

非球谐振子势的精确解*

陈昌远 刘友文

(盐城师范学院物理系 盐城 224002)

摘要 严格求解了三维非球谐振子势 $V(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{A}{2r^2}$ 的 Schrödinger 方程, 给出了精确的能谱方程和归一化的径向波函数. 获得了径向幂次算符 r^s 的矩阵元和平均值的计算公式及其递推关系.

关键词 非球谐振子势 精确解 Schrödinger 方程

1 引言

寻求 Schrödinger 方程的精确解是量子力学的一项根本任务. 在物理学中, 谐振子具有极其广泛的应用, 但大量的实际问题是偏离谐振子模型的, 而必须用非谐振子势来描述. 所以寻求非谐振子势的精确解更具有实际意义. 在一维情况下, 人们提出了一种可精确求解的非谐振子模型, 势函数为

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{g}{2x^2}. \quad (1)$$

文献 [1, 2] 分别用因子化方法和特殊函数获得了它的精确解, 文献 [3—5] 研究了它的相干态, 奇偶相干态和迭加态的性质. 本文将 (1) 式推广到三维情况, 获得了三维含有平方反比项的非球谐振子势

$$V(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{A}{2r^2}, \quad (2)$$

Schrödinger 方程的精确解, 给出了精确的能谱方程和归一化波函数. 在此基础上, 给出径向幂次算符 r^s 的矩阵元和平均值的计算公式及其递推关系. 本文结果具有普遍性, 在 $A = 0$ 的情况下, 本文所得结果退化为球谐振子的相关结果.

2 能谱方程和归一化波函数

在坐标表象中, 非球谐振子势的 Schrödinger 方程为

1998-06-16收稿

* 江苏省教育委员会自然科学基金资助

$$\left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{A}{2r^2} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (3)$$

为了避免“粒子向力心坠落”，要求 $A > -1/4$ ^[6]。束缚态的边界条件是 $\psi(0, \theta, \varphi)$ 不发散和 $\psi(\infty, \theta, \varphi) = 0$ 。令 $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} Y(\theta, \varphi)$ 以分离出 (3) 式的径向部分得

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[\lambda - r^2 - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right] u(r) = 0, \quad (4)$$

式中 $\lambda = 2E$,

$$l' = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4[l(l+1) + A]}}{2}. \quad (5)$$

由此可见, 当 $A = 0$ 时, l' 即为角量子数 l 。由边界条件 $\psi(0, \theta, \varphi)$ 不发散和 $\psi(\infty, \theta, \varphi) = 0$ 可知方程 (4) 的边界条件是 $u(0) = 0$ 和 $u(\infty) = 0$ 。

做函数代换

$$u(r) = r^{l'+1} e^{-r^2/2} f(r), \quad (6)$$

由 (4) 式得 $f(r)$ 所满足的微分方程为

$$f''(r) - 2rf'(r) + \frac{2(l'+1)}{r} f'(r) + (\lambda - 2l' - 3)f(r) = 0. \quad (7)$$

进一步做变量代换 $x = r^2$, 则上式化为合流超几何微分方程

$$xf''(x) + (\gamma - x)f'(x) - \alpha f(x) = 0, \quad (8)$$

式中参数

$$\gamma = l' + 3/2, \quad \alpha = (2l' + 3 - \lambda)/4. \quad (9)$$

因而解为

$$f(r^2) = f(x) = F(\alpha, \gamma, r^2). \quad (10)$$

当 α 不等于 0 和负整数时, $F(\alpha, \gamma, r^2) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{r^2}$, 由 (6) 式知这不满足束缚态的边界条件 $u(\infty) = 0$ 。因此为了得到物理上允许的解, 必须有

$$\alpha = -n_r = 0, -1, -2, \dots. \quad (11)$$

把上式和 (5) 式以及 $\lambda = 2E$ 代入 (9) 式得能谱方程

$$E_{n_r, l} = (2n_r + l' + 3/2) = \left(2n_r + \frac{\sqrt{1 + 4[l(l+1) + A]}}{2} + 1 \right), \quad (n_r = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

