第23卷 第2期 高能物理与核物理 Vol.23, No.2
1999年2月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1999

分段均匀弦的 Casimir 能量*

陆继宗 黄保法
(上海师范大学物理系，上海 200234) (上海冶金高等专科学校，上海 200233)

摘要 Casimir 能量可看成是由于边界的出现、时空的弯曲以及某些背景场的存在而引起的量子场真空能量极化．由于对 Casimir 能量的研究能加深对量子场本质的了解，近来对它的研究兴趣正在增加．Brevik 等人首先讨论了分段均匀弦的 Casimir 能量．但他们只讨论了闭玻色弦的 Casimir 能量．本文推广到开和闭的玻色弦，以及费米子弦情形．并且对超弦的 Casimir 能量也作了探讨．

关键词 Casimir 能量 玻色子弦 零点能

Casimir 首先计算了两无穷大导电平板之间的真空电磁能量[1]．发现此能量是负的，因而两平板之间的力是吸引的，大小为 $F=-\pi^2/240a^4$．后来人们称此种能量为 Casimir 能量．1997 年，实验以很高的精度证明了这一效应[2]．因此 Casimir 能量再次引起了人们的兴趣．

一般说来，Casimir 是由于边界的出现、时空的弯曲以及某些背景场的存在而引起的量子场真空能量极化[3]．在 Casimir 之后，Boyer 讨论了一个大球面上的 Casimir 能量，他指出此时球面上的应力是排斥力[4]．Bayin 和 Ozcan 计算了带有球面边界的弯曲空间的 Casimir 能量[5]．Ford 讨论了背景场引起的 Casimir 能量[6]．Casimir 能量与空间维数的关系最近也有人讨论[7,8]．扩展体 Casimir 能量的讨论开始于 80 年代．文献[9，10]讨论了膜的 Casimir 能量．Brevik 和 Nielsen 计算了分段均匀玻色子闭弦的 Casimir 能量[11]．他们用的正规化方法是指数切割法，后来有人用了广义 Riemann ξ 函数正规法[12]．有限温度分段均匀玻色子闭弦的 Casimir 能量也由 Brevik，Nielsen 等人给出[13,14]．我们已把他们的讨论推广到玻色子开弦、费米子弦和超弦等情况[15]．Bayin 等人讨论了具有扭曲连接条件的分段均匀玻色子闭弦的 Casimir 能量[16]．本文将讨论具有扭曲和非扭曲两类连接条件的分段均匀玻色子弦的 Casimir 能量，随后对费米子弦和超弦作简单讨论．

为简单起见，考虑由两段组成的弦．设两段弦的长度为 L_{I} 和 L_{II}，张力为 T_{I} 和 T_{II}．声速已被调整为光速 c，且采用自然单位制 $(c=1)$．由波动方程和连接条件，可得非扭曲分段均匀玻色子开弦的色散方程

1998-05-14收稿
* 上海市高等学校科学技术发展资金资助(97DJ03)

$$x\sin(L_{\mathrm{I}}\omega)\cos(yL_{\mathrm{I}}\omega)+\cos(L_{\mathrm{I}}\omega)\sin(yL_{\mathrm{I}}\omega)=0,\tag{1}$$

式中 $x=T_{\mathrm{I}}/T_{\mathrm{II}}$,$y=L_{\mathrm{I}}/L_{\mathrm{II}}$. 原则上由此色散方程可求出频谱,但实际很难求出一般的解析解. 只能在某些特殊情况得到其解析解. 下面将就几个特殊情况来进行讨论.

1. $x=1$　这对应于均匀弦. 在此情况由(1)可得 $\omega_n=n\pi/L_{\mathrm{I}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,零点能为

$$E=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\omega_{\mathrm{n}}=\frac{\pi}{L}\zeta(-1,1)=-\frac{\pi}{12L}.\tag{2}$$

与闭弦不同,由于开弦有边界,所以均匀弦仍有 Casimir 能量.

2. $x\to0$　这意味 T_{I} 和 T_{II} 中有一个为零,另一个有限. 此时有两个频谱 $\omega_n=n\pi/L_{\mathrm{II}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 和 $\omega_n=(2n+1)\pi/2L_{\mathrm{I}}$ $(n=0.1,2,\cdots)$. 相应的 Casimir 能量为

$$E=-\frac{\pi}{2L_{\mathrm{II}}}\zeta(-1,1)+\frac{\pi}{2L_{\mathrm{I}}}\zeta\left(-1,\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{48L}\left(\frac{2}{y}-y+1\right).\tag{3}$$

3. $y=2J+1(J=1,2,3,)$　此时有一个简并的频谱 $\omega_n=n\pi/2L_{\mathrm{I}}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $\omega_{\mathrm{n}}=\{(p_j+n)\pi/L_{\mathrm{I}},(1-p_j+n)\pi/L_{\mathrm{I}}\}$,式中 $n=0,1,2,\cdots;p_{\mathrm{j}}$ 为 $(0,1/2)$ 中的一个数, $j=1,2,3,\cdots,J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E=-\frac{\pi J(4J+3)}{12L}-\frac{\pi}{12L}-\frac{\pi(J+1)}{2L}\sum_{j=1}^{J}[p_j^2+(1-p_j)^2].\tag{4}$$

