第23卷 第11期 1999 年11月
高能物理与核物理 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol.23, No.11 Nov., 1999

单核子在具有八极形变的平均势场中的混沌运动*

(I) 相干态在势场中传播的理论表示

刘 芳 李希国 李君清 罗亦孝

(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000)

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 单核子在具有八极以上形变的平均势场中发现有混沌运动. 通过研究系统非定态波函数的时间演化特征,而使研究量子混沌与研究经典混沌的思路更趋一致,特别是能体现量子状态对初始条件的敏感性。给出了当初态选为二维不对称谐振子动力学对称条件下的、满足坐标动量最小测不准关系的相干态时,八极形变耦合作用下量子状态正则变量的期望值及测不准度随时间演化的理论表示.

关键词 形变核 量子混沌 相干态

1 引言

原子核中所显示的混沌运动特征最早与复合核的性质相联系,因此与无规矩阵理论相联系[1,2]. 对经典混沌运动的研究已发现了许多种性质,发现简单系统可以有复杂的运动,人们已承认混沌的存在并认识到它的重要性和普遍性[3,4]. 按照玻尔的对应原理,将量子力学应用到宏观运动上,所得的结果应该与经典力学的结果一致,所以力学系统的混沌特征必然在其量子性质上有所表现. 但由于量子力学中测不准原理的存在,一般认为经典系统的描述与量子系统的描述有根本的不同,很难给出“量子混沌”的明确的定义. 迄今的研究多集中在研究对应于规则和混沌条件下的经典系统其量子系统的量子表现. 如能谱的统计性质、定态波函数等,在对应的经典系统作混沌运动时显示什么特征. 这些研究并不能阐明量子混沌研究中的一些根本性问题,如由量子力学描述的微观世界是否也象经典系统那样存在着两类不同性质的运动—规则运动和混沌运动. 最近,徐躬耦先生[5]用关于动力学对称性的代数方法推导出了与经典可积性条件对应的量子可积性条

1998-07-30收稿,1999-06-02收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目19575057、19775057、19847992、科学院重大项目和院长特别支持费资助

件，建立了经典动力学的完全量子对应．以此为基础，我们按照经典混沌的思路研究了量子混沌运动．研究系统非定态波函数的时间演化特征，将体现一定动力学对称条件下的动力学作用及状态对初始条件的敏感性．

由于测不准关系，系统的状态不能再用相空间中的一个点来表示，而必须用希尔伯特空间的一个态矢来表示．为了寻找确定的经典、量子对应，我们试图运用一种量子态，尽可能地接近经典表述．经典粒子可用量子力学态的波包来描述，而波包的扩散相应于一束相轨道的扩散．谐振子的相干态[6]是一种量子力学态，它在相空间满足最小测不准关系，并且在势场中沿经典轨道运行．选初态为不对称谐振子动力学对称条件下的相干态，研究在与附加空间反射对称性被破坏的八极形变势的耦合作用下，相干态的传播特征．限于篇幅，本文首先给出相干态传播过程中力学量的期望值及测不准度随时间演化的理论表示．

原子核中的混沌运动一般与形变、激发及其它对称性的破缺有关．我们已经在经典上研究了粒子在谐振子加八极形变势中的运动特征[7,8]，指出粒子在扁八极形变势中比在长八极形变势中更容易发生混沌运动的原因：在前者情况下，势能面更容易产生负曲率．在形变势场中，初始态为相干态的不同量子力学态随时间的演化将显示规则或混沌状态下的量子特征。特别是对部分混沌系统，找出量子不规则运动的特征，并阐明它与经典混沌运动之间的联系将是很有意义的．

