

# 高能碰撞实验数据 非整数分割时的阶乘矩分析\*

陈刚

(荆州师范学院物理系 湖北 434104)

高燕敏 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430070)

**摘要** 在对相空间用非整数分割作阶乘矩分析时,由二粒子或多粒子关联所引起的非均匀因素的影响必须加以认真考虑.本文对高能碰撞末态粒子的阶乘矩在相空间进行非整数分割时的分析方法进行了仔细研究,建立了一套完整的非整数分割下阶乘矩的分布进行修正的方法.用NA22实验组的实验数据计算,证明其方法是正确的.

**关键词** 高能碰撞 非整数分割 相空间 阶乘矩 修正方法

## 1 引言

1988年Bialas和Peschanski<sup>[1]</sup>首先提出用阶乘矩FM消除统计起伏,研究高能碰撞末态粒子的间歇(分形)现象,并且指出FM存在标度不变性.其后,它被广泛地用来研究高能碰撞末态粒子的实验数据<sup>[2]</sup>.阶乘矩定义为:

$$F_q(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle n_m(n_m-1)\cdots(n_m-q+1) \rangle}{\langle n_m \rangle^q}, \quad (1)$$

其中 $M$ 为相空间的一个区域 $\Delta$ 的分割数, $\delta = \Delta/M$ 为每个相格(或元胞)的大小, $n_m$ 是第 $m$ 个相格中的多重数.

经过进一步的研究发现<sup>[3]</sup>:高能强子-强子碰撞末态粒子的相空间呈现高度的各向异性.因此,在高维情况下表现为自仿射分形<sup>[4]</sup>.如果三维相空间的变量用 $p_a, p_b, p_c$ 来表示,与之对应的收缩率用 $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ 表示,这样动力学起伏的各向异性就可以用特征量Hurst指

1998-05-26收稿

\* 国家自然科学基金和湖北省自然科学基金资助

数表示为<sup>[5]</sup>

$$H_{ij} = \ln \lambda_i / \ln \lambda_j; (i, j = a, b \text{ or } a, c \text{ or } b, c) \quad (2)$$

且:  $\lambda_i \leq \lambda_j; 0 \leq H_{ij} \leq 1$

Hurst 指数可以通过对三个变量的一维二阶饱和曲线的拟合求得<sup>[6]</sup>.

$$F_2^{(0)}(M) = \alpha_i - \beta_i M_i^{-\gamma_i}, (i = a, b, c) \quad (3)$$

其中  $M_i = \Delta p_i / \delta p_i$  表示相空间在  $i$  方向相格的总数目,  $\Delta p_i$  为所研究的相空间区域在  $i$  方向的宽度,  $\delta p_i$  为每个相格的宽度.  $\alpha_i, \beta_i$  和  $\gamma_i$  为拟合参数. 由此 Hurst 指数可表示为:

$$H_{ij} = \frac{1 + \gamma_j}{1 + \gamma_i}, (i, j = a, b \text{ or } b, c \text{ or } a, c) \quad (4)$$

如果多重产生末态粒子的确存在自仿射的动力学起伏, 那么只有按 Hurst 指数对末态粒子的相空间进行分割时, 标度不变性, 即  $\ln F \sim \ln M$  分布的直线性才能被精确地观察到.

必须指出的是, 在对实验数据进行分析时, 若  $H \neq 1$ , 则相空间的分割数  $M$  一般并不等于整数, 例如对 NA22 实验组的 250 GeV/c  $\pi(K)$ -p 碰撞的实验数据<sup>[6]</sup>,  $H_{yp_i} = 0.48 \pm 0.06$ ;  $H_{y\varphi} = 0.47 \pm 0.06$ ;  $H_{p,\varphi} = 0.99 \pm 0.01$ . 在文献 [6] 中近似地取  $H_{yp_i} = H_{y\varphi} = 0.50$ ,  $H_{p,\varphi} = 1$ , 则三维分析中分割数分别取为:

