

# 共振、混沌与束晕形成\*

陈银宝 黄志斌

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

**摘要** 研究强流束中的非线性共振、混沌与束晕形成的关系. 给出强流束中非线性共振范围的表达式及其随束流空间电荷效应变化的数值结果和图表曲线, 提出由非线性共振而激发的束晕形成的空间电荷效应极限, 并分析束晕形成的过程.

**关键词** 强流束 非线性共振 混沌 束晕

## 1 引言

高功率强流加速器被建议用于高能物理和核物理基础研究以及许多新的应用领域, 诸如用于核废料嬗变、生产氙、重离子聚变、散裂中子源、高功率微波源、高功率自由电子激光等. 实验研究和理论模拟研究都已发现, 在这类强流加速器的低能传输段, 束流会产生一个半径比束核大得多的低密度晕圈, 如果用准直器在某处将束晕刮除, 在经过不长的距离后, 束晕会再生并继续发展. 这些围绕于束核的束晕粒子, 是导致束流发射度的急剧增长, 引起束流损失的主要因素. 为了尽量减少束流在器壁上的损失, 避免产生超标的放射性剂量对加速器人工维修带来的困难, 强流束的束晕问题已引起了加速器工作者的广泛关注和极大兴趣. 搞清束晕形成的机理, 有效地控制束晕的产生和发展, 是研制下一代高功率强流加速器所必须解决的关键问题.

从对束晕形成机理的研究报道中<sup>[1-10]</sup>, 目前已得到一些共识: 对于空间电荷占主导地位的束流, 在均匀聚焦的传输管道里, 初始束流的 root-mean-square (rms) 失配, 是束晕形成的一个重要原因; 在周期性聚焦的传输系统中, rms 匹配束的电荷密度涨落, 也会引起束晕; 混沌粒子运动和发生在束核粒子所占有的相空间边界附近的非线性共振, 更是匹配束产生束晕的重要机制. 不变的 KAM (Kolomogorov-Arnold-Morse) 表面在约束与传播方向垂直的方向上的束晕粒子起重要作用. rms 匹配束的束晕比起失配束来相对要微弱些. 通过对计入束流横向( $r$ )和纵向( $z$ )耦合效应的研究, 发现两个方向的耦合效应对束晕形成有明显的影响. 即使对于非常小的失配, 也会引起束晕, 特别是对于短束团, 横向

1999-04-09 收稿

\* 国家自然科学基金和核工业基金资助

和纵向耦合效应更明显.

本文从束核-单粒子模型出发,通过对强流束中的非线性共振的分析,给出了强流束中非线性共振范围的表达式及其随束流空间电荷效应变化的数值结果和图表曲线;提出了由非线性共振而激发的束晕形成的空间电荷效应极限;分析了非线性共振-混沌-束晕形成的过程;最后给出了避免非线性共振的束流强度的计算实例.

## 2 束核包络振荡与单粒子运动

对束晕形成机理的研究中,普遍采用所谓的束核-单粒子模型,也即将束流分为束核和试验粒子两部分,首先研究束核包络在聚焦管道里的演变规律,然后再分析注入束核附近的试验粒子的行为.该模型中,束核的空间电荷效应为单粒子运动提供微扰力,并假设单粒子的微扰运动不对束核运动产生影响.

束核运动满足 K-V 包络方程<sup>[1]</sup>

$$R'' + k_0^2 R - \frac{K}{R} - \frac{\epsilon^2}{R^3} = 0, \quad (1)$$

其中  $\epsilon$  为束流发射度,这里假设  $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y$ ,  $K$  为束流的广义导流系数,与电流  $I$  的关系为:  $K = 2I/I_0(\beta\gamma)^3$ ,  $I_0$  为特征电流,  $\beta, \gamma$  为相对论因子,  $k_0$  表示外聚焦力.在硬边近似下,对于连续均匀聚焦的螺线管磁场有

