

# 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场胶球波函数的六阶近似\*

惠 萍

(广东教育学院物理系 广州 510303)

**摘要** 改进了耦合集团展开方法,计算六阶 2+1 维  $SU(2)$  格点规范场的胶球波函数的  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  及相关参数  $\zeta$ . 在计算中,采用空心图作为试探波函数,计算结果在弱耦合区都表现出良好的标度行为.

**关键词** 格点规范理论 胶球波函数 耦合集团方法

## 1 引言

目前最成功的非微扰方法是格点规范理论(LGT),LGT已成为人们研究规范场非微扰效应的一种重要方法. 1980年 J. P. GREENSITE<sup>[1]</sup>导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程,但此方程无法严格求解,于是人们引入了各种近似方法. 1993年 SMITH<sup>[2]</sup>等人提出了一种截断近似方法,但计算出的 2+1 维  $SU(2)$  群的胶球质量没有好的标度性. 1994年文献[3,4]在耦合集团展开方法的基础上发展了一种新非微扰方法,即保持连续极限截断本征值方程的方法. 用这种方法已计算出了 2+1 维  $SU(2)$  LGT 的二阶至五阶真空波函数、胶球波函数和胶球质量<sup>[3-9]</sup>及 2+1 维  $SU(3)$  LGT 的低阶结果. 其中,三阶和四阶 2+1 维  $SU(2)$  群的真空波函数的  $\mu_0$  和  $\mu_2$ , 胶球质量  $\Delta m/e^2$  及胶球波函数都表现出良好的标度行为,取得了很大的成功. 但二阶和五阶真空波函数及五阶胶球质量都没有表现出好的标度行为. 以上情况说明用这种方法计算 2+1 维  $SU(2)$  LGT 所得到的结果的标度行为是不稳定的. 更高阶的近似计算更加困难,因为计算过程中涉及到的 Wilson 圈图多而复杂,难以辨认,计算量大得惊人. 虽然连接图的方案可以明显改善计算结果,但还没有从根本上解决收敛性问题. 为了克服这些困难,我们改进了这种计算方法,以便进行更高阶计算,并将计算推向弱耦合区,进而将这种方法推广到 2+1 维  $SU(3)$  LGT 和 3+1 维  $SU(3)$  LGT. 我们选择空心图的线性组合做为试探的真空波函数和胶球波函数,并引入 Wilson 圈图平均值,通过解截断的薛定谔本征值方程来确定真空波函数的  $\mu_0$  和  $\mu_2$  及胶球波函数的  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$ , 计算出的三至五阶真空波函数都表现出良好的标度行为.

1999-04-21 收稿

\* 广东省自然科学基金资助

用改进的方法所得到的  $\mu_0$  的五阶结果远比用原来的方法所得到的结果<sup>[7]</sup>好. 本文将给出六阶胶球波函数的计算过程及其计算结果.

## 2 本征值方程、真空波函数和胶球波函数

2+1 维  $SU(2)$  LGT 的 Kogut - Susskind 哈密顿量  $H$ :

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[ \sum_l E_l^2 - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right], \quad (2.1)$$

其中  $a$  是格距,  $E_l | \rangle = 0$ ,  $g$  为无量纲的耦合常数, 它与不变荷  $e$  的关系为  $g^2 = e^2 a$ . 在  $g^2 \rightarrow 0$  的弱耦合区,  $a \rightarrow 0$ .

真空波函数

$$| \Omega \rangle = e^{R(U)} | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

胶球波函数

$$| F \rangle = \left[ F(U) - \frac{\langle \Omega | F | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right] | \Omega \rangle = [F(U) - \langle F \rangle] | \Omega \rangle, \quad (2.3)$$

其中  $R(U)$  和  $F(U)$  是由 Wilson 圈图  $U_l$  组成.  $R(U)$  和  $F(U)$  按照空心图的阶数展开为

$$R(U) = \sum_n R_n, \quad (2.4)$$

$$F(U) = \sum_n F_n. \quad (2.5)$$

计算  $R(U)$  和  $F(U)$  中的每一个图的长波长极限可以得到

$$R(U) = -\frac{\mu_0}{e^2} \int \text{Tr} F^2 d^2 x - \frac{\mu_2}{e^6} \int \text{Tr} (DF)^2 d^2 x + \dots \quad (2.6)$$

$$F(U) = -\frac{\mu_0^F}{e^2} \int \text{Tr} F^2 d^2 x - \frac{\mu_2^F}{e^6} \int \text{Tr} (DF)^2 d^2 x + \dots \quad (2.7)$$

其中  $\mu_0$  和  $\mu_2$  及  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  由  $R(U)$  和  $F(U)$  展开系数来决定.

