

# 推转 PNC 波函数的角动量投影

韩 勇

(四川大学物理系 成都 610064)

**摘要** 研究原子核较高自旋态的特征,不仅需要考虑到  $K$  混合,而且应该引入 Coriolis 相互作用项,亦即使用推转 Hamilton 量. 推转项的引入破坏了时间反演对称性,单粒子角动量在内禀对称轴上的投影量子数已不再是好量子数. 从表面上看,这会使得理论计算变得非常复杂,但考虑到原子核的某些固有对称性,将角动量投影技术应用于含推转成份的粒子数守恒波函数(推转 PNC 波函数)并不十分困难. 在这一理论框架下详细推导计算原子核能谱及电磁性质的基本表达式,从而表明实施该方案的可行性.

**关键词** 推转 PNC 波函数 推转频率 角动量投影 对相互作用

## 1 引言

粒子数守恒(PNC)方法是为了克服 BCS 理论<sup>[1]</sup>在核结构研究中遇到的一些内在困难而提出的. PNC 方法的提出可追溯到六十年代<sup>[2]</sup>,在七八十年代<sup>[3-5]</sup>得到发展,八九十年代<sup>[6-10]</sup>被推广到推转壳模型. 该方法已被广泛用于处理各种核性质<sup>[2-10]</sup>,并被证明是成功的. 然而,在 PNC 理论框架中,由内禀态构造的波函数(PNC 波函数)不对应于确定的角动量量子数,即原子核的转动对称性被破坏,从而使该方法的应用受到限制. 借助于角动量投影技术,恢复原子核的转动对称性,可以得到具有好的角动量核态波函数. 前不久,我们已经用一套合适的单粒子态构造  $fp$  壳层中偶偶核<sup>46</sup>Ti 和<sup>48</sup>Cr 的 PNC 波函数进行角动量投影,并得到十分理想的结果<sup>[11]</sup>. 上述计算仅考虑了少量完全配对组态(辛弱数  $\nu=0$ ,总角动量  $I$  在内禀对称轴上的投影量子数  $K=0$ )的混合,因此投影谱只能很好地重现实验低激发谱,而对于高自旋态的性质(例如 yrast 带的回弯结构)则不能准确地描述. 计算表明<sup>[8]</sup>,随着推转频率  $\omega$  的增大,yrast 态中的  $\nu=2$ (一对拆散)和  $\nu=4$ (两对拆散)的组态成份将逐渐增多. 当  $\omega \geq \omega_c$ (一个定值)时,yrast 态将历经一个突然变化,完全配对组态成份降到 50% 以下, $\nu=2$  组态成份上升到 40%, $\nu=4$  组态成份也变得不可忽略( $\approx 10\%$ ), $\nu \geq 6$  组态成份仍然很少并可以忽略. 由此可知,如果进一步研究高自旋态的性质,不但在计算中需要考虑到  $K$  混合(三轴性),而且应该将推转项(Coriolis 相互作用

$$H_c = -\omega J_x \quad (1)$$

引入总 Hamilton 量. 这里,  $J_x$  是总角动量在与内禀对称轴  $z$  轴正交的  $x$  轴上的投影, 并假定形变势场绕  $x$  轴以角频率(推转频率) $\omega$  作推转运动.

引入推转项后, 由于单粒子角动量  $j$  在内禀对称轴上的投影量子数  $\Omega$  已不再是好的量子数, 从表面上看, 这会使理论变得非常复杂. 但考虑到 Coriolis 相互作用是一个单体算符, 对其在一合适的表象(例如以球形谐振子波函数作基矢的表象)中严格对角化并不存在困难. 而且, 虽然  $j_x$  项的出现, 时间反演对称性被破坏,  $\pm \Omega$  的二重简并性解除, 绕  $x$  轴旋转  $180^\circ$  的转动  $\hat{R}_x(\pi)$  与  $j_x$  也不对易, 但是容易证明  $\hat{R}_x(\pi)$  与  $j_x^2$  却是对易的, 因此可以构造  $\hat{R}_x(\pi)$  和  $j_x^2$  的共同本征函数<sup>[8-10]</sup>, 使得单粒子态形式非常简单, 从而使计算单粒子态间的矩阵元变得能够进行. 本文将应用角动量投影技术恢复含推转成份的 PNC 波函数(简称推转 PNC 波函数)的对称性, 详细推导计算原子核能谱和电磁性质的基本公式.