而波函数

$$u_{n_r, l}(r) = N_{n_r, l} r^{l'+1} e^{-r^2/2} F(-n_r, l' + 3/2, r^2), \quad (13)$$

式中 $N_{n_r, l}$ 为归一化常数, 利用合流超几何函数和广义拉盖尔多项式的关系^[7]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + 1 + n)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F(-n, \alpha + 1, x), \quad (14)$$

以及广义拉盖尔多项式的正交归一性^[7]

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{mn}, \quad (15)$$

得归一化常数

$$N_{n,l} = \frac{1}{\Gamma(l' + 3/2)} \sqrt{\frac{2\Gamma(n_r + l' + 3/2)}{n_r!}}. \quad (16)$$

于是归一化的径向波函数

$$R_{n,l}(r) = \frac{1}{\Gamma(l' + 3/2)} \left(\frac{2\Gamma(n_r + l' + 3/2)}{n_r!} \right)^{1/2} r^{l'} e^{-r^2/2} F(-n_r, l' + 3/2, r^2). \quad (17)$$

当 $A = 0$ 时, 非球谐振子退化为球谐振子, 因此在 (5) 式和 (12) 式令 $A = 0$, 得 $l' = l$,

$$E_{n,l} = (2n_r + l + 3/2), \quad (n_r = 0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

而 (17) 式则退化为

$$R_{n,l}(r) = \left(\frac{2^{l+2-n_r} (2l + 2n_r + 1)!!}{\sqrt{\pi} n_r! [(2l + 1)!!]^2} \right)^{1/2} r^l e^{-r^2/2} F(-n_r, l + 3/2, r^2). \quad (19)$$

这与文献 [8, 9] 直接求解球谐振子势的 Schrödinger 方程所得到的结论是完全一致的. 也就是说, 本文的结论具有普遍性, 球谐振子作为特例包含在本文的一般结论之中.

3 矩阵元和平均值的计算公式

在把非球谐振子用于核结构等具体问题时往往需计算径向算符 r^s 的矩阵元

$$\begin{aligned} \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle &= N_{n_{r_1} l_1} N_{n_{r_2} l_2} \int_0^\infty r^{l_1' + l_2' + 2 + s} e^{-r^2} F(-n_{r_1}, l_1' + 3/2, r^2) F(-n_{r_2}, l_2' + 3/2, r^2) dr = \\ &= \frac{1}{2} N_{n_{r_1} l_1} N_{n_{r_2} l_2} I, \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^\infty r^{l_1' + l_2' + 2 + s} e^{-r^2} F(-n_{r_1}, l_1' + 3/2, r^2) F(-n_{r_2}, l_2' + 3/2, r^2) dr = \\ &= \int_0^\infty x^{(l_1' + l_2' + 1 + s)/2} e^{-x} F(-n_{r_1}, l_1' + 3/2, x) F(-n_{r_2}, l_2' + 3/2, x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

利用含有两个广义拉盖尔多项式的积分公式^[7]

$$\int_0^\infty z^\lambda e^{-z} L_n^{(\mu)}(z) L_{n'}^{(\mu')}(z) dz = (-1)^{n+n'} \Gamma(\lambda + 1) \sum_k \binom{\lambda - \mu}{n - k} \binom{\lambda - \mu'}{n' - k} \binom{\lambda + k}{k}, \quad (22)$$