$H$  的本征值方程

$$H | \Omega \rangle = \epsilon_0 | \Omega \rangle, \quad (2.8)$$

$F(U)$  所满足的本征值方程

$$H | F \rangle = \epsilon_F | F \rangle, \quad (2.9)$$

将(2.1)式和(2.2)式代入(2.8)式得到:

$$\sum_l \{ [E_l, [E_l, R]] + [E_l, R][E_l, R] \} - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \quad (2.10)$$

其中  $w_0$  与真空能量  $\epsilon_0$  的关系为

$$\epsilon_0 = \frac{g^2}{2a} w_0.$$

将(2.3)式代入(2.9)式得到

$$\sum_l \{ [E_l, [E_l, F]] + [E_l, F][E_l, R] \} - \Delta w F = \text{const}, \quad (2.11)$$

把本征值方程(2.10)在  $N$  阶截断( $N=6$ )得到

$$\sum_l \left\{ [E_l, [E_l, \sum_{n=1}^N R_n]] + \sum_{n+n \leq N} [E_l, R_n][E_l, R_n] - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right\} = w_0, \quad (2.12)$$

同理,(2.11)的  $N$  阶截断( $N=6$ )方程为

$$\sum_l \left\{ [E_l, [E_l, \sum_{n=1}^N F_n]] + \sum_{n+n \leq N} [E_l, F_n][E_l, R_n] \right\} - \Delta w \sum_n F_n = \text{const}, \quad (2.13)$$

其中  $\Delta w$  为质量隙. 一至六阶的空心图如图 1 所示.

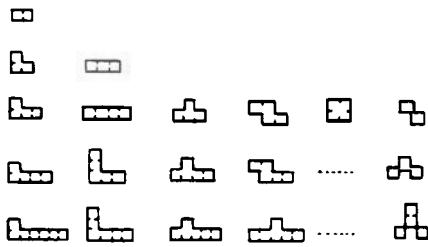


图 1  $R(U)$  和  $F(U)$  的一至六阶空心图

图 1 中的高阶图  $R_{i,j}$  是由方程(2.12)中的  $[E_l, R_i][E_l, R_j]$  项所产生的. 一阶到六阶空心图共 68 个.  $R(U)$  的所有图的系数分别为  $X(1), x(2), x(5), x(6), x(9) \cdots x(14), d1, d2, \cdots d14, m1, m2, \cdots m44$ , 共 68 个. 将  $R(U)$  所有的图代入(2.12)式经推演, 可以得到 68 个独立方程. 在上述计算中, 考虑到大图占据大的空间, 因此大图对波函数贡献较大. 为了保持方程组的封闭性,

我们对计算过程中的双图组态或多图组态中较小的图取平均值, 而保留较大的图. 例如:

$$\begin{aligned} [E, \text{diag}] [E, \text{diag}] &\approx -\frac{1}{2} \text{diag} - \text{diag} - \langle \square \rangle \square + \text{diag} + 4 \langle \square \rangle \text{diag} - 3 \text{diag} \approx \\ &\langle \square \rangle \text{diag} - \frac{1}{2} \text{diag} - \text{diag} - \frac{1}{2} \langle \square \rangle \square + \frac{9}{2} \langle \square \rangle \text{diag} - 3 \text{diag} \end{aligned} \quad (2.14)$$

这种近似处理方法与固体物理中单粒子格林函数的计算方法类似. (2.14)式第二步利用了么模条件

$$\text{Tr} U \text{Tr} V = \text{Tr} U + \text{Tr} UV^+ \quad (2.15)$$

其中  $U$  和  $V$  是任意一群元. 小图的平均值共有 4 个:

$$\langle \square \rangle \quad \langle \text{diag} \rangle \quad \langle \text{diag} \rangle \quad \langle \text{diag} \rangle$$

它们分别用符号  $x(3), x(4), x(7)$  和  $x(8)$  表示. 由 Feynman 定理可得到它们所满足的 4 个方程. 解这 72 个方程所组成的封闭方程组得到  $R(U)$  的 68 个系数及  $x(3), x(4), x(7)$  和  $x(8)$  的值.