2　哈密顿系统

原子核的独立粒子模型，可看成是任何一个核子都在其它核子所形成的平均场中独立运动，由于球形的平均场保持了很好的对称性，所以运动是规则的．混沌运动一般是由剩余相互作用引起的．剩余相互作用可以是长程相互作用，它造成形变，或是激发等，它们破坏了核平均场的某些对称性．这里我们考虑形变怎样引起原子核的混沌运动．粒子在谐振子加八极以上形变势场中可产生混沌运动[8,9]．系统的哈密顿量可写为

$$H' = -\nabla^2 + \rho^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda\frac{2z^3 - 3z\rho^2}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\,, \tag{1}$$

式中$\rho^2 = x^2 + y^2$，势场为轴对称的，相应的角动量为守恒量．经典系统在角动量等于零的情形下，可等效为二维系统．b 为常数，在$\lambda = 0$ 的情况下，$b > 1$ 时势场为长椭球谐振子势场；$b < 1$ 时势场为扁椭球谐振子势场．λ 为八极形变势强度，它有一个极限值 λ_c，当$\lambda > \lambda_c$时，势场会开放并伸展到无穷远，这里只考虑了$\lambda < \lambda_c$的情况．在仅考虑了 $b = 0.5$ 的情况下，通过改变形变强度λ，(1)式所示的哈密顿系统可由完全规则到部分混沌直至完全混沌，因此在数值计算时，仅考虑 $b = 0.5$ 的情况，此时取$\lambda_c \approx 1.64$．

二维情况下的哈密顿量为

$$H = -\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z^2} + x^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda\frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{x^2+z^2}} = H_0 + \lambda\frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\ . \tag{2}$$

定态薛定谔方程可写为

$$H\Psi_N(x,z) = E_N \Psi_N(x,z), \tag{3}$$

$\Psi_N(x,z)$可用二维谐振子系统 H_0的本征波函数$\Phi_n(x,z)$展开

$$\Psi_N(x,z) = \sum_n \Phi_n(x,z) C_{nN}. \tag{4}$$

久期方程可写为

$$\sum_n (\lambda a_{mn} + \delta_{mn}\varepsilon_n) C_{nN} = E_N \cdot C_{mN}, \tag{5}$$

其中 $a_{mn} = \iint \Phi_m^*(x,z) \cdot Q \cdot \Phi_n(x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, ε_n 是 $\Phi_n(x,z)$对应的本征能量.

写成矩阵的形式

$$A \cdot C_N = E_N \cdot C_N, \tag{6}$$

其中 A 是 $N\times N$ 维矩阵, $A_{mn} = \lambda a_{mn} + \delta_{mn}\varepsilon_n$, C_N是 E_N对应的特征向量,是一个 N 维列向量. E_N 是矩阵 A 的特征值(这样的特征值共有 N 个)。用一般的空间截断法来解(6)式,而用变化久期方程维度的方法来选取不受维度影响的能级和波函数,所选能级使相对精度可达到 0.13%. 我们在此维度范围内检验了不同初始条件下的相干态在所选谐振子势中的传播特征,一直到 $t = 2000$,得到不变的坐标和动量空间上的波包宽度,说明所选空间是足够精确的,所选空间大小也是够用的.

3 形变谐振子势中初始态为相干态的状态随时间的演化

3.1 二维不对称谐振子相干态

对于二维非对称谐振子系统,哈密顿量为

$$H_0 = -\nabla^2 + x^2 + \frac{z^2}{b^2}. \tag{7}$$

根据 n 维玻色子系统相干态的定义[10],该二维哈密顿系统的相干态具有以下形式

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_x|^2 + |\alpha_z|^2)\right] \cdot \exp(a_x^+ a_x + a_z^+ a_z)|0\rangle, \tag{8}$$

其中
$$a_z^+ = \sqrt{\frac{b}{2}}\left(\frac{z}{b} - \mathrm{i}P_z\right), \qquad a_z = \sqrt{\frac{b}{2}}\left(\frac{z}{b} + \mathrm{i}P_z\right),$$

$$a_x^+ = \sqrt{\frac{1}{2}}(x - \mathrm{i}P_x), \qquad a_x = \sqrt{\frac{1}{2}}(x + \mathrm{i}P_x),$$