$$k_0^2 = \left( \frac{qB_z}{2m_0 c \beta \gamma} \right)^2, \quad (2)$$

其中  $B_z$  为螺线管轴上的磁场强度;对于周期性聚焦的 FODO 管道有

$$k_0^2 = \pm \left( \frac{qB_0}{m_0 c \beta \gamma a} \right)^2,$$

其中  $B_0$  为四极透镜极头上的磁场,  $a$  为四极透镜的孔径,正负号分别对应于聚焦和散焦.在周期性聚焦系统中,  $k_0$  又称为无空间电荷效应的波数,其与每周期相移  $\sigma_0$  的关系为  $k_0 = \sigma_0/S$ ,  $S$  为一个聚焦周期长度.

在匹配束中,  $R = \bar{R} = \text{const}$ , 方程(1)变为

$$k_0^2 \bar{R} - \frac{K}{\bar{R}} - \frac{\epsilon^2}{\bar{R}^3} = 0. \quad (4)$$

若引入与空间电荷有关的波数和每周期的相移  $k$  和  $\sigma$ , 则有

$$k^2 = \frac{\sigma^2}{S^2} = k_0^2 - \frac{K}{\bar{R}^2} = \frac{\sigma_0^2}{S^2} - \frac{K}{\bar{R}^2}. \quad (5)$$

当束流失配不大时,设束流包络与  $\bar{R}$  的偏离

$$R(z) = \bar{R} + r(z). \quad (6)$$

将方程(6)代入方程(1),在光滑近似下,利用关系式(4)和(5),可得描写两个耦合谐振子行为的联立方程,并从中解得振荡的两个本征模,分别称为偶数模和奇数模,其相应的波数和相移分别为

$$k_e = \sqrt{2(k_0^2 + k^2)}, \quad \sigma_e = \sqrt{2(\sigma_0^2 + \sigma^2)}; \quad (7)$$

$$k_o = \sqrt{k_0^2 + 3k^2}, \quad \sigma_o = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\sigma^2} \quad (8)$$

两式中的脚标 e 和 o 分别表示偶数本征模和奇数本征模, 包络的任何其他振荡都可表示成这两个基模的叠加.

在束核附近运动的单粒子满足方程

$$r'' + k_0^2 r - \frac{K}{R^2} r = 0 \quad (r < R), \quad (9)$$

$$r'' + k_0^2 r - \frac{K}{r} = 0 \quad (r > R). \quad (10)$$

显然, 束核外单粒子的运动方程(10)与束核包络方程一样, 而束核内单粒子的运动方程(9)是 Hill 方程. 对方程(1)、(9)和(10)进行数值模拟计算, 就可知道束核包络的振荡行为和试验粒子的运动轨迹.

### 3 空间电荷引起非线性共振

单粒子与一个振荡束核的相互作用可引起共振. 若定义谱衰减  $\eta$  为

$$\eta = \frac{k}{k_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (11)$$

表示空间电荷效应的强弱, 并引入谱散度  $\nu$

$$\nu = \frac{k}{k_c} = \frac{\omega_p}{\omega_c} \quad (12)$$

式中  $k_c$  和  $\omega_c$  表示束核振荡的波数和频率,  $\omega_p$  表示粒子振荡的频率. 对于束核包络振荡的偶数模, 由式(7)得

$$k_c = k_e = \sqrt{2(k_0^2 + k^2)} = \sqrt{2(1 + \eta^2)} k_0. \quad (13)$$

于是,

$$\frac{k}{k_c} = \frac{\eta}{\sqrt{2(1 + \eta^2)}} \equiv \nu_e. \quad (14)$$

当  $k = k_0$  时变为

$$\frac{k}{k_c} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \eta^2)}} \equiv \nu_{e,\infty}. \quad (15)$$

而对于包络振荡的奇数模, 从式(8)得

$$k_c = k_o = \sqrt{1 + 3\eta^2} k_0. \quad (16)$$

于是,

$$\frac{k}{k_o} = \frac{\eta}{\sqrt{1 + 3\eta^2}} \equiv \nu_o. \quad (17)$$

当  $k = k_0$  时, 有

$$\frac{k}{k_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\eta^2}} \equiv \nu_{o,\infty}. \quad (18)$$