$$M_y = 1, 2, 3, \dots, 7,$$

$$M_{p_i} = M_{\varphi} = 1, 4, 9, \dots, 49.$$

虽然, 文献中用上述分割方法对多重产生末态粒子的相空间的高维自仿射分形的性质进行了验证, 但由于受到  $M_i$  取整数值的限制, 仅用 7 个点, 难以精确检验  $\ln F \sim \ln M$  分布的直线性. 更重要的是, 由于近似地取  $H_{yp_i} = H_{y\varphi} = 0.50$ , 其结果的可靠性也受到影响. 因此, 为了对多重产生末态粒子的三维自仿射分形性质进行精确可靠地检验, 分割数  $M$  必须能取非整数.

一般说来, 二粒子和多粒子关联在相空间中有可能是非均匀的, 当分割数  $M$  取非整数时, 非均匀因素要影响到阶乘矩的分布. 本文将对  $M$  取非整数时的这种非均匀因素进行仔细分析和计算, 然后引入修正系数, 找出一套消除这种非均匀因素对阶乘矩分布的影响的方法.

## 2 非整数分割下阶乘矩的分析

为了讨论方便, 先考虑快度在相空间中的一维二阶阶乘矩:

$$F_2(\delta y) = F_2(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle n_m(n_m - 1) \rangle}{\langle n_m \rangle^2}, \quad (5)$$

其中  $M = \Delta y / \delta y$  为整数.

定义  $M$  取实数值时的阶乘矩为<sup>[7]</sup>:

$$F_2(N, M) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{\langle n_m(n_m - 1) \rangle}{\langle n_m \rangle^2}, \quad (6)$$

$$N = M - a, \quad (0 \leq a < 1) . \quad (7)$$

众所周知, 快度分布在中心区域有起伏, 影响了阶乘矩分布的标度行为. 后来通过引入累积变量<sup>[8]</sup>:

$$x(y) = \frac{\int_{y_0}^y \rho(y) dy}{\int_{y_0}^y \rho(y) dy} \quad (8)$$

即进行累积变换, 使快度空间的分布变平. 以往的理论认为, 作累积变换后, 相空间的平均粒子数分布  $\langle n_m \rangle$  和动力学起伏都是均匀的, 因此丢掉一个或几个窗口, 计算出的阶乘矩不变. 因此,  $F_2(M) = F_2(N, M)$ , 事实上这并不一定正确.

如果用  $\Delta$  表示所研究的相空间区域, 用  $\delta_m$  表示其中的第  $m$  个元胞, 则有:

$$\rho_1(y_1) = \frac{\langle n \rangle}{\langle n(n-1) \rangle} \int_{\Delta} \rho_2(y_1, y_2) dy_2, \quad (9a)$$

$$\langle n_m \rangle = \int_{\delta_m} \rho_1(y_1) dy_1 = \frac{\langle n \rangle}{\langle n(n-1) \rangle} \int_{\Delta} dy_2 \int_{\delta_m} dy_1 \rho_2(y_1, y_2) \quad (9b)$$

$$\langle n_m(n_m - 1) \rangle = \int_{\delta_m} dy_2 \int_{\delta_m} dy_1 \rho_2(y_1, y_2), \quad (9c)$$

其中  $\rho_1(y_1)$  为单粒子分布函数,  $\rho_2(y_1, y_2)$  为二粒子分布函数. 很显然, 在作累积变换后,  $\langle n_m \rangle$  变为常数, 但比较 (9b) 和 (9c) 两式可以清楚地看到, 即使  $\langle n_m \rangle$  等于常数, 但  $\langle n_m(n_m - 1) \rangle$  一般并不等于常数值. 因此, 在对末态粒子的相空间进行分割之前, 首先要对  $f_2(m) = \langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2$  的分布进行研究.