$|0\rangle$是真空态. 由于在粒子数表象下本征态可表示为

$$|n_{1x}n_{2z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{1x}!\,n_{2z}!}}(a_x^+)^{n_{1x}}(a_z^+)^{n_{2z}}|0\rangle, \tag{9}$$

所以

$$|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha_x|^2+|\alpha_z|^2)\right]\cdot\sum_{n_{1x}=0}^{\infty}\sum_{n_{2z}=0}^{\infty}\frac{(\alpha_x)^{n_{1x}}(\alpha_z)^{n_{2z}}}{\sqrt{n_{1x}!\cdot n_{2z}!}}|n_{1x}n_{2z}\rangle. \tag{10}$$

3.2　初始态为相干态的量子态随时间的演化性质

设 $t=0$ 时,系统处于(10)式所示的相干态,则 t 时刻系统的状态为

$$|\alpha(t)\rangle = \exp(-\mathrm{i}Ht)|\alpha\rangle = \sum_m|\Psi_m(x,z)\rangle\exp(-\mathrm{i}E_mt)\langle\Psi_m(x,z)|\alpha\rangle, \tag{11}$$

$|\Psi_m(x,z)\rangle$是带形变的二维谐振子系统的本征波函数.

当粒子处于$|\alpha(t)\rangle$所描述的状态时,正则变量的期望值及测不准度为

$$\langle z\rangle = \langle\alpha(t)|z|\alpha(t)\rangle = \sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}\delta_{s_1,q_1}\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)\cdot$$

$$[s_2+q_2-2(s_2+q_2)]!!,\ ((s_2+q_2)\text{取奇数}), \tag{12}$$

$$\langle\Delta z\rangle^2 = \frac{b}{2}\cdot\left\{\sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}\delta_{s_1q_1}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)\cdot[s_2+q_2-2(s_2+\right.$$

$$q_2)+1]!!-\left(\sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}\delta_{s_1q_1}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)\cdot[s_2+q_2-2(s_2+\right.$$

$$\left.\left.q_2)]!!\right)^2\right\},\ ((s_2+q_2)\text{在大括号中第一项取偶数,在第二项中取奇数}); \tag{13}$$

$$\langle x\rangle = \langle\alpha(t)|x|\alpha(t)\rangle = \sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_1'=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1'=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}\delta_{s_2,q_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_1,q_1,s_1',q_1')\cdot$$

$$[s_1+q_1-2(s_1'+q_1')]!!,\ ((s_1+q_1)\text{取奇数}), \tag{14}$$

$$\langle\Delta x\rangle^2 = \frac{1}{2}\cdot\left\{\sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}\delta_{s_2q_2}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_1,q_1,s_1,q_1)\cdot[s_1+q_1-2(s_1+\right.$$

$$q_1)+1]!!-\left(\sum_{m,n,s,q=0}\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}\delta_{s_2q_2}\cdot R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\cdot R_e(s_1,q_1,s_1,q_1)\cdot[s_1+q_1-2(s_1+\right.$$

$$\left.\left. q_1)]!!\right)^2\right\}, \quad ((s_1+q_1)\text{在大括号中第一项取偶数,在第二项中取奇数}); \tag{15}$$

$$\langle P_z\rangle = \langle\alpha(t)|P_z|\alpha(t)\rangle = \sum_{m,n,s,q=0}(-\mathrm{i})\cdot\delta_{s_1q_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot R_\alpha(a,m,n,s,q)\,.$$