得到

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{n_{r_1}! n_{r_2}! \Gamma(l'_1 + 3/2) \Gamma(l'_2 + 3/2)}{\Gamma(n_{r_1} + l'_1 + 3/2) \Gamma(n_{r_2} + l'_2 + 3/2)} \int_0^\infty x^{(l'_1 + l'_2 + 1 + s)/2} e^{-x} L_{n_{r_1}}^{(l'_1 + 1/2)}(x) L_{n_{r_2}}^{(l'_2 + 1/2)}(x) dx = \\
 &= \frac{(-1)^{n_{r_1} + n_{r_2}} n_{r_1}! n_{r_2}! \Gamma(l'_1 + 3/2) \Gamma(l'_2 + 3/2)}{\Gamma(n_{r_1} + l'_1 + 3/2) \Gamma(n_{r_2} + l'_2 + 3/2)} \Gamma\left(\frac{l'_1 + l'_2 + s + 3}{2}\right) \times \\
 &\quad \sum_k \binom{(l'_2 + s - l'_1)/2}{n_{r_1} - k} \binom{(l'_1 + s - l'_2)/2}{n_{r_2} - k} \binom{(l'_1 + l'_2 + s + 1)/2 + k}{k}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

把上式以及归一化常数代入(20)式并化简最后得

$$\begin{aligned}
 \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle &= \\
 &= (-1)^{n_{r_1} + n_{r_2}} \left[\frac{n_{r_1}! n_{r_2}!}{\Gamma(n_{r_1} + l'_1 + 3/2) \Gamma(n_{r_2} + l'_2 + 3/2)} \right]^{1/2} \Gamma\left(\frac{l'_1 + l'_2 + s + 3}{2}\right) \times \\
 &\quad \sum_k \binom{(l'_2 + s - l'_1)/2}{n_{r_1} - k} \binom{(l'_1 + s - l'_2)/2}{n_{r_2} - k} \binom{(l'_1 + l'_2 + s + 1)/2 + k}{k}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

在(24)式中令 $n'_{r_1} = n'_{r_2} = n_r, l'_1 = l'_2 = l'$ 即得平均值的计算公式

$$\begin{aligned}
 \langle n_r l | r^s | n_r l \rangle &= \\
 &= \frac{n_r!}{\Gamma(n_r + l' + 3/2)} \Gamma\left(\frac{2l' + s + 3}{2}\right) \sum_k \binom{s/2}{n_r - k} \binom{s/2}{n_r - k} \binom{(s+1)/2 + l' + k}{k}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

进一步在上式中令 $s = 0$, 注意到这时右边的求和仅有 $k = n_r$ 这一项, 于是得到

$$\langle n_r l | n_r l \rangle = \frac{n_r!}{\Gamma(n_r + l' + 3/2)} \Gamma\left(\frac{2l' + 3}{2}\right) \binom{l' + 1/2 + n_r}{n_r} = 1. \quad (26)$$

这一结果是显然的, 它说明本文获得的矩阵元以及平均值的计算公式是完全正确的.

4 矩阵元和平均值的递推公式

上节给出了矩阵元和平均值的计算公式, 式中含有阶乘运算和伽马函数. 所以对于高幂次来说, 不仅计算过程极为繁琐, 而且计算精度也不高. 因此, 实际计算时可利用(24)式和(25)式算出少数几个低幂次的矩阵元和平均值的值, 而高幂次的矩阵元和平均值可利用本节给出的递推公式来进行计算.

对于状态 $n_{r_1} l_1$ 和状态 $n_{r_2} l_2$, (4)式分别成为

$$\frac{d^2 u_{n_{r_1} l_1}(r)}{dr^2} + \left[(4n_{r_1} + 2l'_1 + 3) - r^2 - \frac{l'_1(l'_1 + 1)}{r^2} \right] u_{n_{r_1} l_1}(r) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 u_{n_1, l_2}(r)}{dr^2} + \left[(4n_{r_2} + 2l_2' + 3) - r^2 - \frac{l_2'(l_2' + 1)}{r^2} \right] u_{n_1, l_2}(r) = 0, \quad (28)$$

而矩阵元

$$\langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle = \int_0^\infty r^s u_{n_{r_1}, l_1}(r) u_{n_{r_2}, l_2}(r) dr. \quad (29)$$

以 $r^s u_{n_{r_2}, l_2}(r)$ 乘 (27) 式各项并积分 $\int_0^\infty \dots dr$, 方括号内的三项显然给出 r^s, r^{s+2} 和 r^{s-2} 的矩阵元, 而第一项进行二次分部积分, 则得如下结果