用 NA22 实验组 250 GeV/c  $\pi^+p$  和  $K^+p$  碰撞数据, 取  $M = 8, 16, 32, 64$  计算快度空间的阶乘矩, 其分布如图 1 所示. 图 1 表明: 虽然作累积变换后  $\langle n_m \rangle$  的分布变平, 但二阶阶乘矩的分布  $f_2(m) = \langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2$  仍然不平.

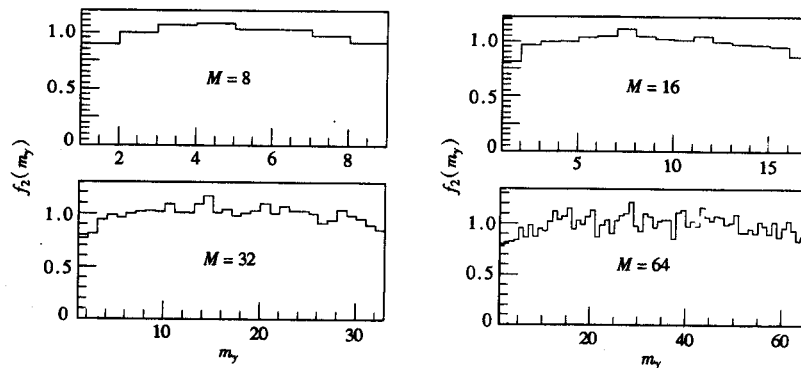


图1 快度的一维二阶阶乘矩按相格分布的直方图

值得注意的是: 在定义式 (5) 和 (6) 中都取了横向平均. 当分割数  $M$  取整数值时, 方程 (5) 中  $M$  的取值范围覆盖整个相空间区域, 因而  $\langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2$  的非均匀效应被平均

掉; 再当分割数  $M$  取非整数值时, 方程 (6) 中取平均值的范围  $N$  仅为部分相空间区域 ( $N < M$ ), 因而  $\langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2$  的非均匀性所产生的影响将被显现出来.

取  $M$  为非整数值, 对三个一维 ( $y, p_t, \varphi$ ) 变量计算其二阶阶乘矩  $\ln F_2 \sim \ln M$  分布, 如图 2 所示. 其中实心点为  $M$  取整数时的值, 空心点为  $M$  取非整数时的值. 显然, 当  $M$  取非整数值时的点出现了明显的“振荡现象”, 其中对于  $y, p_t, M$  为非整数点时阶乘矩的分布值都在整数点的上方; 而对于  $\varphi, M$  为非整数点时阶乘矩的值则在整数点附近上下振荡.

以下将引入修正系数来消除这种非均匀因素的影响, 从而消除阶乘矩  $\ln F \sim \ln M$  分布中的“振荡现象”.

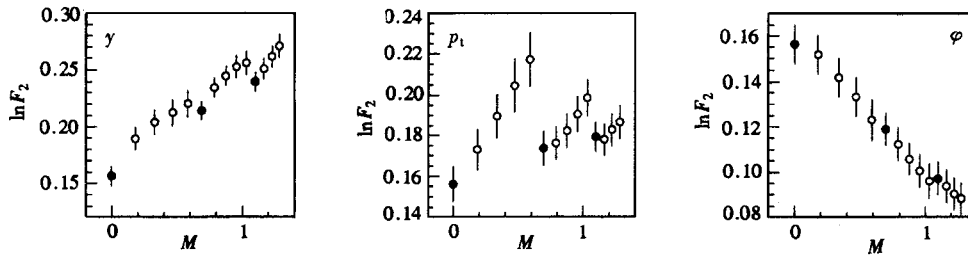


图2 一维非整数分割时阶乘矩的双对数分布图

### 3 一维修正

当  $M$  取非整数值时 ( $M = N + a, 0 < a < 1$ ), 根据方程 (6), 只有前面  $N$  个相格参加横向平均, 相空间参加计算的比率为  $r = N/M$ . 由于  $f_2(m)$  分布是非均匀的, 因此在丢掉一部分相空间后, 对计算结果必然要产生影响, 即  $F_2(M) \neq F_2(N, M)$ . 为了消除这种影响, 引入修正系数  $R(r) = R(N/M)$ , 并定义:

$$F_2(M) = \frac{1}{R(r)} \left( \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{\langle n_m(n_m - 1) \rangle}{\langle n_m \rangle^2} \right), \quad (N = M - a, 0 \leq a < 1) \quad (10)$$

