

在近平衡态 QGP 中费米子的分布函数*

杨芳 周运清 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 从 QGP 动力论出发,得到 QGP 在色场涨落扰动下偏离平衡态而处于近平衡时的分布函数,进而分析了决定偏离因子的物理因素,并分别讨论了在高温低密和低温高密区偏离因子特征.

关键词 夸克-胶子等离子体(QGP) 近平衡 动力论 相对论重离子碰撞

1 引言

有限温度下的量子色动力学理论预言了在高温高密条件下,会产生退禁闭相变,形成夸克-胶子等离子体(QGP).探索 QGP 这种新的物质形态,可提供分析宇宙演化的理论基础,并可能导致某些物理观念上的突破,因而成为当今物理学前沿的重要研究领域.随着新一代相对论重离子对撞机 RHIC 的开通运行,人们希望探测到这种新物态.一种倾向性的看法是认为在相对论重离子碰撞中生成的 QGP 首先是处于热力学非平衡态,然后逐渐趋于平衡态.但如何描述 QGP 的非平衡态,给出其非平衡态下的分布函数一直是尚未解决的关键问题.在一些文献中,人们尝试性地认为在系统偏离平衡态不远,即近平衡态下系统的分布函数与平衡态下的分布函数 $f^{(0)}$ 有如下关系

$$f = \lambda f^{(0)},$$

λ 是偏离因子,当 $\lambda \rightarrow 1$ 时,系统趋于平衡态.

QGP 动力论中有 QGP 中夸克分布函数所满足的方程.但直接求解这组方程并不是容易的事.首先必须分析清楚什么是求解方程的物理条件,以及找到适当的解法.在本文中,只讨论近平衡的情况,即假定可在平衡态附近对分布函数展开:

$$f = f^{(0)} + \kappa f^{(1)} + \kappa^2 f^{(2)} + \dots,$$

κ 是小量的标度参量,其幂次标记小量的阶次.问题是什么量是系统中的小量?注意到在 QGP 中有这样的物理情况,即 QGP 中色场的涨落可视为小

量,系统正是在这种涨落的扰动下偏离了平衡态.本文将从 QGP 动力论出发,选择 QGP 中色场涨落为小量,采用一种逐级迭代求解的方法,得到 QGP 在这类扰动下偏离平衡而处于近平衡态的分布函数,进而从物理上分析文献中引入的偏离因子 λ 的物理内涵.

2 近平衡态分布函数的迭代求解

在半经典极限下,QGP 中夸克和反夸克的分布函数 $f(x, p)$ 和 $\bar{f}(x, p)$ 分别满足的方程为

$$p^\mu D_\mu f(x, p) + \frac{g}{2} p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \{ F_{\mu\nu}(x), f(x, p) \} = 0, \quad (1)$$

$$p^\mu D_\mu \bar{f}(x, p) - \frac{g}{2} p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \{ F_{\mu\nu}(x), \bar{f}(x, p) \} = 0, \quad (2)$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 为 QGP 中平均色场的场张量, D 为协变导数.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (3)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig[A_\mu],$$

这里 $A^\mu = A_a^\mu(x) T^a, f = f^a T^a, T^a$ 为色 $SU(3)$ 的生成元, a 是色指标.

色平均场满足杨-米尔斯方程

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu,$$

色流

$$j^\nu = -\frac{gc}{2\hbar} \int \frac{d^3 p}{E_p} p^\nu (f(x, p) - \bar{f}(x, p)). \quad (5)$$

假定 QGP 中的夸克为轻夸克,在零质量近似下

2002-02-19 收稿

* 国家自然科学基金(10175026)资助

有: $E_p = |p|$.

方程(1-5)是半经典极限下忽略自旋效应的 QGP 的 Vlasov 型动力论方程^[1,2],大量工作表明它得到的物理结果和在硬热圈水平上热 QCD 得到的结果是一致的,它是后面讨论的基础.