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty r^s \frac{du_{n_{r_1}, l_1}}{dr} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr + \int_0^\infty sr^{s-1} u_{n_{r_1}, l_1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr = \\ & [l_1'(l_1' + 1) - s(s+1)] \langle n_{r_1} l_1 | r^{s-2} | n_{r_2} l_2 \rangle - (4n_{r_1} + 2l_1' + 3) \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle + \\ & \langle n_{r_1} l_1 | r^{s+2} | n_{r_2} l_2 \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

再以 $r^s u_{n_{r_1}, l_1}(r)$ 乘 (28) 式各项并积分, 方括号内的三项依然给出 r^s, r^{s+2} 和 r^{s-2} 的矩阵元, 而第一项分部积分一次, 得

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty r^s \frac{du_{n_{r_1}, l_1}}{dr} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr - \int_0^\infty sr^{s-1} u_{n_{r_1}, l_1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr = l_2'(l_2' + 1) \langle n_{r_1} l_1 | r^{s-2} | n_{r_2} l_2 \rangle - \\ & (4n_{r_2} + 2l_2' + 3) \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle + \langle n_{r_1} l_1 | r^{s+2} | n_{r_2} l_2 \rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

联合 (30) 式和 (31) 式得

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty r^s \frac{du_{n_{r_1}, l_1}}{dr} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr = \frac{1}{2} [l_1'(l_1' + 1) + l_2'(l_2' + 1) - s(s-1)] \langle n_{r_1} l_1 | r^{s-2} | n_{r_2} l_2 \rangle - \\ & (2n_{r_1} + 2n_{r_2} + l_1' + l_2' + 3) \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle + \langle n_{r_1} l_1 | r^{s+2} | n_{r_2} l_2 \rangle, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty sr^{s-1} u_{n_{r_1}, l_1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr = \frac{1}{2} [l_1'(l_1' + 1) - l_2'(l_2' + 1) - s(s-1)] \langle n_{r_1} l_1 | r^{s-2} | n_{r_2} l_2 \rangle - \\ & (2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l_1' - l_2') \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

下面再用 $r^{s+1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr}$ 乘 (27) 式各项, 并对第一项进行一次分部积分得

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty (s+1) r^s \frac{du_{n_{r_1}, l_1}}{dr} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr - \int_0^\infty r^{s+1} \frac{du_{n_{r_1}, l_1}}{dr} \frac{d^2 u_{n_{r_2}, l_2}}{dr^2} dr = \\ & l_1'(l_1' + 1) \int_0^\infty r^{s-1} u_{n_{r_1}, l_1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr - (4n_{r_1} + 2l_1' + 3) \int_0^\infty r^{s+1} u_{n_{r_1}, l_1} \frac{du_{n_{r_2}, l_2}}{dr} dr + \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} r^{s+3} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr, \quad (34)$$

再用 $r^{s+1} \frac{du_{n_1, l_1}}{dr}$ 乘 (28) 式各项, 并对方括号内的三项各进行一次分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} r^{s+1} \frac{du_{n_1, l_1}}{dr} \frac{d^2 u_{n_2, l_2}}{dr^2} dr = \\ & -l'_2(l'_2+1)(s-1) \langle n_{r_1, l_1} | r^{s-2} | n_{r_2, l_2} \rangle - l'_2(l'_2+1) \int_0^{\infty} r^{s-1} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr + \\ & (4n_{r_2} + 2l'_2 + 3)(s+1) \langle n_{r_1, l_1} | r^s | n_{r_2, l_2} \rangle + (4n_{r_2} + 2l'_2 + 3) \int_0^{\infty} r^{s+1} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr - \\ & (s+3) \langle n_{r_1, l_1} | r^{s+2} | n_{r_2, l_2} \rangle - \int_0^{\infty} r^{s+3} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr. \end{aligned} \quad (35)$$