$M$  取非整数值时,  $F_2(M)$  无法计算出来, 因此,  $R(r)$  并不能从定义式中求得, 为了从实验数据中确定  $R(r)$  的值, 先选取整数  $N'$  和  $M'$ , 并使:

$$\frac{N'}{M'} \approx \frac{N}{M} = r. \quad (11)$$

定义  $F_2(N', M')$  与  $F_2(M')$  的比值函数:

$$C(N', M') = \frac{\frac{1}{N'} \sum_{m=1}^{N'} \langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2}{\frac{1}{M'} \sum_{m=1}^{M'} \langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2}. \quad (12)$$

虽然  $F_2(N, M)$  和  $F_2(M)$  与  $F_2(N', M')$  和  $F_2(M')$  都不相同, 但是当满足 (11) 式时,  $R(N/M)$  与  $C(N', M')$  在相空间中存在一定的对应关系, 如果找出了这种关系, 就可以通过比值函

数  $C(N', M')$  来求修正系数  $R(r)$  的值.

为此, 取  $M = 3-40$ , 分别对  $(y, p_i, \varphi)$  三个变量计算出全部的  $C(N', M')$  值, 得比值函数的分布如图 3 所示.

从图 3(a) 可以看出, 比值分布函数呈窄幅的带状分布, 主要依赖  $N/M$  值变化. 因此通过对  $C(N', M')$  分布进行曲线拟合后, 便可用插值法求出  $M$  取非整数数值时的修正系数  $R_y(r)$ ,  $R_{p_i}(r)$  和  $R_\varphi(r)$  的值.

经计算发现, 修正系数的值对在分布带中的插值位置十分敏感. 为了能有效地消除  $\ln F_2 \sim \ln M$  分布中的“振荡现象”. 需要按以下方法在分布带中选取拟合曲线. 在  $\ln F_2 \sim \ln M$  分布中, 当非整数点在整数点上方振荡时, 如  $(y, p_i)$  分量的分布情况, 取比值分布函数在分布带中的上沿值拟合修正曲线; 当非整数点在整数点附近上下振荡时, 如  $\varphi$  分量的分布情况, 则取  $C(N', M')$  在分布带的中间位置拟合修正曲线. 如图 3(b) 所示.