因此, 当束流失配时, 包络振荡的两个本征频率激发的共振范围分别可表示为对于束核

包络振荡的偶数模，

$$\frac{\eta}{\sqrt{2(1+\eta^2)}} \leq \nu_e < \frac{1}{\sqrt{2(1+\eta^2)}} \tag{19}$$

对于束核包络振荡的奇数模，

$$\frac{\eta}{\sqrt{1+3\eta^2}} \leq \nu_o < \frac{1}{\sqrt{1+3\eta^2}}$$

由此可见，试验粒子在束核附近的非线性共振仅仅依赖于表示空间电荷效应强弱的谐衰减  $\eta$ 。或者说，是空间电荷效应引起了束核附近的非线性共振。对表达式(19)和(20)进行数值计算，结果如图 1 所示。图中的 4 条曲线分别表示束核包络振荡的两个本征模随谐衰减  $\eta$  的变化情况。因此，图 1 也显示了共振区范围随谐衰减  $\eta$  的变化关系。

由式(19)和(20)，以及图 1 可见，整个共振区的范围是由偶数模共振范围的下边界和奇数模共振范围的上边界构成的。并且，从偶数模共振范围的下边界可得

$$\eta \leq \sqrt{\frac{2\nu_e^2}{1-2\nu_e^2}}$$

从奇数模共振范围的上边界可得

$$\eta \leq \sqrt{\frac{1-\nu_o^2}{3\nu_o^2}}$$

利用不等式(21)和(22)，可计算出相应的偶数模共振和奇数模共振的起始  $\eta$ 。例如，当出现 2/3 的偶数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.6455$ ；当出现 1/3 的奇数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.5345$ ；当出现 1/4 的奇数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.3780$ ；当出现 1/5 的奇数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.2949$ ；当出现 1/6 的奇数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.2425$ ；当出现 1/10 的奇数模共振时，计算出  $\eta \leq 0.1429$  等。由此可以求出整个共振区范围的起始  $\eta$ 。

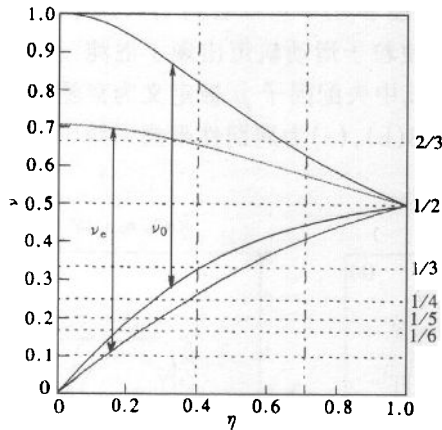


图 1 共振区范围随谐衰减  $\eta$  的变化

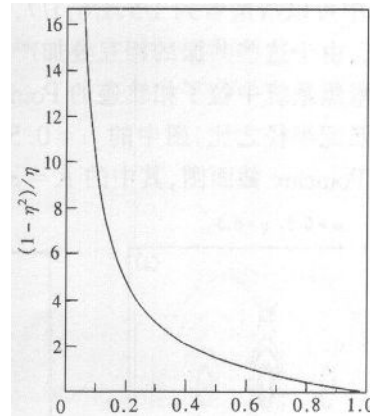


图 2  $(1-\eta^2)/\eta$  随  $\eta$  的变化

因为有空间电荷和无空间电荷的相移有关系<sup>[11]</sup>

$$\sigma = (\sqrt{1+u^2} - u) \sigma_0,$$

其中,  $u = KS/2\epsilon\sigma_0$ . 于是, 根据电流  $I$  与束流广义导流系数的关系  $K = 2I/I_0(\beta\gamma)^3$ , 利用式(11)和(23)不难推得

$$I = \frac{\epsilon\sigma_0}{S} \frac{I_0}{2} (\beta\gamma)^3 \frac{1-\eta^2}{\eta}. \quad (24)$$

式(24)表明束流强度  $I$  与谐衰减  $\eta$  的关系. 图2给出了  $(1-\eta^2)/\eta$  随  $\eta$  的变化关系, 即在同样条件下, 束流强度  $I$  与谐衰减  $\eta$  的变化关系.