## 2 Hamilton 量及推转 PNC 波函数

假定一个质量数为  $A$  的原子核是一个包含  $A$  个全同核子的多粒子体系, 只考虑单体项和两体相互作用项的 Hamilton 量应为

$$H = H_0 + V = \sum_{i=1}^A h_0(i) + \sum_{i>j=1}^A v(i, i'),$$

式中  $h_0(i)$  为单粒子 Hamilton 量,  $v(i, i')$  是粒子  $i$  与粒子  $i'$  之间的相互作用.

若  $h_0$  的本征态(即单粒子态)用  $\varphi_s$  表示, 则内禀态  $|\Phi_\sigma\rangle$  可以写成 Slater 行列式

$$|\Phi_\sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_s(1) & \cdots & \varphi_A(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_s(2) & \cdots & \varphi_A(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(i) & \varphi_2(i) & \varphi_s(i) & \cdots & \varphi_A(i) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(A) & \varphi_2(A) & \varphi_s(A) & \cdots & \varphi_A(A) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_f \delta_f \varphi_1(1) \varphi_2(2) \cdots \varphi_s(i) \cdots \varphi_A(A) \equiv \frac{1}{\sqrt{A!}} \widetilde{|\Phi_\sigma\rangle}.$$

上式中的符号意义为: 对于给定组态  $\sigma$ , 被  $A$  个粒子所占有的  $A$  个单粒子态是一定的, 标记为  $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s, \cdots, \varphi_A\}$ .  $\varphi_s(i)$  代表标号为  $i$  的粒子处于标号为  $s$  的单粒子态  $\varphi_s$ .

$\sum$  表示对态标号数列  $1, 2, \cdots, s, \cdots, A$  的全排列求和: 若某个排列是由最初的排列经奇置换得到, 则  $\delta_f = -1$ ; 若某个排列是由最初的排列经偶置换得到, 则  $\delta_f = 1$ .

为了便于角动量投影理论部分的论述, 有必要先对推转壳模型(CSM)的单粒子 Hamilton 量(即单粒子推转 Hamilton 量)及 PNC 波函数的构建作一简介:

在转动坐标系中, 单粒子推转 Hamilton 量可以取以下形式

$$h_0 = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + h_{\text{ph}} + h_{\text{def}} + h_c, \quad (4)$$

其中  $h_{\text{sph}}$  为球形势,  $h_{\text{def}}$  为单体形变势,  $h_c$  可称之为单粒子推转项.  $h_{\text{sph}}$  可取 Woods-Saxon 势或球形谐振子势, 而  $h_{\text{def}}$  亦有不同形式的选取. 下面仅讨论轴对称形变情况下的 Nilsson 单粒子 Hamilton 量

$$h_{\text{Nil}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 + Cl \cdot s + Dl^2 - \frac{4}{3} M \omega_0^2 r^2 \delta \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}, \quad (5)$$

其中  $\frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 + Cl \cdot s + Dl^2$  为修正的球形谐振子势,  $-\frac{4}{3} M \omega_0^2 r^2 \delta \sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{20}$  为只考虑  $Y_{20}$  项时的单体形变势,  $\delta$  为形变参量.  $h_{\text{Nil}}$  的本征函数可以在球形壳模型基  $|Nljm\tau\rangle$  (可简记为  $\phi_{jmc}$ , 其中,  $N$  为主量子数,  $l$  为轨道角动量量子数,  $j$  和  $m$  分别为总角动量及其投影量子数,  $\tau$  为同位旋投影量子数) 中展开

$$\chi_{\eta\Omega\tau} = \sum_j C_{\eta,\Omega\tau} \phi_{j,m=\Omega,\tau}, \quad (6)$$

时间反演态

$$\chi_{\eta\bar{\Omega}\tau} = \sum_j C_{\eta,\bar{\Omega}\tau} \phi_{j,m=-\Omega,\tau}, \quad (7)$$

并且

$$C_{\eta,\bar{\Omega}\tau} = (-1)^{j-\Omega} C_{\eta,\Omega\tau}, \quad (8)$$

这里的  $\eta$  用以区分具有相同  $\Omega$  (或  $\bar{\Omega}$ ) 和  $\tau$  的不同单粒子态. 态  $\chi_{\eta\Omega\tau}$  和态  $\chi_{\eta\bar{\Omega}\tau}$  二重简并 (时间反演对称), 它们对应的本征值可表示为  $\epsilon_{\eta\Omega\tau}$ , 亦即 Nilsson 单粒子能. 系数  $C_{\eta,\Omega\tau}$  及本征值  $\epsilon_{\eta\Omega\tau}$  可通过对角化以  $\langle \phi_{j\Omega\tau} | h_{\text{Nil}} | \phi_{j\Omega\tau} \rangle$  为矩阵元的矩阵得到.