4. $y=2J(J=1,2,3,\cdots)$　此时有一个简并的频谱 $\omega_n=n\pi/L_{\mathrm{I}}$ $(n=1,2,3\cdots)$ 和 J 个非简并的双支频谱 $\omega_n=\{(p_j+n)\pi/L_{\mathrm{I}},(1-p_j+n)\pi/L_{\mathrm{I}}\}$,式中 $n=0,1,2,\cdots;p_j$ 为 $(0,1/2)$ 中的一个数, $j=1,2,3,\cdots,J$. 相应的 Casimir 能量为

$$E=\frac{\pi J(4J+1)}{6L}-\frac{\pi}{12L}-\frac{\pi(2J+1)}{4L}\sum_{j=1}^{2J}[p_j^2+(1-p_j)^2].\tag{5}$$

扭曲分段均匀玻色子开弦的色散方程为

$$x\sin(L_{\mathrm{I}}\omega)\cos(yL_{\mathrm{I}}\omega)-\cos(L_{\mathrm{I}}\omega)\sin(yL_{\mathrm{I}}\omega)=0.\tag{6}$$

与上述各情况相应的 Casimir 能量分别为

1. $x=1$

$$E=-\frac{\pi}{12(L_{\mathrm{II}}-L_{\mathrm{I}})}.\tag{7}$$

当 $y=1$ 时,不确定.

2. $x\to0$　此情况与非扭曲情况相同:

$$E = -\frac{\pi}{48L}\left(\frac{2}{y} - y + 1\right). \tag{8}$$

3. $y = 2J + 1\,(J = 1, 2, 3,)$

$$E = -\frac{\pi J(4J+3)}{12L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(J+1)}{2L}\sum_{j=1}^{J}\left[p_j^2 + (1-p_j)^2\right]. \tag{9}$$

4. $y = 2J\,(J = 1, 2, 3, \cdots)$

$$E = \frac{\pi J(4J+1)}{6L} - \frac{\pi}{12L} - \frac{\pi(2J+1)}{4L}\sum_{j=1}^{2J}\left[p_j^2 + (1-p_j)^2\right]. \tag{10}$$

此(9)式和(10)式表面上分别与(4)式和(5)式相同,但实际不同. 这是因为色散方程(6)式与(1)式不同,所以在这两种情况下所得的 p_j 也不同.

用同样的方法可以讨论三段组成的弦.

我们已经讨论了费米子弦和超弦的 Casimir 能量[15],指出超弦的 Casimir 能量是玻色子弦的负值. 在开弦情况,Casimir 能量可正可负,这与 Brevik 等人讨论的闭弦不同. 在他们的讨论中 Casimir 能量总是正的,也就是说总是排斥力. 多圈弦的 Casimir 能量正在考虑中.

参 考 文 献

1 Casimir H B G. Proc. K. Ned. Akad. Wet., 1948, **51**:793
2 Lamoreaux S.K. Phy. Rev. Lett., 1997, **78**:5
3 Plunien G, Möller B, Greiner W. Phys. Rep., 1986, **134**:87
4 Boyer T H. Phys. Rev., 1968, **174**:1764
5 Bayin S S, Özcan M. Phys. Rev., 1993 **D48**:3206; 1994, **D49**:5313; Romeo A. Phys. Rev., 1996, **D53**:3392
6 Ford L H. Phys. Rev., 1975, **D11**:3370
7 Bender C M, Milton K A. Phys. Rev., 1994, **D50**:6547; Milton K A. Phys. Rev., 1997, **D55**:4940
8 Li X, Cheng H, Li J et al. Phys. Rev., 1997, **D56**:2155
9 Kikkawa K, Yamasaki M. Prog. Theor. Phys. 1986, **76**:1379
10 Shi X, Li X. Class. Quantum Grav., 1991, **8**:75
11 Brevik I, Nielsen H B. Phys. Rev., 1990, **D41**:1185; 1995, **D51**:1869
12 Li X, Shi X, Zhang J. Phys. Rev., 1991, **D44**:560
13 Brevik I, Elizalde E. Phys. Rev., 1994, **D49**:5319
14 Brevik I. Nielsen H B, Odintsov S D. Phys. Rev., 1996, **D53**:3224
15 Lu J, Huang B. Phys. Rev., 1998, **D57**:5280
16 Bayin S Ş, Krisch J P, Özcan M. J. Math. Phys., 1996, **37**:3662

Casimir Energy for Piecewise Uniform Strings*

Lu Jizong
(*Department of Physics, Shanghai Teachers University, Shanghai* 200234)
Huang Baofa
(*Shanghai Technical College of Metallurgy, Shanghai* 200233)

Abstract The Casimir energy can be considered as the polarization of the vacuum energy of quantized fields due to the distortion caused by the presence of boundaries, the curvature of the space-time mani-fold or some background fields. The study about the Casimir energy can deepen our understanding of the substance of the quantum fields, so the interest in studying Casimir effect has been enhanced recently. Brevik et al. studied the Casimir energy of piecewise uniform strings first. However, they only discussed the one of closed bosonic strings. In this paper, we extend their resaerch to both open and closed bosonic strings, as well as fermionic strings. The energy of superstrings is investigated briefly too.

Key words Casimir energy, bosonic string, zero-point energy

Received 14 May 1998

* Supported by Shanghai Municipal Education Committee (97DJ03)