#### 4 非线性共振引起混沌

从图1可以明显看出, 当谐衰减  $\eta \leq 0.1$  时, 束核包络振荡的两个本征模(偶数模和奇数模)可能激起  $2/3, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/10$  等共振; 当谐衰减  $\eta \leq 0.3$  时, 可能激起  $2/3, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$  等共振; 当谐衰减  $\eta \geq 0.4$  时, 其中的  $1/4, 1/5$  等强共振可以避免; 当谐衰减  $\eta \geq 0.7$  时, 可以避免  $2/3, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/10$  等共振. 因为我们知道<sup>[11]</sup>,  $\eta = k/k_0 = \sqrt{0.5}$  可以作为强流束的一个判据, 也即当  $\eta \geq 0.7$  时, 由空间电荷控制的束流转变成由发射度控制的束流, 其包络的等离子体振荡也变为 betatron 振荡的状态, 因而也就避免了上述的这些共振. 但是, 无论谐衰减  $\eta$  为何值, 在  $0 < \eta < 1$  范围内, 即使对于一个均匀聚焦管道,  $\nu_c = 1/2$  和  $\nu_s = 1/2$  的共振始终存在, 也就是说, 半整数共振是无法避免的.

当谐衰减  $\eta \leq 0.7$  时, 在某些初始条件下, 可能激发起各种共振的同时出现, 这些共振的相互叠加产生共振覆盖, 形成混沌区. 在混沌区里, 粒子的运动轨道对初始条件有极敏感的依赖性. 这可以在对方程(1)和(9), (10)的数值模拟计算后, 利用 Poincare 截面法, 得到的粒子运动在相空间的 Poincare 截面图中清楚看到. 例如图3中给出了3种不同初始条件下的粒子相轨迹的 Poincare 截面图. 在图3(a)中可以清楚看到  $1/2$  共振, 在图3(b)中可以清楚看到  $1/5, 1/6, 1/7, 1/9$  等共振, 在图3(c)中可以看到  $1/4, 1/6, 1/7$  等共振, 并且, 由于这些共振的相互叠加产生共振覆盖, 使粒子运动轨道出现了混沌. 图3(a)为均匀聚焦系统中粒子相轨迹的 Poincare 截面图, 其中失配因子  $\mu$  被定义为束流的初始半径与匹配半径之比, 图中的  $\mu = 0.5, \eta = 0.5$ ; 图3(b), (c)为周期性聚焦系统中粒子相轨迹的 Poincare 截面图, 其中的  $\hat{K} = \sigma_0^2(1-\eta^2)/\eta$ .