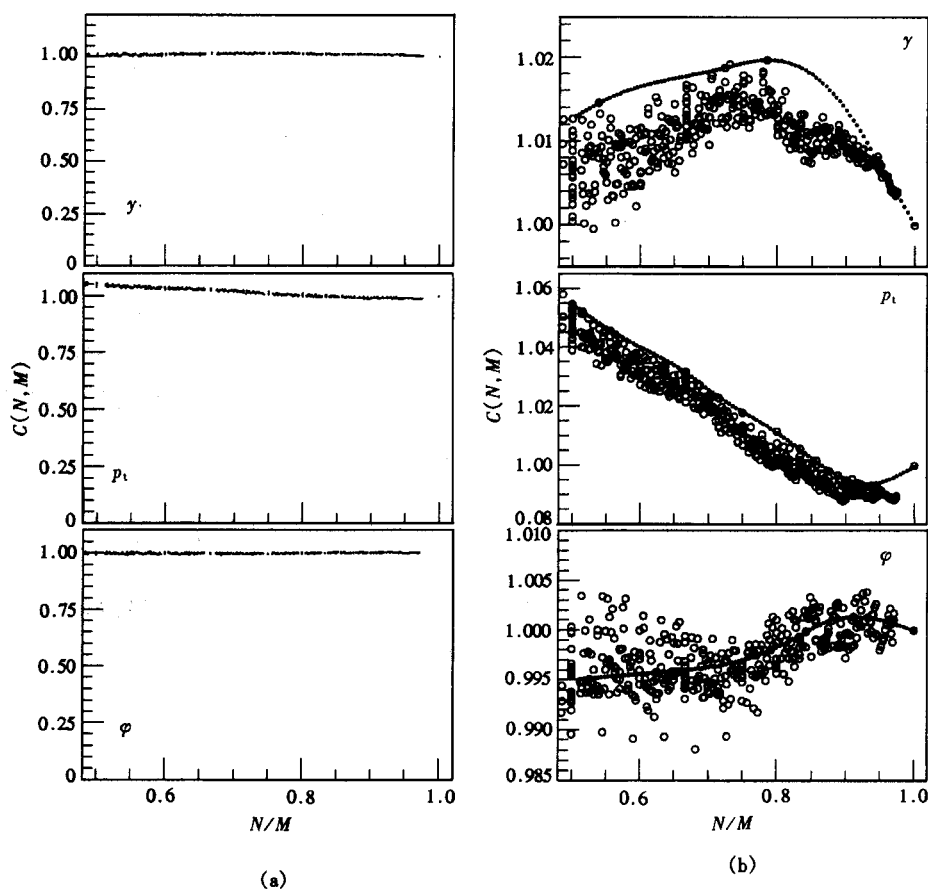


图3 (a) 比值函数分布图; (b) 从分布带上拟合修正曲线

用插值法从拟合的修正曲线上得到一维阶乘矩的修正系数  $R_y$ ,  $R_{p_i}$ ,  $R_\varphi$  值, 即可根据方程(11)对作非整数分割时的阶乘矩进行修正, 修正结果如图 4 所示. 很显然, 图 2 中非整数点的“振荡现象”在图 4 中基本上已被消除.

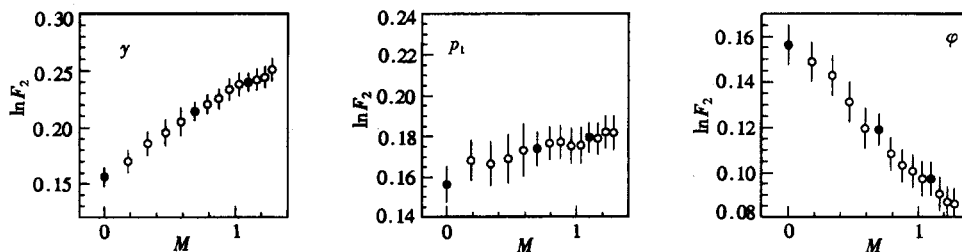


图4 一维非整数分割时修正后的阶乘矩的双对数分布图

## 4 高维修正

在对非整数分割下的一维阶乘矩进行修正后, 接下来讨论高维阶乘矩的修正.

首先, 讨论二维的情况. 取  $M_1, M_2$  为 1 和 2 两个方向的非整数分割数,  $N_1, N_2$  为其对应的整数部分. 即  $M_1 = N_1 + a_1$ ,  $M_2 = N_2 + a_2$ ,  $0 < a_1 < 1$ ,  $0 < a_2 < 1$ . 仿照方程 (6) 定义二维非整数分割时的阶乘矩公式:

$$F_2(N_1, M_1; N_2, M_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{m_1=1}^{N_1} \sum_{m_2=1}^{N_2} \frac{\langle n_{m_1, m_2} (n_{m_1, m_2} - 1) \rangle}{\langle n_{m_1, m_2} \rangle^2}. \quad (13)$$