$F(U)$  所有图的系数分别为  $z(1), z(2), z(5), z(6), z(9), \cdots z(14), h1, h2, \cdots h14, k1, k2, \cdots k44$ , 共有 68 个. 将  $R(U)$  和  $F(U)$  所有的图代入(2.13)式得到关于  $F(U)$  的展开系数的另 68 个独立方程(其中前 10 个方程见附录, 其余方程略). 再将前面所得到的  $R(U)$  的系数代入这 68 个方程中, 解出  $F(U)$  的 68 个系数和胶球波函数  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$ .

### 3 计算结果

六阶胶球波函数的  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  随  $\beta = 4/g^2$  的变化曲线如图 2 所示. 在  $\beta > 4.8$  时,  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  都表现出良好的标度行为. 图 3 显示真空波函数的相关参数  $\zeta_0 = |\mu_2^F|/\mu_0^F$  和胶球

波函数的相关参数  $\zeta = |\mu_2^F|/\mu_0^F$  在  $\beta > 4.8$  时同样有较好的标度行为, 其结果也十分接近. 以上结果表明这种改进的方法是有效的. 这种方法的优点是它可以用于更高阶图的计算, 更重要的是它可以用来进行 2+1 维 SU(3) LGT 的计算和 3+1 维 SU(3) LGT 的高阶计算, 以便对 LGT 进行更深入的研究. 进一步的工作是将这种方法推广到 2+1 维 SU(3) LGT 的计算.

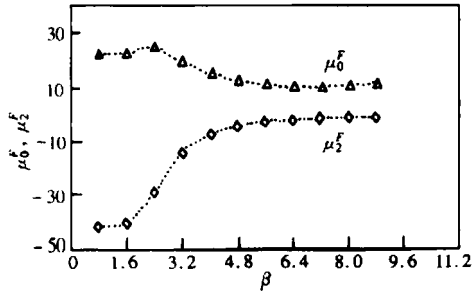


图 2 六阶胶球波函数的  $\mu_0^F$  和  $\mu_2^F$  随  $\beta$  的变化曲线

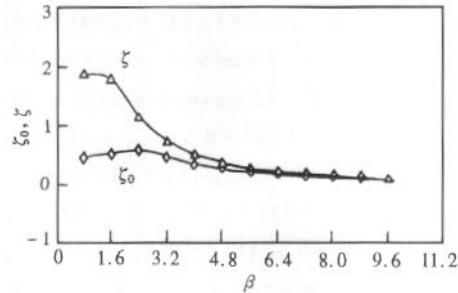


图 3 六阶真空波函数的相关参数  $\zeta_0$  和胶球波函数的相关参数  $\zeta$  随  $\beta$  的变化曲线

作者感谢中山大学陈启洲教授的有益讨论.

参考文献 (References)

- 1 Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**: 113—124
- 2 Llewellyn Smith C H Watson N J. Phys. Letter. 1993, **B302**: 463—471
- 3 GUO S H, CHEN Q Z, L LI. Phys. Rev., 1994, **D49**(1): 507—510
- 4 CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5): 3564—3565
- 5 CHEN Q Z, CAI P F, FANG X Y, et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **27**: 337—342
- 6 HUI Ping, CHEN Qi Zhou High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1995, **19**(9): 820—825  
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9): 820—825)
- 7 HUI Ping. High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1998, **22**(4): 322—325  
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4): 322—325)
- 8 HUI Ping, CAI PengFei, CHEN QiZhou. High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1996, **20**(1): 55—60  
(惠萍, 蔡鹏飞, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1996, **20**(1): 55—60)
- 9 HU Lian, HUI Ping, CHEN QiZhou. High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1997, **21**(11): 995—998  
(胡连, 惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1997, **21**(11): 995—998)