QGP 动力论方程是 $SU(3)$ 规范不变的. 为了计算方便,选取瞬时规范,即 $A_a^\mu(x) = (0, A_a(x))$. 在这种规范下,场强和场势有简单的关系: $E_a^i(x) = -\frac{\partial}{\partial t} A_a^i(x)$ (在以下行文中,除非有必要,一般都未明显标出色指标). 在此规范下,把方程组变换到动量空间后,有

$$\omega f(\omega) + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} ig \frac{\nu_i}{\omega_1} [E_i(\omega_1), f(\omega_2)] - \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig}{2} \left\{ E_i(\omega_1), \frac{df(\omega_2)}{dp_i} \right\} - \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig\nu_i}{2} \times \left\{ E_i(\omega_1), \frac{df(\omega_2)}{dp_0} \right\} + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \sum_{\omega_3+\omega_4=\omega_1} \frac{g^2\nu_i}{2} \times \frac{1}{\omega_3\omega_4} \left\{ [E_i(\omega_3), E_j(\omega_4)], \frac{df(\omega_2)}{dp_j} \right\} = 0, \quad (6)$$

$$\omega \bar{f}(\omega) + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} ig \frac{\nu_i}{\omega_1} [E_i(\omega_1), \bar{f}(\omega_2)] + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig}{2} \left\{ E_i(\omega_1), \frac{d\bar{f}(\omega_2)}{dp_i} \right\} + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig\nu_i}{2} \times \left\{ E_i(\omega_1), \frac{d\bar{f}(\omega_2)}{dp_0} \right\} - \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \sum_{\omega_3+\omega_4=\omega_1} \frac{g^2\nu_i}{2} \times \frac{1}{\omega_3\omega_4} \left\{ [E_i(\omega_3), E_j(\omega_4)], \frac{d\bar{f}(\omega_2)}{dp_j} \right\} = 0, \quad (7)$$

式中 $\nu_i = -p^i/p^0$, $E(\omega) = -\frac{\partial}{\partial t} A(\omega) = i\omega A(\omega)$, 并定义了

$$\sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2).$$

同理,平均场方程(4)式变为

$$\omega E_i(\omega) + g^2 \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \sum_{\omega_3+\omega_4=\omega_1} \frac{1}{\omega_2\omega_3\omega_4} \times [[E_i(\omega_3), E_j(\omega_4)], E_j(\omega_2)] = \frac{1}{i} j^i(\omega). \quad (8)$$

本文是在假定方程中的耦合常数 g 很小的情况下求解. 根据 QGP 动力论的一般讨论知道,这时系统中有两个 3 个物理区的标度,即 T, gT 和 $gT^{2/3}$, 并且在 gT 标度区,关于 QGP 中发生的集体效应的计算,从动力论出发和从温度场论出发所得结果是一致的^[6-8]. 本文的讨论也限制在 gT 标度,这时应认为色场涨落在 gT 水平,记为 $A^{(1)} \sim gT$,在

实际计算中即可把 $A^{(1)}$ (因而 $E^{(1)}$) 视为一级小量,对方程作微扰迭代求解,并在最后对总结果按 g 的幂次整理^[9].

具体迭代解法是,把方程(6)中的 $E^{(1)}$ 视为一级小量,这样就有微扰迭代展开式

$$E_i = \kappa E_i^{(1)}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots) + \kappa^2 E_i^{(2)}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots) + \dots, \\ f = f^{(0)}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots) + \kappa f^{(1)}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots) + \kappa^2 f^{(2)}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots) + \dots, \\ \omega = \sum_{n=0}^N \kappa^n \omega^{(n)}$$

对于 f 也类似地展开. 色流也可以展开到任意级:

$$j^{i(n)} = -\frac{g}{2} \int \frac{d^3 p}{E_p (2\pi)^3} p^i \{ [f^{i(n)} - \bar{f}^{i(n)}] \}, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

这组展开式的物理意义是很明确的,它表示场的变化会导致分布函数改变,而分布函数的改变又反过来影响场的强度和频率,把各展开式代入动力论方程并按 κ 幂次整理可得各级近似下的方程.

首先讨论线性近似情况. 一级修正的方程为

$$\omega^{(0)} f^{(1)}(\omega) + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \{ E_i^{(1)}(\omega_1), f^{(0)}(\omega_2, p) \} + \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig\nu_i}{2} \frac{\partial}{\partial p_0} \{ E_i^{(1)}(\omega_1), f^{(0)}(\omega_2, p) \} = 0, \quad (9)$$

$$\omega^{(0)} \bar{f}^{(1)}(\omega) - \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig}{2} \frac{\partial}{\partial p_i} \{ E_i^{(1)}(\omega_1), \bar{f}^{(0)}(\omega_2, p) \} - \sum_{\omega_1+\omega_2=\omega} \frac{ig\nu_i}{2} \frac{\partial}{\partial p_0} \{ E_i^{(1)}(\omega_1), \bar{f}^{(0)}(\omega_2, p) \} = 0. \quad (10)$$

零级无色分布函数对夸克(反夸克)取 Fermi-Dirac 分布,即

$$f^{(0)}(p) = (e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^{-1}, \quad \bar{f}^{(0)}(p) = (e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1)^{-1},$$