二维非整数分割时相空间的平面分割图如图 5(a) 所示. 很显然, 在计算  $F_2(N_1, M_1; N_2, M_2)$  时, 去掉了三个小相格  $N_1 a_2, N_2 a_1$  和  $a_1 a_2$ . 由于  $\langle n_{m_1, m_2} (n_{m_1, m_2} - 1) \rangle / \langle n_{m_1, m_2} \rangle^2$  是非均匀的, 因此丢掉几个小相格后, 计算得到的阶乘矩必然受到影响. 为此引入二维修正系数  $R^{(2)}(r)$ , 并定义为:

$$F_2(M_1, M_2) = \frac{1}{R^{(2)}(r)} F_2(N_1, M_1; N_2, M_2), \quad (14)$$

$$R^{(2)}(r) = R_1 \cdot R_2 \cdot R_{12}. \quad (15)$$

其中一维修正系数  $R_1, R_2$  是由于丢掉小相格  $N_1 a_2$  和  $N_2 a_1$  引起的; 而  $R_{12}$  为二维关联系数, 是由于丢掉关联相格  $a_1 a_2$  后引起的. 如果  $R_1, R_2$  用面积  $\Delta S_1 = N_2 (M_1 - N_1)$  和  $\Delta S_2 = N_1 (M_2 - N_2)$  来代表, 则  $R_{12}$  可用  $\Delta S_{12} = (M_1 - N_1) (M_2 - N_2)$  来代表. 因此, 如果引入比例系数:

$$b_1 = \frac{\Delta S_{12}}{\Delta S_2} = \frac{M_1 - N_1}{N_1}; \quad b_2 = \frac{\Delta S_{12}}{\Delta S_1} = \frac{M_2 - N_2}{N_2}. \quad (16)$$

则由面积  $\Delta S_{12}$  代表的二维关联系数可以用面积比折算的方法表示为:

$$R_{12} = R_1^{b_1/2} \cdot R_2^{b_2/2}.$$

因  $R_1 \approx 1$ ,  $R_2 \approx 1$ , 因此又可表示为:

