

# 微波元件与加速结构的有限元分析

王兰法<sup>1)</sup> 张 闯

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

**摘要** 研究了有限元方法在二维均匀结构和轴对称加速结构中的应用,采用了带宽优化技术和子空间求解特征值方法,并给出了部分例子,结果表明该方法精度高、速度快. 这些方法可直接用于三维程序、并行计算.

**关键词** 有限元 微波结构 子空间方法

## 1 引言

随着加工精度的越来越高,例如数控机床的应用,要求加速结构的设计计算精度也相应地提高;加速器物理的研究对加速结构的精度也提出了新的要求,如下一代直线对撞机为了减小束团横向尺寸的增长,对横向模要严格控制,因此,加速器电磁场的精确计算在加速器领域中的意义越来越显得重要. 同时,计算机功能的迅速发展为高精度、复杂结构的数值分析提供了物质基础.

国际上各个实验室都在发展自己的程序,如 SLAC 发展了  $\Omega 2$ ,  $\Omega 3$ <sup>[1,2]</sup> 等程序. 国内加速器领域常用的研究加速结构的软件有 MAFIA<sup>[3]</sup>, SUPERFISH<sup>[4]</sup> 和 URMEL<sup>[5]</sup> 等. 但这些软件在某些方面都存在一定的不足,例如,MAFIA 的功能虽然很多,但其精度不高,频率的精度一般为  $10^{-4}$ ; URMEL 程序也存在同样的问题. 我国上一代加速器科学工作者在这方面也做过一些工作,如中科院高能所的吴文泰、莫善坚、叶宣化等<sup>[6]</sup> 利用变分法发展了计算盘荷波导加速模的程序;清华大学加速器实验室利用差分法发展了计算拱形腔加速模的程序;作者发展了精确计算盘荷波导所有模式的 LONGTRANSVRS 程序<sup>[7]</sup> 等. 这些程序在腔型结构和模式方面都受到限制,不能满足计算任意腔型电磁场的要求. 在计算电磁场的各种数值方法中,如差分法、变分法、有限元法、模匹配法、等效电路法、巨量法、谱域法等,由于有限元方法以变分法为基础,因此具有精度高的特点,同时有限元通过非均匀网格实现边界的近似,使得有限元方法能够非常近似地描述实际结构,由于有限元的这些优点,使得它越来越受到更多人的青睐.

同时,加速器界常用的建立在网格剖分基础上的程序,如 MAFIA, SUPERFISH 和 URMEL 等在网格处理方面也存在很大的缺陷,不能随意划分网格,这使得计算精度、计算速度都

2000-12-19 收稿, 2001-05-28 收修改稿

1) E-mail: wanglf@post.kek.jp

受到限制,从而限制了这些程序在大型结构和复杂结构中的应用.自适应网格剖分方法克服了这些缺点.曲边或曲面单元使得我们可以用很少的单元来更精确地描述结构的形状,从而会大大提高计算精度和缩短计算时间.这些方法结合并行算法使得有限元方法在研究大型结构和复杂结构中的优势就更加突出,这也正是作者研究的目的.本文给出了我们研究的初步结果,只应用了普通的有限元方法.但是,通过与 SUPERFISH 的比较,有限元程序速度更快、精度更高.

## 2 电磁场方程

电磁场 MAXWELL 方程的一般表达式为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{金属边界上}) \\ \hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{金属边界上}) \end{cases}$$

我们的问题是寻找无源微波结构中的场,设特征模为  $\omega$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  表示随时间变化的场的幅度,我们这里仅研究结构中介质参数  $\omega$  和  $\mu$  为常数的情形.对于二维均匀结构,例如,矩形波导、圆柱腔、脊型波导、光缆和传输线等,其横截面为任意形状的波导.这种结构中传播的波可分为 TM 波、TE 波和 TEM 波.利用变量分离法可以得到直角坐标系下 TM 模的场方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0, \\ E_z = 0 \quad (\text{金属边界上}) \end{cases} \quad (2)$$

$z$  为波的传播方向.对 TE 模场分量  $H_z$  有相似的表达式,但金属边界条件为  $\partial H_z / \partial n = 0$ .其它场分量可以通过 MAXWELL 方程得到.