则可求得夸克(反夸克)的一级分布函数

$$f^{(1)}(\omega, p) = -\frac{2ig}{\omega^{(0)}} \cdot \frac{\beta\nu_i E_i^{(1)}(\omega)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \times e^{\beta(\epsilon-\mu)} f^{(0)}(p), \quad (11)$$

$$\bar{f}^{(1)}(\omega, p) = \frac{2ig}{\omega^{(0)}} \cdot \frac{\beta\nu_i E_i^{(1)}(\omega)}{e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1} \times e^{\beta(\epsilon+\mu)} \bar{f}^{(0)}(p), \quad (12)$$

其中 $\omega^{(0)2} \equiv \omega_p^2 = -\frac{g^2}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 \times$

$$\{ N_f [df^{(0)} + d\bar{f}^{(0)}] + 2N_c dG^{(0)} \}, \quad (13)$$

其中 $N_c = 3$, 是夸克色的数目. $N_f = 2$, 是夸克味的数目, $G^{(0)}$ 是胶子在平衡态时的玻色分布.

$$E_i^{(1)}(\omega) = \pi E_{i0} [e^{-i\omega} \delta(\omega^{(0)} - \omega_p) + e^{i\omega} \delta(\omega^{(0)} + \omega_p)] \quad (14)$$

由色场张量(3)式可以清楚地看到,在线性近似下,色场的最本质特性即非阿贝尔贡献被忽略掉了,因而必须进一步考虑高级修正.把一级结果代入二级近似方程,经过较长的平凡运算,并完成对色指标的求迹后,可求得二级修正为

$$f^{(2)}(\omega) = \frac{2g^2 \beta^2 \nu_i \nu_j e^{\beta(\epsilon-\mu)} (1 - e^{\beta(\epsilon-\mu)})}{\omega^{(0)} (e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^3} \times \sum_{\omega_1 + \omega_2 = \omega} \frac{1}{\omega_2} E_i^{(1)a}(\omega_1) E_j^{(1)b}(\omega_2) \delta_{ab} \quad (15)$$

$$f^{(2)}(\omega) = - \frac{2g^2 \beta^2 \nu_i \nu_j e^{\beta(\epsilon+\mu)} (1 - e^{\beta(\epsilon+\mu)})}{\omega^{(0)} (e^{\beta(\epsilon+\mu)} + 1)^3} \times \sum_{\omega_1 + \omega_2 = \omega} \frac{1}{\omega_2} E_i^{(1)a}(\omega_1) E_j^{(1)b}(\omega_2) \delta_{ab} \quad (16)$$

3 结果及讨论

对软模式扰动, $A^{(1)} \sim gT$, 并注意到在瞬时规范下 E 和 A 的关系以及(11)和(15)式,则知其导致的分布函数在二级近似下为

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} = \left(1 - 2g^3 T \frac{1}{\omega^{(0)}} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T}}{e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1} - 16g^6 T^2 \frac{1}{(\omega^{(0)})^2} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T} (1 - e^{(\epsilon-\mu)/T})}{(e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1)^2} \right) f^{(0)}(p) \quad (17)$$

若令 $f = \lambda f^{(0)}$, 则由(17)式可计算到二级近似下的偏离因子为

$$\lambda = 1 - 2g^3 T \frac{1}{\omega^{(0)}} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T}}{e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1} - 16g^6 T^2 \frac{1}{(\omega^{(0)})^2} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T} (1 - e^{(\epsilon-\mu)/T})}{(e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1)^2} \quad (18)$$

由(13)式,当 $\mu \ll T$ 时, $\omega^{(0)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} gT$; 当 $\mu \gg T$ 时, $\omega^{(0)} = \frac{\sqrt{2}g\mu}{\pi}$. 因此,

$$\mu \ll T \text{ 时, } \lambda = 1 - \sqrt{3}g^2 \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T}}{e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1} - 12g^4 \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T} (1 - e^{(\epsilon-\mu)/T})}{(e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1)^2} \quad (19)$$

$$\mu \gg T \text{ 时, } \lambda = 1 - \sqrt{2}\pi g^2 \frac{T}{\mu} \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T}}{e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1} - 8\pi^2 g^4 \left(\frac{T}{\mu} \right)^2 \frac{e^{(\epsilon-\mu)/T} (1 - e^{(\epsilon-\mu)/T})}{(e^{(\epsilon-\mu)/T} + 1)^2} \quad (20)$$

由(18)式可知,分布函数偏离因子的大小与系统的动力学耦合参数 g , 系统的热力学参量 T , 化学势 μ 和系统中粒子的运动学变量能量 ϵ 有关. 这样, 本文就从理论上给出了文献中引入的偏离因子, 并看到它与系统各类参量的关系.