对于轴对称形变核, 单粒子推转项为

$$h_c = -\omega j_x, \quad (9)$$

其中  $\omega$  为推转频率,  $j_x$  为单粒子角动量  $j$  在  $x$  轴上的投影 ( $z$  轴为对称轴,  $x$  轴为转动轴). 将 Nilsson 态  $\chi_{\eta\Omega\tau}$  和  $\chi_{\eta\bar{\Omega}\tau}$  作线性组合

$$\psi_{\eta\Omega\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{\eta\Omega\tau} + f(N_{\eta\Omega}, \alpha) \chi_{\eta\bar{\Omega}\tau}], \quad (10)$$

则  $h_0$  的本征态  $\varphi_s$  可以  $\psi_{\eta\Omega\alpha}$  为基矢展开

$$\varphi_s = \sum_{\eta\Omega} S_{s,\eta\Omega\alpha} \psi_{\eta\Omega\alpha}, \quad (11)$$

其中  $f(N_{\eta\Omega}, \alpha)$  为与主量子数  $N_{\eta\Omega}$  和 Signature  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$  有关的项因子 (以下简称  $f_{\eta\Omega\alpha}$ ), 其具体形式的选取可参见文献 [8, 10], 本文将不对其展开讨论.

在 PNC 处理中, 可将  $H$  的本征态表示为所有内禀态  $|\Phi_\sigma\rangle$  的线性叠加 (文献 [10])

$$|\Psi_\nu\rangle = \sum_\sigma w_{\nu\sigma} |\Phi_\sigma\rangle. \quad (12)$$

由式 (12) 表示的波函数被称作 PNC 波函数. 计算系数  $w_{\nu\sigma}$  的方法可参见文献 [8—10].

需要指出, 如果在 Hamilton 量  $H$  中引入推转项  $H_c$ , 那么 PNC 波函数  $|\Psi_\nu\rangle$  的展开系数  $w_\sigma$  中便包含了“推转”成份, 我们可将此时的  $|\Psi_\nu\rangle$  简称为推转 PNC 波函数. 文献 [11] 的计算未考虑推转项, 与内禀态  $|\Phi_\sigma\rangle$  对应的组态单粒子能级均为二重简并. 由于将推转

项  $H_c$  引入总 Hamilton 量, 这种简并已被解除, 因此使得计算能谱及各电磁性质的表达式推导变得非常冗长, 尤其是角动量投影矩阵元公式的推导. 另外, 为了描述低激发谱 ( $K=0$  带), 文献[11]所考虑的组态  $\sigma$  仅为能量最低的几个完全配对组态 ( $\nu=0, K=0$ ). 式(11)中的组态  $\sigma$  原则上可包含所有的组态, 即偶偶核的完全配对组态 ( $\nu=0, K=0$ ) 以及  $\nu>0$  的组态 (奇  $A$  核或奇奇核的组态、各种类型核的拆对组态), 这样便可以更加一般地描述组态混合. 但是, 在实际计算中, 可根据原子核态中各组态成份的权重多少作合适的  $K$  截断以及组态能量截断<sup>[8-10]</sup>.

### 3 对推转 PNC 波函数的角动量投影

若  $P_{MK}^I$  表示投影算符, 对于  $\lambda$  次张量算符  $\hat{T}_{\lambda\mu}$ , 可以证明<sup>[12]</sup>

$$P_{MK}^{I+} \hat{T}_{\lambda\mu} P_{MK}^I = (IM\lambda\mu | I'M') \sum_{\kappa} (I, K' - \kappa, \lambda\mu | I'K') \hat{T}_{\lambda\mu} P_{K'-\kappa, K}^I, \quad (13)$$