附录

$$\begin{aligned}
 & 3 - z(1) - 6 \times x(1) \times z(2) - 5 \times z(2) \times (x(5) + x(6)) - 5 \times z(2) \times x(2) \times x(3) - x(2) \times z(6) \times x(3) \times \\
 & x(3) - 8 \times x(1) \times z(14) - x(6) \times x(3) - x(3) \times (2 \times d14 + 3 \times d15/2) - x(2) \times x(3) \times (z(9) + \\
 & z(10) + z(11) + z(12) + 9 \times z(14)) - 9 \times x(3) \times x(5) \times z(5)/2 - 6 \times x(5) \times z(6) \times x(3) - 2 \times x(6) \times \\
 & z(6) \times x(3) - 6 \times x(2) + 4 \times x(1) \times x(3) - 5 \times x(2) \times (z(5) + z(6)) - z(2) \times x(6) \times x(3) \times x(3) - \\
 & 8 \times x(14) - x(1) \times z(6) \times x(3) - x(1) \times x(3) \times (2 \times h12 + 3 \times h13/2) - z(2) \times x(3) \times (x(9) + \\
 & x(10) + x(11) + x(12) + 9 \times x(14)) - 6 \times z(5) \times x(6) \times x(3) = 0
 \end{aligned}$$

$$9z(2)/2 - z(2) \times z(1) + 2 \times 4 \times x(2) \times z(2) \times x(4) - (4x(1) - 6 \times x(2) \times x(3) + 6 \times (x(5) + x(6))) - x(3) \times (5 \times x(5) + 5 \times x(6)) \times z(2) - (x(3) \times (x(9) + 2 \times x(10)) - (x(6) + d1 + d6 + d7 + d11 - d12) \times x(4) + 4 \times d13) - z(2) \times (5 \times x(9) + x(9) \times x(3)^2 + 5 \times x(10) + 2 \times x(10) \times x(3)^2 + 5 \times x(12) + 8 \times x(13) - 8 \times x(14)) + (x(2) \times z(11) + z(2) \times x(11)) \times x(4)/2 - (15x \times x(4)/2 - 5) \times x(5) \times z(5)/2 - (5 \times x(4) + x(3)) \times x(5) \times z(6) - (5 \times x(4)/2 + x(3)^2) \times x(6) \times z(6) \times 2 - x(1) \times (-6 \times z(2) \times x(3) + 6 \times (z(5) + z(6))) - x(3) \times (5 \times z(5) + 5 \times z(6)) \times x(2) - x(1) \times (x(3) \times (z(9) + 2 \times z(10)) - (z(6) + h1 + h6 + h7 + h11 - h12) \times x(4) + 4 \times h13) - x(2) \times (5 \times z(9) + z(9) \times x(3)^2 + 5 \times z(10) + 2 \times z(10) \times x(3)^2 + 5 \times z(12) + 8 \times z(13) - 8 \times z(14)) - (5 \times x(4) + x(3)) \times z(5) \times x(6) = 0$$

$$x(1) \times (-4 \times z(2) + 8 \times x(3) \times z(5)) + 3 \times x(2) \times z(5) + x(4) \times (12 \times x(2) \times z(5) + x(1) \times z(9) - x(2) \times z(5)) - x(1) \times (3 \times z(9) + 6 \times z(11) + 6 \times z(12) + 8 \times z(13) + 4 \times z(14)) - x(1) \times ((h1 + h3 + h4) \times x(3) - x(8) \times h1/2 - (h6 + h7 + h12) \times x(7)) - z(2) \times x(9) \times (x(3) - 1/2) - z(2) \times x(3) \times (5 \times x(11) + 5 \times x(12) + 4 \times x(13) + 2 \times x(14)) + z(2) \times (x(11) \times x(7)/2 + x(9) \times x(8)/2) + 59 \times x(5) \times z(5) \times x(7)/4 + z(5) \times x(6) \times (29 \times x(8)/4 + 2 \times x(3)) + 6 \times z(5) - z(5) \times z(1) + (-4 \times x(2) + 8 \times x(3) \times x(5)) + 3 \times z(2) \times x(5) + x(4) \times (12 \times z(2) \times x(5) + x(9) - z(2) \times x(5)) - (3 \times x(9) + 6 \times x(11) + 6 \times x(12) + 8 \times x(13) + 4 \times x(14)) - ((d1 + d3 + d4) \times x(3) - x(8) \times d1/2 - (d6 + d7 + d14) \times x(7)) - x(2) \times z(9) \times (x(3) - 1/2) - x(2) \times x(3) \times (5 \times z(11) + 5 \times z(12) + 4 \times z(13) + 2 \times z(14)) + x(2) \times (z(11) \times x(7)/2 + z(9) \times x(8)/2) + x(5) \times z(6) \times (29 \times x(3)/4 + 2 \times x(3)) = 0$$