下面讨论高能碰撞快度中心区以及天体物理有关的两种具体物理情况.

我们知道,高能重离子碰撞实验中,快度中心区的净重子数密度很小.理论上可以认为 $\mu = 0$, 目前实验中,可达到的最低化学势 μ 大致为 50MeV. 因此,这里讨论 $\mu = 50\text{MeV}$, $g = 0.3$ 的情况. 由(19)式,若令 T 取 150, 300, 450, 800MeV, 则可得到 λ , f 与能量 ϵ 的函数图像(如图 1).

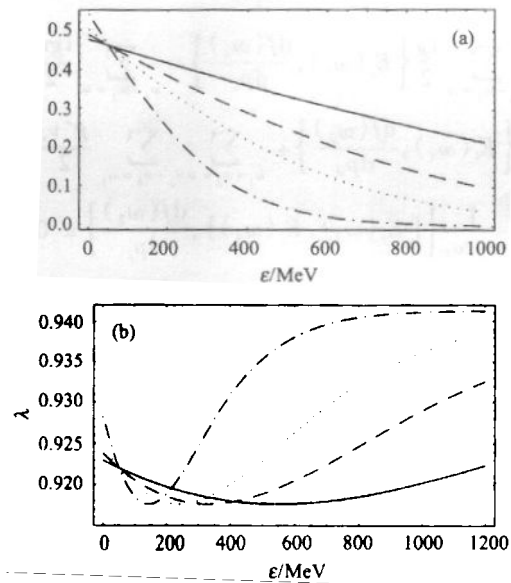


图 1 (a) 当 $\mu = 50\text{MeV}$, $g = 0.3$ 时, 系统分布函数 f 与能量 ϵ 的函数图像
温度 $T = 800, 450, 300, 150\text{MeV}$ (由上至下).
(b) 当 $\mu = 50\text{MeV}$, $g = 0.3$ 时, 系统分布函数在二级近似下偏离因子 λ^2 与能量 ϵ 的函数图像
温度 $T = 150, 300, 450, 800\text{MeV}$ (由上至下).

如果和统计物理中费米分布函数的高温图像比较,则由图 1(a)可见,在高温区, f 按 ϵ 的分布特性是类似 $f^{(0)}$ 的. 众所周知,在平衡态下,当 $\epsilon = \mu$ 时, $f^{(0)} = \frac{1}{2}$. 但现在可以看出,在近平衡态下,当 $\epsilon = \mu$ 时,无论 T 的高温值为多大, $f < \frac{1}{2}$, 且都交于同一点. 由图 1(b)可知,对不同 ϵ , 偏离因子的大小是不同的. 对(19)式求极值,可知当 $\epsilon = T(\ln 1.86481) + \mu$ 时,偏离平衡最大.

与天体物理有关的是属于低温高密的情况. 通

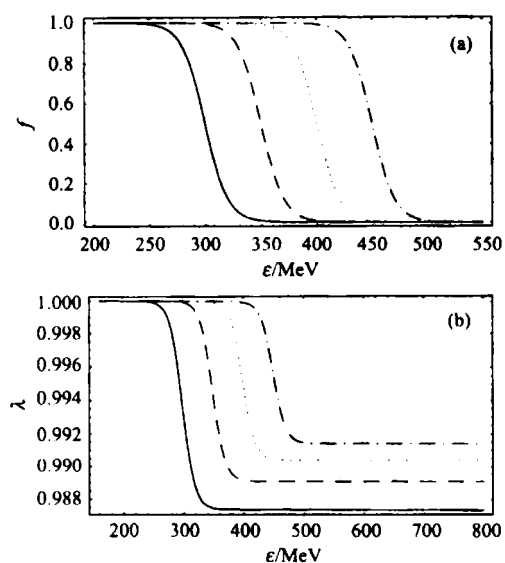


图 2 (a) 当 $T = 10\text{MeV}$, $g = 0.3$ 时, 系统分布函数 f 与能量 ϵ 的函数图像
化学势 $\mu = 300, 350, 400, 450\text{MeV}$ (由左至右).
(b) 当系统分布函数在二级近似偏离因子与能量 ϵ 的函数图像
化学势 $\mu = 300, 350, 400, 450\text{MeV}$ (由左至右).