其中  $(IM\lambda\mu | I'M')$  等表示 Clebsch-Gordan 系数. 标量算符 Hamilton 量  $H$  可看成是  $\lambda=0$  次张量算符. 将投影算符  $P_{MK}^I$  作用于 PNC 波函数  $|\Psi_\nu\rangle$ , 然后进行线性组合

$$|\Xi_{aIM}\rangle = \sum_{\nu} F_{a\nu I} P_{MK}^I |\Psi_\nu\rangle, \quad (14)$$

使系数  $F_{a\nu I}$  满足归一化条件

$$\begin{aligned} \langle \Xi_{aIM} | \Xi_{aIM} \rangle &= \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} \langle \Psi_{\nu'} | P_{MK}^{I+} P_{MK}^I | \Psi_\nu \rangle F_{a\nu I} = \\ &= \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} \langle \Psi_{\nu'} | P_{KK}^I | \Psi_\nu \rangle F_{a\nu I} \quad \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} N_{\nu\nu}^I F_{a\nu I} = 1, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} N_{\nu\nu}^I &\equiv \langle \Psi_{\nu'} | P_{KK}^I | \Psi_\nu \rangle = \\ &= \left( I + \frac{1}{2} \right) \sum_{\sigma\sigma'} \omega_{\nu\sigma} \omega_{\nu\sigma'} \int_0^\pi \langle \Phi_{\sigma'} | e^{i\theta j_y} | \Phi_\sigma \rangle d_{KK}^I(\theta) \sin(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (16)$$

各矩阵元的推导中使用的算符  $J_y = \sum j_y(i)$ ,  $j_y(i)$  为第  $i$  个核子的  $y$  分量,  $d_{KK}^I(\theta)$  为  $d$ -函数. 系数  $F_{a\nu I}$  的获得可参照文献[12-14]的做法, 我们在以后对实际核的具体计算中将详细讨论它. 这样, 具有确定角动量  $I$  的核态能量应表达为

$$\begin{aligned} E_{aI} &= \langle \Xi_{aIM} | H | \Xi_{aIM} \rangle = \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} \langle \Psi_{\nu'} | P_{MK}^{I+} H P_{MK}^I | \Psi_\nu \rangle F_{a\nu I} = \\ &= \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} \langle \Psi_{\nu'} | H P_{KK}^I | \Psi_\nu \rangle F_{a\nu I} = \sum_{\nu\nu'} F_{a\nu' I} H_{\nu\nu}^I F_{a\nu I}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} H_{\nu\nu}^I &\equiv \langle \Psi_{\nu'} | H P_{KK}^I | \Psi_\nu \rangle = \\ &= \left( I + \frac{1}{2} \right) \sum_{\sigma\sigma'} \omega_{\nu\sigma} \omega_{\nu\sigma'} \int_0^\pi \langle \Phi_{\sigma'} | H e^{-i\theta j_y} | \Phi_\sigma \rangle d_{KK}^I(\theta) \sin(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

对于  $\lambda$  次张量算符  $\hat{T}_{\lambda\mu}$ , 矩阵元

$$\langle \Xi_{aIM} | \hat{T}_{\lambda\mu} | \Xi_{aIM} \rangle = (IM\lambda\mu | I'M') \langle \Xi_{aIM} | \hat{T}_\lambda | \Xi_{aIM} \rangle =$$

$$(IM\lambda\mu | I'M') \sum_{\kappa\nu} F_{\sigma\nu} F_{\nu\sigma} (I, K' - \kappa, \lambda\mu | I'K') \sum_{\sigma\sigma'} w_{\nu\sigma'} w_{\nu\sigma} \langle \Phi_{\sigma'} | \hat{T}_{\lambda\mu} \hat{P}_{K'-\kappa, K}^I | \Phi_{\sigma} \rangle. \quad (19)$$

为了书写方便,令

$$\hat{R}_y \equiv e^{-i\theta\hat{y}} = e^{-i\theta \sum_{i=1}^A \hat{y}_y^{(i)}} = \prod_{i=1}^A \hat{r}_y(i), \hat{r}_y(i) \equiv e^{-i\theta\hat{y}_y^{(i)}}, \quad (20)$$

则式(16)和(18)中的矩阵元可分别写为

$$N_{\sigma\sigma}(\theta) \equiv \langle \Phi_{\sigma'} | \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle, \quad H_{\sigma\sigma}(\theta) \equiv \langle \Phi_{\sigma'} | H \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle.$$