对于轴对称结构,从(1)式可以得到柱坐标  $(r, z, \phi)$  下的电磁场方程,这里只考虑旋转对称场.对 TM0 模有

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \frac{H_z}{r^2} + \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} H_z = 0,$$

将上式中的  $H_z$  用  $E_z$  代替就是 TEO 模的方程.

## 3 有限元方程

利用变分原理,可分别得到(2)和(3)式的变分表达式分别为

$$J(E_i) = \iint_S \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_i}{\partial y} \right)^2 - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} E_i^2 \right] dx dy, \quad (4)$$

$$J(H_*) = \iint_S \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_*}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H_*}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r} H_* \frac{\partial H_*}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{H_*^2}{r} - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{2c^2} H_*^2 \right\} r dr dz \quad (5)$$

变分法具有很高的精度,对于复杂的边界,由于不能给出满足或接近满足边界的试探函数,使这种方法仅限于边界简单、规则的结构,如矩形波导等.为了利用变分法精度高的优点,同时利用网格划分技术能够处理复杂边界的灵活性,有限元方法将研究的区域划分为若干小的单元,每个单元内的场可以用该单元结点处场值的多项式来描述为

$$U^e(x, y) = \sum_{i=1}^M u_i N_i(x, y), \quad (6)$$

上标  $e$  表示对某单元而言,  $M$  为单元内的结点数目,  $u_i$  为结点  $i$  处场的值,  $N_i$  为形状函数. 经过这样的离散后,利用变分原理

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = 0, \quad (7)$$

就可得到每个单元的有限元方程,最后将所有的单元方程组织在一起就得到了整个结构的有限元方程.

方程(2)的有限元方程为

$$A E_i - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} B E_i = 0, \quad (8)$$

式中  $E_i$  为每个网格点的场幅度,

$$A_{ij} = \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (9)$$

$$B_{ij} = \iint N_i N_j dx dy, \quad (10)$$

$$\text{金属边界条件: } E_i = 0. \quad (11)$$

柱坐标下轴对称结构 TMO 模(方程 3)的有限元方程为

$$C H_* - \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} D H_* = 0, \quad (12)$$

$$C_{ij} = \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{2}{r} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{2}{r} N_j \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} N_i N_j \right) r dr dz, \quad (13)$$

$$D_{ij} = \iint N_i N_j r dr dz, \quad (14)$$

这里矩阵  $A$ ,  $B$ ,  $C$  和  $D$  都是对称稀疏矩阵,因此特征方程(8)和(12)可以利用求解稀疏矩阵的方法求解,我们采用子空间迭代的方法,大大缩减了计算时间,且可以一次得到多个模式,而 SUPERFISH 则采用逐个模式多次寻找的方法.即使利用子空间迭代法,求解特征值的过程仍然占用整个计算过程的大部分时间.为了进一步提高计算速度,我们优化了矩阵的带宽,大大减小了所需要的内存空间,从而提高了计算速度.

## 4 研究结果举例

### 1) 矩形波导

以矩形波导为例,其长和宽分别为  $a$  和  $b$ ,则 TM<sub>11</sub> 模的频率为

$$f_{\text{TM}_{11}} = \frac{c \sqrt{1 + (a/b)^2}}{2a}, \quad (15)$$

式中  $c$  为光速. 研究中,采用了三角形单元. 当网格尺寸等于 0.05cm 时,频率的精度可达  $1.37 \times 10^{-7}$ ,图 1 给出了长和宽分别为 5cm 和 1cm 的进行波导的频率精度随网格尺寸的变化,可以看出频率的收敛性很好,该模式的理论值为 15.2864757GHz.