$$6 \times z(6) - z(6) \times z(1) - x(1) \times 2 \times z(2) + x(1) \times 7 \times z(6) \times x(3) - x(1) \times (3 \times z(9) + 6 \times z(10) + 3 \times z(11)) + 11 \times z(2) \times x(6) \times x(4) + x(2) \times z(2) \times x(3) + 2 \times x(1) \times z(10) \times x(4) - x(1) \times (x(3) \times (2 \times h2 + h9 + h11 + h12) - (h1 - h12) \times x(7)/2 - h11 \times x(8)) - x(2) \times ((3 \times z(9)/2 + 5 \times z(10) + 3 \times z(11)) \times x(3) - z(10) \times x(8) - z(9) \times x(7)/2) - 3 \times x(5) \times z(5) \times x(3)/8 + 29 \times x(5) \times z(6) \times x(7)/4 + 13 \times x(6) \times z(6) \times x(8) - 2 \times x(2) + 7 \times x(6) \times x(3) - (3 \times x(9) + 6 \times x(10) + 3 \times x(11)) + 11 \times x(2) \times z(6) \times x(4) + 2 \times x(10) \times x(4) - (x(3) \times (2 \times d2 + d9 + d11 + d14) - (d1 - d14) \times x(7)/2 - d11 \times x(8)) - z(2) \times ((3 \times x(9)/2 + 5 \times x(10) + 3 \times x(11)) \times x(3) - x(10) \times x(8) - x(9) \times x(7)/2) + 29 \times z(5) \times x(6) \times x(7)/4 = 0$$

$$15 \times z(9)/2 - z(1) \times z(9) + x(3) \times x(2) \times z(5) - x(1) \times (2 \times (z(5) + 2 \times z(6)) - 9 \times z(9) \times x(3) + h1 \times (3 - x(4)) + 2 \times h2 \times (3 - x(4)) + 3 \times h3 + 3 \times h4 + 2 \times h5 + 6 \times h6 + 6 \times h7 + 3 \times h8 + 6 \times h9 + 2 \times h13) + 27 \times z(2) \times x(9) \times x(4)/2 + z(5) \times x(6)/2 - 3 \times z(2) \times x(11) - z(2) \times x(9) \times x(4)/2 - 4 \times x(2) \times z(2) + x(3) \times z(2) \times x(5) - (2 \times (x(5) + 2 \times x(6)) - 9 \times x(9) \times x(3) + d1 \times (3 - x(4)) + 2 \times d2 \times (3 - x(4)) + 3 \times d3 + 3 \times d4 + 2 \times d5 + 6 \times d6 + 6 \times d7 + 3 \times d8 + 6 \times d9 + 2 \times d13) + 27 \times x(2) \times z(9) \times x(4)/2 + 3 \times x(5) \times z(5) + x(4) \times x(5) \times z(6)/2 - 3 \times x(2) \times z(11) - x(2) \times z(9) \times x(4)/2 = 0$$

$$15 \times z(10)/2 - z(10) \times z(1) + z(2) \times x(6) \times x(3) - (2 \times x(6) - 8 \times x(3) \times x(10) + 3 \times d1 + 3 \times d3 + 6 \times d11 - 2 \times d11 \times x(4)) + x(4) \times (13 \times z(2) \times x(10) + 2 \times x(6) \times z(6) \times x(2) - z(2) \times x(2) + x(2) \times z(6) \times x(3) - x(1) \times (2 \times z(6) - 8 \times x(3) \times z(10) + 3 \times h1 + 3 \times h3 + 6 \times h11 - 2 \times h11 \times x(4)) + x(4) \times (13 \times x(2) \times z(10)) = 0$$

