:438

2 Dimopoulos S, Georgi H. Nucl. Phys., 1981, **B193**:150; Ellis J, Kelley S, Nanopoulos D V. Phys. Lett., 1991, **B260**:131; Amaldi U, Boer W de, Furstmann H. Phys. Lett., 1991, **B260**:447

3 Dienes K R. Phys. Rep., 1997, **287**:447

4 Liu Yaoyang, Jiang Xiangdong, Zhou Jiange. Nuovo Cimento, 1995, **A108**:167—174; 1457—1466; Liu Yaoyang, Jiang Xiangdong, Zhou Jiange. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1996, **20**(10):900—912
(刘耀阳、江向东、周剑歌．高能物理与核物理，1996，**20**(10)：900—912)

5 Liu Yaoyang, Sun Lazheng, Jiang Xiangdong. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1998, **22**(11):996—1003
(刘耀阳、孙腊珍、江向东．高能物理与核物理，1998，**22**(11)：996—1003)

Unification of Gauge Interactions and Gravitation *

Liu Yaoyang

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

(Institute of Theoretical Physics, Academy of Sciences of China, Beijing 100080)

Sun Lazhen

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Jiang Xiangdong

(Institute of High Energy Physics, Academy of Sciences of China, Beijing 100039)

Abstract Assuming the gauge interactions and gravitation to be unified in the chiral extension of the standard model, our calculations prove that the generation number of quarks and leptons surely is 3. It is also given that the energy scale of unification is 4.4×10^{18}GeV and the mass scale of leptonic quarks is 10^{10}GeV.

Key words chirality, gravitation unification, gauge interactions

---

Received 10 August 1998

* Project supported by National Natural Science Foundation of China and grant LWTZ-1298 of the Chinese Academy of Sciences