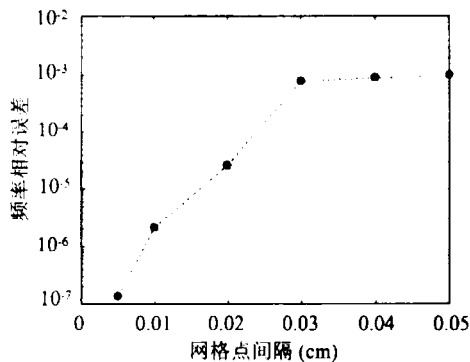


图 1 矩形波导 TM<sub>11</sub> 模频率随网格尺寸的变化

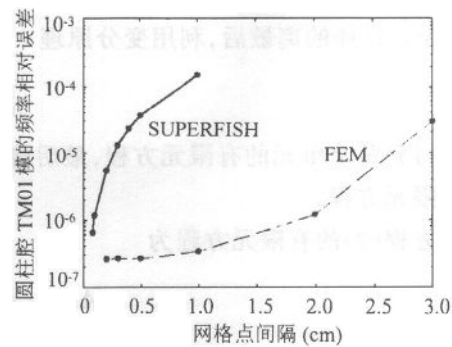


图 2 TM<sub>01</sub> 频率随网格尺寸的变化

### 2) 圆柱腔

SUPERFISH 是加速器界用来分析轴对称结构的常用软件,公认为有较好的精度,它采用了差分法. 下面给出有限元方法与 SUPERFISH 的比较. 图 2 给出由式(12)得到的半径为 10cm 的圆柱腔 TM<sub>01</sub> 模频率随网格尺寸的变化与 SUPERFISH 的比较,计算中圆柱腔用一个边长为 10cm 的正方形表示. 表 1 是有限元方法给出的 TM<sub>01</sub> 频率随网格尺寸的变化, TM<sub>01</sub> 模的理论值为 1147.424981871254MHz. 由图 2 和表 1 可以看出我们的方法收敛速度很快,网格单元尺寸为 2cm 时的精度与 SUPERFISH 网格单元尺寸为 0.1cm 时相当,分别对应 90 和 12100 个网格单元,精度可达到  $10^{-6}$ ,这说明有限元方法在速度和精度方面都大大优于 SUPERFISH.

### 3) 盘荷波导

盘荷波导是直线加速器中常用的加速结构,作者利用变分法发展了高精度 LONGTRANSVRS 程序,对于  $t = 5.842\text{mm}$ ,  $D = 34.99\text{mm}$ ,  $b = 40.989\text{mm}$ ,  $a = 10.363\text{mm}$  的腔, LONGTRANSVRS 程序给出 TM<sub>01</sub> 的收敛频率为 2838.419471MHz. 我们以此值为精确解来判断有限元与 SUPERFISH 的收敛情况,如图 3 所示. 有限元程序利用 7500 个网格点就可达到  $10^{-7}$  的精度,而 SUPERFISH 的网格点约 4 万时,需要的内存达 118M,精度才  $10^{-5}$ . 图 4 是有限元方法使用的网格,分布是非均匀的,以便减小边界近似引起的误差.

SUPERFISH 则应用了均匀网格.

表 1 圆柱腔 TM<sub>01</sub> 模频率、精度和单元数目随网格尺寸的变化

网格尺寸 (cm)	频率 (MHz)	频率精度	单元数目
5	1147.46218	$3.24173 \times 10^{-5}$	14
4	1147.45928	$2.98934 \times 10^{-5}$	19
3	1147.45773	$2.85456 \times 10^{-5}$	22
2	1147.42635	$1.18925 \times 10^{-6}$	90
1	1147.42537	$3.39192 \times 10^{-7}$	333
0.5	1147.42529	$2.64772 \times 10^{-7}$	1353
0.3	1147.42528	$2.61464 \times 10^{-7}$	2194
0.2	1147.42527	$2.58798 \times 10^{-7}$	8414