首先计算  $N_{\sigma\sigma}(\theta)$ . 由式(3), 矩阵元

$$N_{\sigma\sigma}(\theta) \equiv \langle \Phi_{\sigma'} | \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle = \frac{1}{A!} \langle \tilde{\Phi}_{\sigma'} | \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle = \frac{1}{A!} \sum_{\mathcal{r}} \delta_{\mathcal{r}} \left[ \sum_{\mathcal{r}} \delta_{\mathcal{r}} \int \varphi_1^+(1) \hat{r}_y(1) \varphi_1(1) d\mathbf{r}_1 \int \varphi_2^+(2) \hat{r}_y(2) \varphi_2(2) d\mathbf{r}_2 \cdots \times \int \varphi_A^+(A) \hat{r}_y(A) \varphi_A(A) d\mathbf{r}_A \right], \quad (22)$$

其中  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A$  是粒子  $1, 2, \dots, A$  的位矢. 由行列式的定义, 式(22)中  $[\dots]$  内的部分是一个以  $\int \varphi_s^+(i) \hat{r}_y(i) \varphi_s(i) d\mathbf{r}_i$  为元的  $A$  阶行列式. 利用关系

$$\int \varphi_s^+(i) \hat{r}_y(i) \varphi_s(i) d\mathbf{r}_i = \int \varphi_s^+(s') \hat{r}_y(s') \varphi_s(s') d\mathbf{r}_{s'} \quad (23)$$

及行列式的性质, 不难看出,  $\sum_{\mathcal{r}} \delta_{\mathcal{r}} [\dots]$  实际上是对态标号数列  $1, 2, \dots, s, \dots, A$  的全排列 (即  $A!$ ) 个相等的行列式求和, 所以

$$N_{\sigma\sigma}(\theta) = \sum_{\mathcal{r}} \delta_{\mathcal{r}} \int \varphi_1^+(1) \hat{r}_y(1) \varphi_1(1) d\mathbf{r}_1 \int \varphi_2^+(2) \hat{r}_y(2) \varphi_2(2) d\mathbf{r}_2 \cdots \times \int \varphi_A^+(A) \hat{r}_y(A) \varphi_A(A) d\mathbf{r}_A, \quad (24)$$

简记为

$$N_{\sigma\sigma}(\theta) \equiv D_A(a_{\sigma\sigma}),$$

其中

$$a_{\sigma\sigma} = \langle \varphi_s(i) | \hat{r}_y(i) | \varphi_s(i) \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\tau\tau'} \sum_{\eta\Omega} \sum_{\eta\Omega'} S_{s', \eta\Omega\tau\sigma'} S_{s, \eta\Omega\tau} \sum_j C_{\eta', \Omega\tau'} C_{\eta, \Omega\tau} [(1 + f_{\eta\Omega\sigma'} f_{\eta\Omega}) d_{\Omega\Omega}^j(\theta) + (-1)^{\nu-\Omega} (f_{\eta\Omega\sigma} - f_{\eta\Omega\sigma'}) d_{\Omega, -\Omega}^j(\theta)]. \quad (26)$$

式(26)的推导用到了  $d$  函数的定义及性质, 其中  $\delta_{\tau\tau'}$  为 Kronecker  $\delta$  符号, 因此  $A$  阶行列式  $D_A(a_{\sigma\sigma})$  是块对角的.

现在计算  $H_{\sigma\sigma}(\theta)$ . 由式(2)和式(3), 矩阵元

$$H_{\sigma\sigma}(\theta) \equiv \langle \Phi_{\sigma'} | H \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^A \langle \Phi_{\sigma'} | h_0(i) \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle + \sum_{i>i'=1}^A \langle \Phi_{\sigma'} | \nu(i, i') \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle = A \langle \Phi_{\sigma'} | h_0(1) \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle + \frac{A(A-1)}{2} \langle \Phi_{\sigma'} | \nu(1, 2) \hat{R}_y | \Phi_{\sigma} \rangle. \quad (27)$$