$$R_{12} = 1 + \frac{1}{2} [b_1 (R_2 - 1) + b_2 (R_1 - 1)]. \quad (17)$$

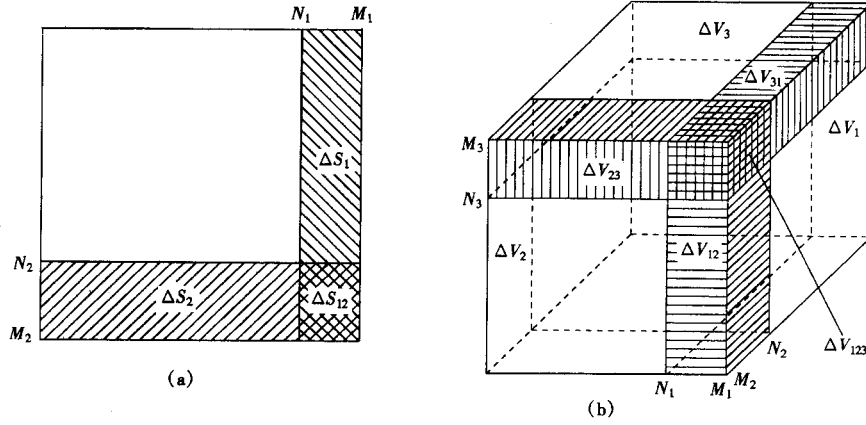


图5 (a) 二维非整数分割图; (b) 三维非整数分割图

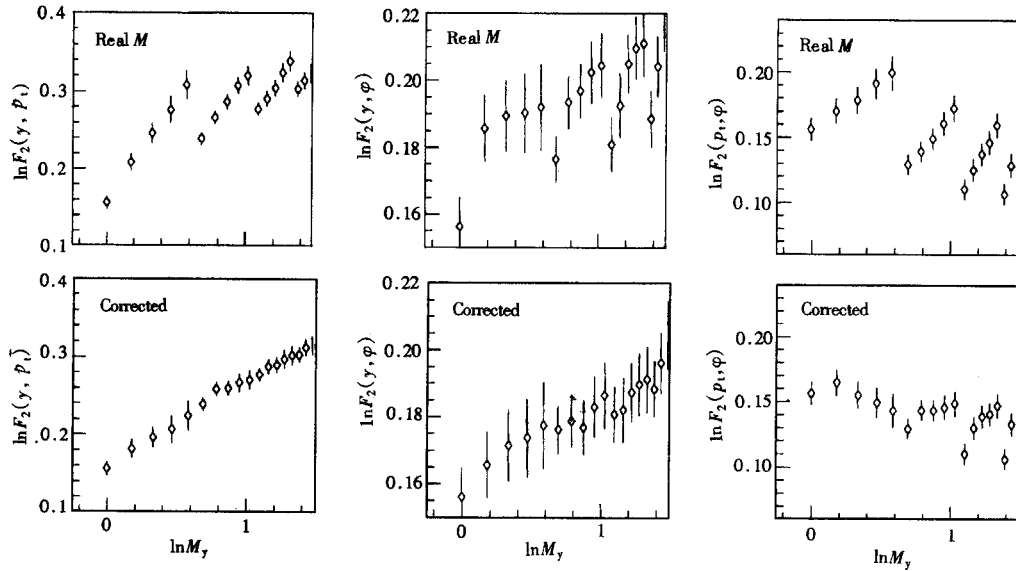


图6 二维自仿射阶乘矩的双对数分布图 ( $H_{y\varphi} = H_{y\varphi} = 0.475, H_{p_1\varphi} = 1$ )

用实验数据进行计算,并根据(14)、(15)式进行修正,结果如图6所示.其中图6(上)为非整数分割时的阶乘矩  $\ln F_2 \sim \ln M$  的分布.图6(下)为非整数分割修正后的阶乘矩  $\ln F_2 \sim \ln M$  的分布图.显然经过修正后的分布图中“振荡现象”基本消除.

在三维情况下,定义:

$$F_2(M_1, M_2, M_3) = \frac{1}{R^{(3)}} F_2(N_1, M_1; N_2, M_2; N_3, M_3). \quad (18)$$

$$R^{(3)} = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_{12} \cdot R_{23} \cdot R_{123}. \quad (19)$$

如图5(b)所示,与二维情况类似,采用体积折算比的方法可得修正系数的计算公式:

$$R_{12} = 1 + \frac{1}{2} [b_1(R_2 - 1) + b_2(R_1 - 1)] ,$$

$$R_{23} = 1 + \frac{1}{2} [b_2(R_3 - 1) + b_3(R_2 - 1)] ,$$

$$R_{31} = 1 + \frac{1}{2} [b_3(R_1 - 1) + b_1(R_3 - 1)] ,$$

$$R_{123} = 1 + \frac{1}{3} [b_1 b_2 (R_3 - 1) + b_2 b_3 (R_1 - 1) + b_3 b_1 (R_2 - 1)] .$$

$$b_1 = \frac{\Delta V_{12}}{\Delta V_2} = \frac{\Delta V_{31}}{\Delta V_3} = \frac{M_1 - N_1}{N_1} ,$$

$$b_2 = \frac{\Delta V_{12}}{\Delta V_1} = \frac{\Delta V_{23}}{\Delta V_3} = \frac{M_2 - N_2}{N_2} ,$$

$$b_3 = \frac{\Delta V_{31}}{\Delta V_1} = \frac{\Delta V_{23}}{\Delta V_2} = \frac{M_3 - N_3}{N_3} .$$