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)\cdot[s_2+q_2-2(s_2+q_2)]!!+\sqrt{2q_2}\,\delta_{s_2,q_2-1}\right\},$$

$$((s_2+q_2)\text{取奇数}), \tag{16}$$

$$\langle\Delta P_z\rangle^2 = \frac{1}{2b}\left\{\sum_{m,n,s,q=0}\delta_{s_1,q_1}R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\left(\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)[s_2+q_2-2(s_2+q_2)+\right.\right.$$

$$\left.1]!!+(2q_2+1)\delta_{s_2q_2}\right)-\left(\sum_{m,n,s,q=0}\delta_{s_1q_1}\cdot R_\alpha(a,m,n,s,q)\cdot\sum_{s_2=0}^{\left[\frac{s_2}{2}\right]}\sum_{q_2=0}^{\left[\frac{q_2}{2}\right]}R_e(s_2,q_2,s_2,q_2)\cdot[s_2+\right.$$

$$\left.\left.q_2-2(s_2+q_2)]!!+\sqrt{2q_2}\,\delta_{s_2,q_2-1}\right)^2\right\}, \quad ((s_2+q_2)\text{在大括号中第一项取偶数,在第二项中取奇数}); \tag{17}$$

$$\langle P_x\rangle = \langle\alpha(t)|P_x|\alpha(t)\rangle = \sum_{m,n,s,q=0}(-\mathrm{i})\cdot\delta_{s_2q_2}\cdot R_\alpha(a,m,n,s,q)\,.$$

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}R_e(s_1,q_1,s_1,q_1)\cdot[s_1+q_1-2(s_1+q_1)]!!+\sqrt{2q_1}\,\delta_{s_1,q_1-1}\right\},$$

$$((s_1+q_1)\text{取奇数}), \tag{18}$$

$$\langle\Delta P_x\rangle^2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{m,n,s,q=0}\delta_{s_2,q_2}R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)\left(\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}R_e(s_1,q_1,s_1,q_1)[s_1+q_1-2(s_1+q_1)+\right.\right.$$

$$\left.1]!!+(2q_1+1)\delta_{s_1q_1}\right)-\left(\sum_{m,n,s,q=0}\delta_{s_2q_2}\cdot R_\alpha(a,m,n,s,q)\cdot\sum_{s_1=0}^{\left[\frac{s_1}{2}\right]}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{q_1}{2}\right]}R_e(s_1,q_1,s_1,q_1)\cdot[s_1+\right.$$

$$\left.\left.q_1-2(s_1+q_1)]!!+\sqrt{2q_1}\,\delta_{s_1,q_1-1}\right)^2\right\}, \quad ((s_1+q_1)\text{在大括号中第一项取偶数,在第二项中取}$$

奇数)．　(19)

其中，$R_\alpha(\alpha,m,n,s,q)=\sum_{l,k=0} C_{\ln}C_{km}C_{sn}C_{qm}\exp[\mathrm{i}t(E_n-E_m)]$．

$$\exp[-(|\alpha_x|^2+|\alpha_z|^2)]\frac{(\alpha_x^*)^{l_1}}{\sqrt{l_1!}}\frac{(\alpha_z^*)^{l_2}}{\sqrt{l_2!}}\frac{(\alpha_x)^{k_1}}{\sqrt{k_1!}}\frac{(\alpha_z)^{k_2}}{\sqrt{k_2!}},\tag{20}$$

$$R_e(s_2,q_2,s'_2,q'_2)=2^{-(s'_2+q'_2)}\cdot\frac{(-1)^{s'_2}\cdot(s_2!)^{\frac{1}{2}}}{s'_2!\cdot(s_2-2s'_2)!}\cdot\frac{(-1)^{q'_2}\cdot(q_2!)^{\frac{1}{2}}}{q'_2!\cdot(q_2-2q'_2)!},\tag{21}$$