过(20)式, 令 $T = 10\text{MeV}$, $g = 0.3$, 考察 λ, f 与能量 ϵ 的函数图像 (如图 2).

由图 2(a) 可见, 在低温区 f 按 ϵ 分布的特征和 $f^{(0)}$ 定性上是类似的, 即在 $\epsilon < \mu$ 时, $f \rightarrow 1$. 而在 $\epsilon > \mu$ 时, $f \rightarrow 0$. 但要特别注意的是, 由图 2(b) 可知, 不同能量的粒子偏离平衡的状况是不同的, 它在 $\epsilon \approx \mu$, 即在费米面附近时达到极大值, 即系统偏离平衡最远.

图 3 给出了 λ 与 g 的依赖关系. 由图可知 g 变小时, λ 随之变化; 当 $g \rightarrow 0$ 时, $\lambda \rightarrow 1$, 即无相互作用

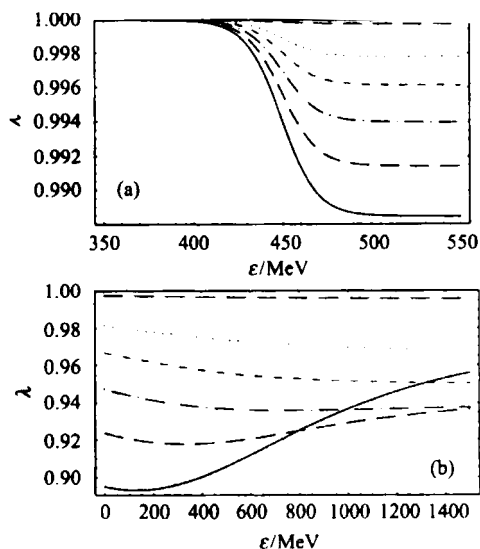


图 3 (a) 当 $T = 10\text{MeV}$, $\mu = 450\text{MeV}$ 时, 系统动力学参数 g 变化, 系统分布函数在二级近似偏离因子与能量 ϵ 的函数图像 $g = 0.05, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35$ (由上至下).
(b) 当 $\mu = 50\text{MeV}$, $T = 450\text{MeV}$ 时, 系统动力学参数 g 变化, 系统分布函数在二级近似偏离因子与能量 ϵ 的函数图像 $g = 0.05, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35$ (由上至下).

时, 为平衡分布.

总之, 本文从 QGP 动力论出发, 忽略自旋和碰撞效应, 在半经典极限下求解了 QGP 动力论方程, 得到了二级近似下的夸克(反夸克)的分布函数以及偏离因子的物理表示, 分析了在两种有特别物理兴趣情况下它们的特征, 结果清楚表明, 对于高温低化学势区, 在 $\epsilon = T(\ln 1.86481) + \mu$ 时, 而对于低温高化学势区, 在费米面附近(即 $\epsilon \approx \mu$) 的夸克和反夸克在色场涨落扰动下偏离平衡较远.

参考文献 (References)

- 1 Th Elze H, Heize U. Phys. Rep., 1989, **183**:81
- 2 Eskola K J, WANG X N. Phys. Rev., 1994, **D49**:1284
- 3 Bodeker D. Phys. Lett., 1998, **B426**:351; Nucl. Phys., 2000, **B570**:326
- 4 Arnold P, Son D, Yaffe I. G. Phys. Rev., 1999, **D59**:105020; Phys. Rev., 1999, **D60**:025007
- 5 Blaizot J P, Iancu E. Nucl. Phys., 1999, **B557**:183; Nucl. Phys., 2000, **B570**:326
- 6 Heinz U. Phys. Rev. Lett., 1983, **51**:351; Ann. Phys., 1985, **161**:48
- 7 Blaizot J P, Iancu E. Nucl. Phys., 1994, **B417**:608
- 8 Kelly P F, LIU Q, Lucchesi C et al. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**:3461
- 9 ZHANG Xiao-Fei, LI Jia-Rong. Ann. Phys. (N. Y.), 1996, **250**:433

Distribution Function for Fermions in Quasi-equilibrium QGP*

YANG Fang ZHOU Yun-Qing LI Jia-Rong

(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract Based on the kinetic theory, the distribution function for fermions in quasi-equilibrium QGP, which is perturbed by the fluctuation of the color field, has been obtained. Furthermore, the physical bases that decide the departure factor are analyzed. The characteristics of the departure factor in high-temperature-low-density and low-temperature-high-density are also discussed.

Key words quark gluon plasma(QGP), quasi-equilibrium, kinetic theory, relativistic heavy ion collisions