把 (35) 式代入 (34) 式并化简合并同幂次项的积分得

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} (s+1) r^s \frac{du_{n_1, l_1}}{dr} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr = \\ & -l'_2(l'_2+1)(s-1) \langle n_{r_1, l_1} | r^{s-2} | n_{r_2, l_2} \rangle + [l'_1(l'_1+1) - l'_2(l'_2+1)] \int_0^{\infty} r^{s-1} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr + \\ & (4n_{r_2} + 2l'_2 + 3)(s+1) \langle n_{r_1, l_1} | r^s | n_{r_2, l_2} \rangle - 2(2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l'_1 - l'_2) \int_0^{\infty} r^{s+1} u_{n_1, l_1} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr - \\ & (s+3) \langle n_{r_1, l_1} | r^{s+2} | n_{r_2, l_2} \rangle, \end{aligned} \quad (36)$$

上式右边第二项的积分可直接利用 (33) 式来代换, 第四项的积分则需在 (33) 式中用 $s \rightarrow s+2$, 然后代换这一项的积分, 二项的积分代换后, 再对 (36) 式进行化简最后可得

$$\begin{aligned} & - \int_0^{\infty} r^s \frac{du_{n_1, l_1}}{dr} \frac{du_{n_2, l_2}}{dr} dr = \\ & \left\{ \frac{[l'_1(l'_1+1) - l'_2(l'_2+1)]^2}{2s(s+1)} - \frac{[l'_1(l'_1+1) + l'_2(l'_2+1)](s-1)}{2(s+1)} \right\} \langle n_{r_1, l_1} | r^{s-2} | n_{r_2, l_2} \rangle + \\ & \left\{ (2n_{r_1} + 2n_{r_2} + l'_1 + l'_2 + 3) - \right. \\ & \left. \frac{2[l'_1(l'_1+1) - l'_2(l'_2+1)](2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l'_1 - l'_2)}{s(s+2)} \right\} \langle n_{r_1, l_1} | r^s | n_{r_2, l_2} \rangle + \\ & \left\{ \frac{2(2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l'_1 - l'_2)^2}{(s+1)(s+2)} - \frac{s+3}{s+1} \right\} \langle n_{r_1, l_1} | r^{s+2} | n_{r_2, l_2} \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

对比 (32) 式和 (37) 式, 即得矩阵元的递推公式

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{(2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l'_1 - l'_2)^2}{(s+1)(s+2)} - \frac{s+2}{s+1} \right\} \langle n_{r_1} l_1 | r^{s+2} | n_{r_2} l_2 \rangle = \\
& \left\{ \frac{[l'_1(l'_1+1) - l'_2(l'_2+1)](2n_{r_1} - 2n_{r_2} + l'_1 - l'_2)}{s(s+2)} - \right. \\
& \left. (2n_{r_1} + 2n_{r_2} + l'_1 + l'_2 + 3) \right\} \langle n_{r_1} l_1 | r^s | n_{r_2} l_2 \rangle + \\
& \left\{ \frac{s[l'_1(l'_1+1) + l'_2(l'_2+1)]}{2(s+1)} - \frac{s(s-1)}{4} - \right. \\
& \left. \frac{[l'_1(l'_1+1) - l'_2(l'_2+1)]^2}{4s(s+1)} \right\} \langle n_{r_1} l_1 | r^{s-2} | n_{r_2} l_2 \rangle. \quad (38)
\end{aligned}$$

由上式可知,只要知道了矩阵元 $\langle n_{r_1} l_1 | r | n_{r_2} l_2 \rangle$, $\langle n_{r_1} l_1 | r^2 | n_{r_2} l_2 \rangle$ 和 $\langle n_{r_1} l_1 | r^3 | n_{r_2} l_2 \rangle$ 的值,就可利用(38)式算出所需要的任意幂次的矩阵元.