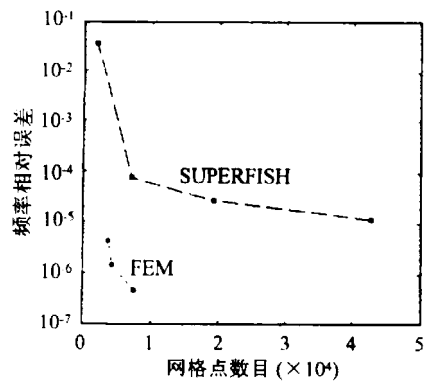


图 3 有限元与 SUPERFISH 的比较

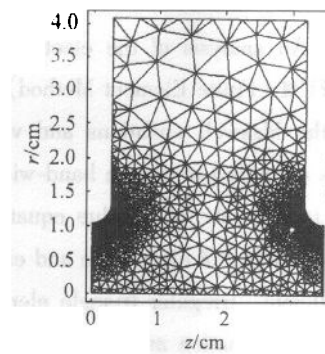


图 4 有限元应用的网格

## 5 结论

我们利用有限元方法研究了二维结构,该方法具有很高的精度.同时,优化了节点的排列,减小了带宽,并采用子空间方法来求解稀疏矩阵,大大提高了计算速度,这些方法可直接应用于三维结构的研究.为了进一步提高精度、减小计算时间,自适应网格技术和曲面单元将在未来的研究中采用.

### 参考文献 (References)

- 1 LI Z, McCandless B, MI W et al. Advanced Modeling of RF Cavities and Components for  $e^+e^-$  Colliders, In: KEK Proceedings 98-10, 1998, 623-625
- 2 ZHAN X. Parallel Computation of Transverse Wakes in Linear Colliders, SLAC-PUB-7410, 1996
- 3 The MAFIA Collaboration. MAFIA-the ECAD System
- 4 Menzel M T, Stokes H K. LA-UR-87-115, 1987
- 5 Weiland T. Nucl. Instrum. Methods, 1983, 216:329-348
- 6 YE Xuan-Hua, ZHOU Wen-Zhen, SHEN Shuang-Lin et al. Analysis of Dimension and RF Quantities in Disc Structure by Varia-

tional Method. In: Institute of Science and Technology Information in China ed. Particle Accelerator and it's Application. Chongqing: Science and Technology Press, 1980. 48(in Chinese)

(叶宜化,周文振,沈双林等. 用变分法计算电子直线加速器的盘荷波导尺寸及物理量. 见:中国科学技术情报所重庆分所编辑. 粒子加速器及其应用. 重庆:科学技术文献出版社分社,1980. 48)

- 7 WANG Lan-Fa, LIN Yu-Zheng. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(6):567—572(in Chinese)  
(王兰法,林郁正. 高能物理与核物理,2000,**24**(6):567—572)

## Study of Microwave Element and Accelerating Structure Using Finite Element Method

WANG Lan-FA<sup>1)</sup> ZHANG Chuang

(Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

**Abstract** An analysis of the electromagnetic field in 2D uniform and axis-symmetric structures based on FEM (Finite Element Method) is presented in this paper. The equation of FEM is derived based on the Maxwell equations and variational theory. The resulting tridiagonal matrix in FEM equation is optimized to reduce band-width of the matrix and the calculation time. Subspace method is applied to solve the eigenvalue equation where the matrices are sparse and make the solver run faster. The number of eigenvalue and eigenvector can be selected by the user which makes the solver more efficient. Irregular triangle element is used for meshing to describe the structure geometry with good approximation and improve the accuracy of the solution. Numerical results for rectangle waveguide, pill-box cavity and disc-loaded structure show that our finite element method has high accuracy, good convergence and fast running speed. Comparing with SUPERFISH program, the FEM method is advantageous in both accuracy and speed. The accuracy of our FEM is almost the same as the variational method which is used as a basic method in many fields. All strategy used here can be applied to the 3-dimension structure and other eigenvalue problems.

**Key words** finite element method accelerating structure, subspace method

---

Received 19 December 2000, Revised 28 May 2001

1) E-mail: wanlf@post.kek.jp