经过冗长的数学推导,我们获得式(27)中的两项:

$$\begin{aligned}
 H_{0A}(\theta) &\equiv A \langle \Phi_\sigma | h_0(1) \hat{R}_y | \Phi_\sigma \rangle = \\
 &\frac{1}{2} \sum_{s,s'-1}^A (-1)^{s'+s} D_{A-1}^{s',s}(a_{\sigma\sigma}) \sum_{\eta\Omega} \sum_{\eta'\Omega'} S_{s',\eta'\Omega'} S_{s,\eta\Omega} \sum_{j,j'} C_{\eta',j'\Omega'} C_{\eta,j\Omega} \times \\
 &\sum_{\Omega_0} [\langle \phi_{j_1\Omega_0} | h_0 | \phi_{j_1\Omega_0} \rangle + (-1)^{j'-\Omega} f_{\eta'\Omega'} \langle \phi_{j_1,-\Omega'} | h_0 | \phi_{j_1\Omega_0} \rangle] \times \\
 &[d_{\Omega_0\Omega}^j(\theta) + (-1)^{j-\Omega} f_{\eta\Omega} d_{\Omega_0,-\Omega}^j(\theta)], \quad (28) \\
 V_A(\theta) &\equiv \frac{A(A-1)}{2} \langle \Phi_\sigma | \nu(1,2) \hat{R}_y | \Phi_\sigma \rangle = \\
 &\sum_{t>s-1}^A \sum_{k>s-1}^A (-1)^{s'+t+s+t} D_{A-2}^{s',s}(a_{\sigma\sigma}) \sum_{\eta_1\Omega_1} \sum_{\eta_2\Omega_2} \sum_{\eta_1'\Omega_1'} \sum_{\eta_2'\Omega_2'} S_{s',\eta_1'\Omega_1'} S_{t',\eta_2'\Omega_2'} S_{s,\eta_1\Omega_1} S_{t,\eta_2\Omega_2} \\
 &\sum_{j_1j_2j_1'j_2'} C_{\eta_1',j_1'\Omega_1'} C_{\eta_2',j_2'\Omega_2'} C_{\eta_1,j_1\Omega_1} C_{\eta_2,j_2\Omega_2} \sum_{\Omega_{01}\Omega_{02}} [\langle \overline{\phi_{j_1\Omega_1} \phi_{j_2\Omega_2}} | \nu(1,2) | \phi_{j_1\Omega_{01}} \phi_{j_1\Omega_{02}} \rangle + \\
 &(-1)^{j_2-\Omega_2} f_{\eta_2'\Omega_2'} \langle \overline{\phi_{j_1\Omega_1} \phi_{j_2,-\Omega_2}} | \nu(1,2) | \phi_{j_1\Omega_{01}} \phi_{j_1\Omega_{02}} \rangle + \\
 &(-1)^{j_1-\Omega_1} f_{\eta_1'\Omega_1'} \langle \overline{\phi_{j_1,-\Omega_1} \phi_{j_2\Omega_2}} | \nu(1,2) | \phi_{j_1\Omega_{01}} \phi_{j_1\Omega_{02}} \rangle + \\
 &(-1)^{j_1-\Omega_1+j_2-\Omega_2} f_{\eta_1'\Omega_1'} f_{\eta_2'\Omega_2'} \langle \overline{\phi_{j_1,-\Omega_1} \phi_{j_2,-\Omega_2}} | \nu(1,2) | \phi_{j_1\Omega_{01}} \phi_{j_1\Omega_{02}} \rangle] \times \\
 &[d_{\Omega_{01}\Omega_1}^{j_1}(\theta) d_{\Omega_{02}\Omega_2}^{j_2}(\theta) + (-1)^{j_2-\Omega_2} f_{\eta_2'\Omega_2'} d_{\Omega_{01}\Omega_1}^{j_1}(\theta) d_{\Omega_{02},-\Omega_2}^{j_2}(\theta) + \\
 &(-1)^{j_1-\Omega_1} f_{\eta_1'\Omega_1'} d_{\Omega_{01},-\Omega_1}^{j_1}(\theta) d_{\Omega_{02}\Omega_2}^{j_2}(\theta) + \\
 &(-1)^{j_1-\Omega_1+j_2-\Omega_2} f_{\eta_1'\Omega_1'} f_{\eta_2'\Omega_2'} d_{\Omega_{01},-\Omega_1}^{j_1}(\theta) d_{\Omega_{02},-\Omega_2}^{j_2}(\theta)]. \quad (29)
 \end{aligned}$$