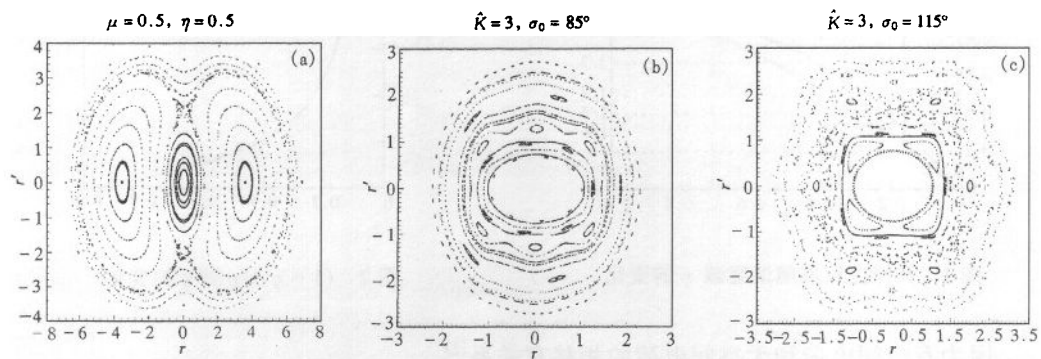


图3 不同初始条件下粒子相轨迹的 Poincare 截面图

## 5 混沌导致束晕

至此,可以把束晕的形成归结为如下的过程:由于束核的包络振荡与束核附近单粒子运动之间的非相干作用,有可能激发起不同阶的非线性共振.在某些初始条件下,这些非线性共振的相互叠加产生共振覆盖,形成混沌区.在混沌区里运动的粒子,其运动轨迹强烈的依赖于运动的初始条件,因而单粒子运动轨迹出现随机性,并最终导致了粒子相运动的混沌与束晕的形成.

## 6 避免非线性共振的束流强度

从前面知道,整个共振区的范围是由偶数模共振范围的下边界和奇数模共振范围的上边界构成的.并且,根据不等式(21)和(22)可计算出的偶数模共振和奇数模共振的起始 $\eta$ ,从而可以求出整个共振区范围的起始 $\eta$ .式(24)则告诉我们,若已知整个共振区范围的起始 $\eta$ ,就可计算相应的束流强度.也可求出整个共振区范围相应的空间电荷极限.例如,假设质子束能量为40MeV,  $\sigma_0 = \pi/2$ ,  $S = 0.4\text{m}$ ,  $\epsilon = 10^{-7}\text{m}$ ,而最先出现的2/3的偶数模共振的起始 $\eta = 0.6455$ ,由式(24)即可算得相应的束流强度为 $I = 128.208\text{mA}$ .鉴于 $\nu_e = 1/2$ 和 $\nu_o = 1/2$ 的共振是无法避免的.所以,如果把束流强度设计在128mA以下,从图1可见,也就避免了2/3,1/3,1/4,1/5,1/6,1/10等共振.由此可以认为128mA是能量为40MeV,  $\sigma_0 = \pi/2$ ,  $S = 0.4\text{m}$ ,  $\epsilon = 10^{-7}\text{m}$ 的质子束,避免非线性共振的最大束流强度.

### 参考文献(References)

- 1 Jameson R A. LA-UR-93-1209. Los Alamos National Laboratory Report, 1993
- 2 Gluckstern R L. Phys. Rev. Lett., 1994, 73(9):1247—1250
- 3 Lagniel J M. Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., 1994, A345(3):405—410
- 4 Okamoto H, Ikegami M. Phys. Rev. E., 1997, 55(4):4694—4705
- 5 Fink Y, CHEN C, Marable W P. Phys Rev. E., 1997, 55(6):7557—7564
- 6 Fedotov A V, Gluckstern R L, Kurennoy S S et al. In: Proc. of XIX Int. Linear Accel. Conf., Chicago, 1998
- 7 Lagniel J M, Nath S. In: Proc. of Sixth European Particle Accel. Conf., Stockholm, Sweden, 1998
- 8 Ikegami M. Phys. Rev. E., 1999, 59(2):2330—2338
- 9 Olsen D. Beam Dynamics Newsletter. In: Hirata K, Jowett J M, Lee S Y ed. 1998. (18):17
- 10 HUANG ZhiBin, CHEN YinBao. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1998, 22(10):943—950  
(黄志斌,陈银宝.高能物理与核物理,1998,22(10):943—950)
- 11 Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. New York: John Wiley & Sons Inc., 1994. 241—243, 226—228

## Resonance, Chaos and Halo Formation in Space Charge Dominated Beams

CHEN YinBao HUANG ZhiBin

(*China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China*)

**Abstract** The nonlinear resonance, chaos and halo formation in space charge dominated beams have been studied. The results for the range of the nonlinear resonance versus space charge effects, and the space charge thresholds of halo formation excited by nonlinear resonance are derived. Some numerical results are also given.

**Key words** space charge dominated beam, nonlinear resonance, chaos, halo formation

---

Received 9 April 1999

\* Supported by National Natural Science Foundation of China and Science Fundation of Chinese Nuclear Industry