在(38)式中,令 $n_{r_1} = n_{r_2} = n$, $l'_1 = l'_2 = l'$, 即得平均值的递推公式

$$\begin{aligned}
& (s+2) \langle n, l | r^{s+2} | n, l \rangle - (s+1)(4n_r + 2l' + 3) \langle n, l | r^s | n, l \rangle + \\
& \frac{s[(2l' + 1)^2 - s^2]}{4} \langle n, l | r^{s-2} | n, l \rangle = 0. \quad (39)
\end{aligned}$$

当 $A=0$ 时,非球谐振子退化为球谐振子,因此在(39)式中令 $A=0$, 则 $l' = l$, 于是(39)式退化为球谐振子的平均值的递推公式

$$\begin{aligned}
& (s+2) \langle n, l | r^{s+2} | n, l \rangle - (s+1)(4n_r + 2l + 3) \langle n, l | r^s | n, l \rangle + \\
& \frac{s[(2l + 1)^2 - s^2]}{4} \langle n, l | r^{s-2} | n, l \rangle = 0, \quad (40)
\end{aligned}$$

这和文献[10]给出的有关球谐振子的递推公式完全一致.由此可见,本文给出的递推公式更具有—般性.

5 结论

在以前的工作中,人们对—维的含有平方反比项的非谐振子进行了广泛的研究和讨论.本文将它推广到了三维,获得含有平方反比项的非球谐振子势的精确解,得到了精确的能谱方程和归—化波函数,并给出了径向幂次算符 r^s 的矩阵元和平均值的计算公式以及递推关系,所有这些都为将非球谐振子应用于实际问题打下了坚实的基础,本文的结果具有普遍性,当表示非谐振项的强度 $A=0$ 时,本文结果全部退化为球谐振子的相关结果.由于球谐振子在核物理等具体问题中具有广泛的应用,所以本文给出的有关非球谐振子的结果可望在这些问题的研究中获得广泛的应用.

参 考 文 献

- 1 Zhu Dongpei. J. Phys. A., 1987, **20**(13):4331—4336
- 2 Chen Changyuan, Liu Youwen. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1998, **47**(4):536—541
(陈昌远, 刘友文. 物理学报, 1998, **47**(4):536—541)
- 3 Xu Ziwen. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1996, **45**(11):1807—1811
(徐子文. 物理学报, 1996, **45**(11):1807—1811)
- 4 Ni Zhixiang. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1997, **46**(9):1687—1692
(倪致祥. 物理学报, 1997, **46**(9):1687—1692)
- 5 Yu Zhaoxian, Wang Jisuo, Liu Yehou. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1997, **46**(9):1693—1698
(于肇贤, 王继锁, 刘业厚. 物理学报, 1997, **46**(9):1693—1698)
- 6 Landau L D, Lifshitz E M. Quantum Mechanics. 3rd ed. New York: Pergamon Press, 1977. 114—117
- 7 Wang Zhuxi, Guo Dunren. An Introduction to Special Functions (in Chinese). Beijing: Science Press, 1979. 361—365
(王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1979. 361—365)
- 8 Zeng Jinyan. Quantum Mechanics (in Chinese). Vol 1. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1997. 283—286
(曾谨言. 量子力学 卷 I. 第二版. 北京: 科学出版社, 1997. 283—286)
- 9 Goldhammer P. Rev. Mod. Phys., 1963, **35**(1):40—107
- 10 Qian Bochu, Zeng Jinyan. Problems Choice and Dissection in Quantum Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 1988. 202—204
(钱伯初, 曾谨言. 量子力学学习题精选与剖析. 北京: 科学出版社, 1988. 202—204)

Exact Solutions of Non-spherical Harmonic Oscillator Potential*

Chen Changyuan Liu Youwen

(Department of Physics, Yancheng Teachers' College, Yancheng 224002)

Abstract In this paper, the Schrödinger equation with a non-spherical harmonic oscillator potential in three dimensions $V(r) = \frac{1}{2} r^2 + \frac{A}{2r^2}$ is solved. The exact energy equation and the normalized wave function are obtained. The calculation formulas and recurrence formulas of matrix elements and mean values for any integer power operator r^s are presented.

Key words non-spherical harmonic oscillator, exact solution, Schrödinger equation

Received 16 June 1998

* Project supported by Natural Science Foundation of the Education Committee of Jiangsu Province