式(28)中的  $D_{A-1}^{s',s}(a_{\sigma\sigma})$  表示  $A$  阶行列式  $D_A(a_{\sigma\sigma})$  去掉第  $s'$  行第  $s$  列后的  $A-1$  阶行列式; 式(29)中的  $D_{A-2}^{s',s}(a_{\sigma\sigma})$  表示  $A$  阶行列式  $D_A(a_{\sigma\sigma})$  去掉第  $s'$  行  $t'$  行第  $s$  列  $t$  列后的  $A-2$

阶行列式. 对于反对称化两体相互作用矩阵元  $\langle \overline{\phi_{j_1\Omega_1} \phi_{j_2\Omega_2}} | \nu(1,2) | \phi_{j_1\Omega_1} \phi_{j_1\Omega_2} \rangle$ , 可以先在非耦合表象中展开然后进行计算<sup>[15]</sup>. 如果  $\nu(1,2)$  是对相互作用, 那么二粒子态之间的反对称化两体相互作用矩阵元可直接利用附录的式(A.5)计算.

为了获得原子核的各种电磁性质, 还需计算式(19)中的矩阵元  $\langle \Phi_\sigma | \hat{T}_{\lambda\mu} \hat{P}_{K'-K, K}^j | \Phi_\sigma \rangle$ . 这可根据张量算符  $\hat{T}_{\lambda\mu}$  的具体形式(例如, 电、磁矩算符和电、磁多极算符等均为单体不可约球张量算符)作与式(28)完全类似的推导.

## 4 总结

将角动量投影技术应用于推转 PNC 波函数, 能够得到原子核的能谱以及电磁性质的

基本计算公式. 我们认为实施这一方案是可行的. 对于不同区域的原子核, 选取一套合适的单粒子态和两体相互作用, 使用本文所论述的理论公式进行计算机编程, 即可计算实际原子核的能谱及电磁性质, 尤其是用于研究较高自旋态的性质随推转频率  $\omega$  的变化情况. 该项工作我们正在准备之中.

作者对廖继志教授的热心指导以及曾谨言教授、吴崇试教授的鼓励和帮助深表感谢. 作者也非常感谢雷奕安博士在本工作开始时所给予的帮助.

### 参考文献 (References)

- 1 Bardeen J, Cooper L, Schrieffer J. Phys. Rev., 1957, **108**:1175—1204
- 2 Yang LiMing, ZENG JinYan. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1964, **20**:846—862; ZENG JinYan, CHEN JianHua, WEI HaiGuan. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1965, **21**: 267—316; WU ChongShi, ZENG JinYan. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1965, **21**:915—951  
(杨立铭, 曾谨言. 物理学报, 1964, **20**:846—862; 曾谨言, 陈建华, 魏海官. 物理学报, 1965, **21**:267—316; 吴崇试, 曾谨言. 物理学报, 1965, **21**:915—951)
- 3 CHENG TanSheng, ZENG JinYan. Physica (in Chinese), 1973, **2**:57—74; CHENG TanSheng, ZENG JinYan. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1977, **26**:243—249  
(程檀生, 曾谨言. 物理, 1973, **2**:57—74; 程檀生, 曾谨言. 物理学报, 1977, **26**:243—249)
- 4 ZENG JinYan. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1978, **2**:428—440; 1979, **3**:102—107  
(曾谨言. 高能物理与核物理, 1978, **2**:428—440; 1979, **3**:102—107)
- 5 ZENG J Y, CHENG T S. Nucl. Phys., 1983, **A405**:1—28; ZENG J Y, CHENG T S, CHENG L et al. Nucl. Phys., 1983, **A411**:49—64; Nucl. Phys., 1984, **A414**:253—268
- 6 CHENG T S, WU C S, ZENG J Y. Chin. Phys. Lett., 1986, **3**:125—128; WU C S, ZENG J Y. Chin. Phys. Lett., 1986, **3**:149—152
- 7 WU ChongShi, ZENG JinYan. High Energy Phys. Nucl. Phys. (in Chinese), 1988, **12**:95—101  
(吴崇试, 曾谨言. 高能物理与核物理, 1988, **12**:95—101)
- 8 WU C S, ZENG J Y. Phys. Rev., 1989, **C40**:998—1005; Phys. Rev., 1990, **C41**:1822—1830; Phys. Rev. Lett., 1991, **66**:1022—1025
- 9 ZENG J Y, LEI Y A, JIN T H et al. Phys. Rev., 1994, **C50**:746—756
- 10 ZENG J Y, JIN T H, ZHAO Z J. Phys. Rev., 1994, **C50**:1388—1397
- 11 HAN Y, LIAO J Z. Submitted to Science in China (Series A), 1999
- 12 Hara K, SUN Y. Int. J. Mod. Phys., 1995, **E4**:637—785
- 13 Parikh J K. Phys. Rev., 1974, **C10**:2568—2576
- 14 Dhar A K, Kulkarni D R, Bhatt K H. Nucl. Phys., 1975, **A238**:340—364
- 15 HAN Yong. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, **22**:1020—1028  
(韩勇. 高能物理与核物理, 1998, **22**:1020—1028)
- 16 Brussaard P J, Glaudemans P W M. Shell-model Applications in Nuclear Spectroscopy. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing Company, 1977. 280—283