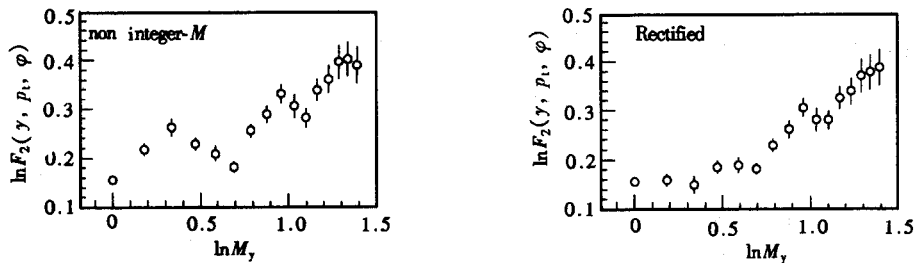


图 7 三维自仿射阶乘矩的双对数分布图 ( $H_{y,p_1} = H_{y,\varphi} = 0.475$ ;  $H_{p_1,\varphi} = 1$ )

用上述方法计算出三维修正系数, 得到非整数分割下修正前后的阶乘矩的  $\ln F_2 \sim \ln M$  的分布如图 7 所示.

## 5 结果讨论

在研究高能碰撞末态粒子的间歇现象时, 对相空间的分割数  $M$  取非整数值计算阶乘矩是十分必要的. 通过对阶乘矩的理论分析发现, 在采用了累积变换使相空间中的粒子数的平均分布均匀后,  $f_2(m) = \langle n_m(n_m - 1) \rangle / \langle n_m \rangle^2$  仍然有可能不平, 即存在非均匀因素的影响. 当  $M$  取整数值时, 这种影响被平均掉. 而当分割数  $M$  取非整数值时, 这种影响将会显现出来.

为了消除非均匀因素的影响, 对高能碰撞末态粒子的阶乘矩在非整数分割下的分析方法进行了仔细的研究, 引进了修正系数. 找到了从实验数据中得到一维修正系数的方



法,并用简单的几何方法得到了用一维修正系数计算二、三维修正系数的方法,从而建立了一套完整地非整数分割下阶乘矩的分布进行修正的方法.用上述方法对实验数据进行非整数分割下的计算和修正,修正后的曲线振荡现象基本消除,并与整数分割时的曲线一致.

本文所采用的实验数据均取自NA22实验组,在此作者对W. Kittel教授和NA22实验组表示感谢!

### 参 考 文 献

- 1 Bialas A, Prechanski R. Nucl. Phys., 1986, **B273**:703—709; 1988, **B308**:857—862
- 2 De wolf, E A Dremin I M, kittel. W, Phys. Rep., 1996, **270**:1—4
- 3 Wu Yuanfang, Liu Lianshou. Phys. Rev. Lett., 1993, **70**: 3197—3203
- 4 Wu Yuanfang, Zhang Yang, Liu Lianshou. Phys. Rev., 1995, **D51**:6576—6580
- 5 Wu Yuanfang, Liu Lianshou. Science in China (in Chinese), 1995, **A38**:435—437  
(吴元芳, 刘连寿. 中国科学, 1995, **A38**:435—437)
- 6 Agababyan N M et al (NA22). Phys. Lett., 1996, **B382**:305—312
- 7 Liu Lianshou, Zhang Yang, Deng Yue. Z. Phys., 1997, **C73**:535—542
- 8 Ochs W. Z. Phys., 1991, **C50**:339—345; Bialas A, Gazdzichi M. Phys. Lett., 1990, **B252**:483—488

## Factorial Moment Analysis of High Energy Experimental Data With Non-integer Partitian Number \*

Chen Gang

(Department of Physics, Jingzhou Teacher's College, Jingzhou 434104)

Gao Yanmin Liu Lianshou

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079)

**Abstract** Doing the factorial moment analysis with non-integer partition  $M$  of phase space, the influence of the unflat distribution of two or more particle correlations has to be considered. In this paper the analysis method on the factorial moment in the phase space of multiparticle production with non-integer partition  $M$  is studied carefully.

A systematic method for rectifying FM distribution with non-integer partition  $M$  is developed. The calculated results with this method is checked by using NA22 data.

**Key words** high energy collisions, non-integer partition, phase space, factorial moment, rectified method

Received 26 May 1998

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China and National Natural Science Foundation of Hubei