式中 l_1、l_2是波函数$\Phi_l(x,z)$对应的 x,z 方向上的量子数，k_1、k_2、s_1、s_2、q_1、q_2类推．

以上各表达式中$\alpha_x=x_0+\mathrm{i}P_{x_0}$、$\alpha_z=z_0+\mathrm{i}P_{z_0}$，实部、虚部分别由初始时刻波包中心处于相空间中的位置确定．一般期望值携带系统的动力学信息，是由系统的动力学方程确定的．由期望值的诸方程可见，诸期望值的每一项都随时间作振荡，这是由于相干态各成份间的干涉而产生的．式中诸 $C_{\mu\nu}$ 是谐振子态Φ_μ在哈密顿系统 H(见式(2))的波函数Ψ_ν中所占权重，它与其它量子数包括初始值一起影响振荡振幅．总期望值是具有不同振幅和频率的各振荡项的叠加．对规则运动，它的演化与经典轨道值一致且分布在相空间确定的范围内．在二维谐振子势对称性基本保持的情况下，相干态各成份间的协同性基本保持，各力学量的测不准度也基本保持．如果这种动力学对称性受到破坏，相干态的各成份间产生非线形共振，则将破坏相干态各成份间的协同性，干扰强时，力学量测不准度很快增加，相干态波包很快扩散，这对应于一束经典轨道随时间的扩散特征．

4　讨论

给出了在带形变的二维谐振子势中，初始态为相干态的状态随时间的演化公式．推算出位置、动量的期望值以及诸期望值的测不准度随时间演化的公式．在这些公式中，谐振子波函数Φ_n在系统波函数Ψ_N中所占的权重 C_{nN}是数值结果．由于相干态的特殊性质，我们将得到量子系统运动的具有经典对应行为的知识，它将与势场的几何对称性相联系．将看到随着形变参数的增加，系统怎样由规则变成部分混沌、直至充分混沌，以及部分混沌尚存在哪些规则结构，并自然地给出量子与经典的对应．具体的数值计算结果我们将另文给出．

作者在此感谢与徐躬耦先生的指导性的讨论．

参　考　文　献

1　Verbaarschot J J M, Weidenmuller H A, Zirnbauer M R. Phys. Rev. Lett., 1984, **52**:1597; Phys. Rep., 1985, **129**:367

2　Bohigas O. In The Compound Nucleus: A Classically Chaotic Quantum System. In: Durell J L et al. Procee. Inter. Nucl. Phys. Confe. U. K.: Harrogate 1986, 511

3　Gutzwiller M C. Chaotic in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990

4 Lichtenberg J, Lieberman M A. Regular and Stochastic Motion. New York: Springer, 1983
5 Xu Gong-ou, Yang Ya-tian. Chin. Phys. Lett., 1999, **16**:6
6 Glauber Roy J. Phys. Rev., 1963, **130**:2529; 1963, **131**:2766
7 Li Junqing. J. Phys., 1998, **G24**:1021.
8 Heiss W D, Nazmitdinov R G, Radu S. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**:2351
9 Li Junqing. Phys. Rev. Lett., 1997, **79**:2387
10 Blaizot, Jean-Paul. Quantum theory of finite systems, Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology, 1986

Chaotic Motion of a Nucleon in Mean Field Potential With Octupole Deformation*

(I) The Formalism of the Propagation of Coherent States in Potential

Liu Fang Li Xiguo Li Junqing Luo Yixiao

(*Research Center of Nuclear Theory of National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou* 730000)

(*Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou* 730000)

Abstract The temporal variation characteristics of nonstationary wave functions are investigated, which enables us to carry out the study of quantum chaotic dynamics with the same starting point as in corresponding classical case, especially to realize the sensitivity of the quantum state with respect to the initial condition. Here the coherent states under the dynamical symmetry of asymmetrical two dimensional harmonic oscillator, in which the minimum uncertainty principle is satisfied, are used as an initial state. The formalism of the temporal variation of the expectation values and the uncertainty measurements of canonical variables of the quantum state under the broken symmetry by the additional octupole deformed potential is fulfilled.

Key words deformed nucleus, quantum chaos, coherent state

Received 30 July 1998, Reveised 2 June 1999

* Project 19575057, 19775057, 19847992 supported by National Natural Science Foundation of China, Project suppored by Chinese Academy of Science and Director of Chinese Academy of Science