### 附录

若两体算符  $\hat{O}$  的二次量子化形式为<sup>16)</sup>

$$\hat{O} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | o | \tilde{\gamma}\tilde{\delta} \rangle a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\delta}, \quad (\text{A.1})$$

可以证明关系式

$$\langle \alpha\beta | o | \tilde{\gamma}\tilde{\delta} \rangle = \langle \alpha\beta | \hat{O} | \tilde{\gamma}\tilde{\delta} \rangle \quad (\text{A.2})$$

成立.

对相互作用(两体算符)为

$$\hat{O} = V_p = -\frac{1}{4}G \sum_{j,m} (-1)^{j-m} (-1)^{j-m} a_{j,m}^+ a_{j-m}^+ a_{j-m} a_{j,m}, \quad (\text{A.3})$$

其中  $G$  为对平均相互作用强度. 二粒子 Slater 行列式态

$$a_{j,m}^+ a_{j-m}^+ |0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} |jm, j-m\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} |\phi_{jm}(1)\phi_{j-m}(2)\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_{jm}(1) & \phi_{j-m}(2) \\ \phi_{j-m}(1) & \phi_{jm}(2) \end{vmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

利用式(A.1)–(A.4)以及 Wick 定理, 二粒子态之间的反对称化两体对相互作用矩阵元可表达为

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} o(1,2) a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ |0\rangle &= \langle 0 | a_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} \nu(1,2) a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ |0\rangle = \\ &= \langle 0 | a_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} V_p a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ |0\rangle = \\ &= -\frac{1}{4}G \sum_{j,m} (-1)^{j-m} (-1)^{j-m} \langle 0 | a_{j_2 m_2} a_{j_1 m_1} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ a_{j-m} a_{j+m} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ |0\rangle = \\ &= -\frac{1}{4}G \sum_{j,m} (-1)^{j-m} (-1)^{j-m} [\delta_{j_2 j} \delta_{m_2 m} \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 -m} \delta_{j_1} \delta_{-m m_1} \delta_{j_2} \delta_{m m_2} - \\ &= \delta_{j_2 j} \delta_{m_2 m} \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 -m} \delta_{j_2} \delta_{-m m_2} \delta_{j_1} \delta_{m m_1} + \delta_{j_2 j} \delta_{m_2 -m} \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 m} \delta_{j_2} \delta_{-m m_2} \delta_{j_1} \delta_{m m_1} - \\ &= \delta_{j_2 j} \delta_{m_2 -m} \delta_{j_1 j} \delta_{m_1 m} \delta_{j_1} \delta_{-m m_1} \delta_{j_2} \delta_{m m_2}] = -(-1)^{j_1 - m_1} (-1)^{j_1 - m_1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 - m_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} G. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

## Angular Momentum Projection of Cranked PNC Wave Function

HAN Yong

(Department of Physics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract** In studying the properties of nuclear higher-spin states, not only is the  $K$ -mixture needed to be taken into account, but also the Coriolis interaction (the cranking term) should be introduced. The cranking term breaks the time reversal symmetry, and the projection of the single-particle angular momentum on the intrinsic symmetric axis is no longer a good quantum number. This makes the theoretical calculation somewhat complicated. However, considering some intrinsic symmetry in a nucleus, it is not very difficult to apply the angular momentum projection technique to the PNC wave functions including the cranking components (the cranked PNC wave functions). In this paper the fundamental expressions for calculating the nuclear energy spectra and the electromagnetic properties are deduced and evaluated in theory, consequently the feasibility of actualizing the present scheme is made clear.

**Key words** cranked PNC wave function, cranking frequency, angular momentum projection, pairing interaction