$$15 \times z(11)/2 - z(11) \times z(1) - (2 \times (x(5) + x(6)) - 10 \times x(3) \times x(11) + 3 \times d3 + 2 \times d5 + 3 \times d9 - (d3 + d9 - d12) \times x(4) + 3 \times d8 + 3 \times d12 + 12 \times d14) + 3 \times z(2) \times x(9)/2 + 3 \times z(2) \times x(12) + (15 \times z(2) \times x(11) - x(5) \times z(5)/4) \times x(4) - x(1) \times (2 \times (z(5) + z(6)) - 10 \times$$

$$x(3) \times z(11) + 3 \times h3 + 2 \times h5 + 3 \times h9 - (h3 + h9 - h12) \times x(4) + 3 \times h8 + 3 \times h12 + 12 \times h14 + 3 \times x(2) \times z(9)/2 + 3 \times x(2) \times z(12) + (15 \times x(2) \times z(11)) \times x(4) = 0$$

$$15 \times z(12)/2 - z(12) \times z(1) - 2 \times x(5) - z(2) \times x(2) \times 2 - (-10 \times x(3) \times x(12) + 3 \times d4 - d4 \times x(4) + 2 \times d5 + 3 \times d8 + 6 \times d10 + 2 \times d13) + 2 \times z(2) \times x(11) + 14 \times z(2) \times x(12) \times x(4) + 3 \times z(5) \times x(6) - 2 \times x(1) \times z(5) - x(1) \times (-10 \times x(3) \times z(12) + 3 \times h4 - h4 \times x(4) + 2 \times h5 + 3 \times h8 + 6 \times h10 + 2 \times h13) + 2 \times x(2) \times z(11) + 14 \times x(2) \times z(12) \times x(4) + 3 \times x(5) \times z(6) = 0$$

$$6 \times z(13) - z(13) \times z(1) - 2 \times x(1) \times z(5) + x(2) \times z(5) \times x(3) + x(1) \times (8 \times z(13) \times x(3) - 3 \times h5) + (-z(2) \times x(9)/2 + 10 \times z(2) \times x(13) - z(5) \times x(6)) \times x(4) - 2 \times x(5) - x(2) \times x(2) \times 2 + z(2) \times x(5) \times x(3) + (8 \times x(13) \times x(3) - 3 \times d5) + (-x(2) \times z(9)/2 + 10 \times x(2) \times z(13) - x(5)^2 \times x(4)/2 - x(5) \times z(6)) \times x(4) = 0$$

$$6 \times z(14) - z(14) \times z(1) - 2 \times x(5) + 2 \times z(2) \times x(6) \times x(3) - z(2) \times z(5) \times x(3) + (8 \times x(14) \times x(3) - (8 \times d13 + 3 \times d12 - 3 \times d12 \times x(4)/2)) + z(2) \times ((x(9) + 2 \times x(10) + x(12) + 9 \times x(14)) \times x(4) - 4 \times x(11)) - 3 \times z(5) \times z(5) \times x(4) - z(5) \times x(6) \times (5 \times x(4)/2 - 4) - 2 \times x(1) \times z(5) + 4 \times x(2) \times z(2) \times 2 + 2 \times x(2) \times z(6) \times x(3) - x(2) \times z(5) \times x(3) + x(1) \times (8 \times z(14) \times x(3) - (8 \times h12 + 3 \times h13 - 3 \times h13 \times x(4)/2)) + x(2) \times ((z(9) + 2 \times z(10) + z(12) + 9 \times z(14)) \times x(4) - 4 \times z(11)) - x(5) \times z(6) \times (5 \times x(4)/2 - 4) = 0$$

### Sixth Order Approximation of the Glueball Wave Function in 2 + 1 - DSU(2)LGT\*

HUI Ping

(Department of Physics, Guangdong Education College, Guangzhou 510303, China)

**Abstract** The coupled cluster method is improved to calculate sixth order coefficients  $\mu_0^F, \mu_2^F$  and relevant parameter  $\zeta$  of glueball wave function in 2 + 1 - D  $SU(2)$  lattice gauge theory (LGT). In the calculation, we select hollow graphs as trial wave function. The calculated results of  $\mu_0^F, \mu_2^F$  and  $\zeta$  show good scaling behaviors at weak coupling region.

**Key words** lattice gauge theory, glueball wave function, coupled cluster method

Received 21 April 1999

\* Supported by Natural Science Foundation of Guangdong Province