

宇宙重新加热能标对微波背景辐射效应的研究*

巩小博^{1,2} 冯波² 王秀莲^{2;1)}

1 (北京大学物理系 北京 100871)

2 (中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 研究了暴涨宇宙学中重新加热能标 ρ_{rh} 的不确定性对原初谱和宇宙微波背景辐射(CMB)的效应,并着重指出了在谱指数跑动大的模型中 CMB 观测可以给出 ρ_{rh} 一个很强的限制.

关键词 原初扰动谱 重新加热 宇宙微波背景(CMB) 辐射

1 引言

近年来,大量关于宇宙微波背景(CMB)辐射和大尺度结构(LSS)方面的观测有力地支持了暴涨宇宙模型.对于单场暴涨模型,一般势函数可以写成 $V(\phi) = V_0 f(\phi/\mu)$,其中 $V_0^{1/4}$ 和 μ 为具有质量量纲的参数, f 为暴涨子的一般函数.对于一个给定的模型, V 是一定的.当初值 ϕ_i 和 $\dot{\phi}_i$ 已知时,如果知道暴涨开始时标度因子 a 的值 a_i ,就可以由背景方程组

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (1)$$

$$3M_{\text{pl}}^2 H^2 = V + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (2)$$

确定 ϕ 和 a 在任意时刻的值.上面两式中 $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ 为哈勃常数,“ \cdot ”表示对时间求导,“ $'$ ”表示对 ϕ 求导.该模型的扰动方程为

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \left(V'' + \frac{k^2}{a^2}\right)\delta\phi_k = 0. \quad (3)$$

通常假定暴涨开始时宇宙处于 Bunch-Davis 真空态,这样就给定了 $\delta\phi_k$ 及其导数的初始条件,再将方程(1)和(2)得出的背景量 H 和 a 代入上式就确定了 $\delta\phi_k$ 的演化,从而完全确定了原初扰动谱 $P_S(k)$.

但是 a 的初值 a_i 我们并不知道,只能从今天的 a_0 , H_0 来确定.引入一个量 N ,称为 e-fold 数,它定

义为从某一时刻 t 到其后的另一时刻 t_2 哈勃常数 H 对时间的积分

$$N \equiv \int_t^{t_2} H(t) dt. \quad (4)$$

假如我们知道在暴涨过程中某一尺度 k 从刚刚离开视界到暴涨结束时的 e-fold 数 $N(k)$,那么由 $k = aH$ 可以确定该尺度离开视界时 a 的值,由

$$N = \int_t^{t_{\text{end}}} H(t) dt = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a}, \quad (5)$$

就能得到暴涨结束时刻 a 的值 a_{end} ,再根据方程(1),(2)就可以得到 a 的初值 a_i .

一个物理的波数(physical wavenumber) k 从刚刚超出视界到暴涨结束所经历的 e-fold 数 $N(k)$ 为^[1,2]

$$N(k) = 62 - \ln \frac{k}{a_0 H_0} - \ln \frac{10^{16} \text{ GeV}}{V(k)^{1/4}} + \ln \frac{V(k)^{1/4}}{V_{\text{end}}^{1/4}} - \frac{1}{3} \ln \frac{V_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{rh}}^{1/4}}, \quad (6)$$

其中 $V(k)$, V_{end} 分别为 $k = aH$ 时和暴涨结束时的暴涨势能, ρ_{rh} 是宇宙重新加热后的能量密度,通常取 $a_0 = 1$.常用的方法是,确定一个对应 COBE 卫星观测的尺度 $k_{\text{COBE}} \approx 7.0 a_0 H_0^{-1}$ 与 N_{COBE} 的关系.3 个未确定的能标 $V(k_{\text{COBE}})$, $V_{\text{end}}^{1/4}$ 和 $\rho_{\text{rh}}^{1/4}$ 给出一个典型的范围 $N(k_{\text{COBE}}) = 40 \sim 60$ ^[1],如果存在热暴涨(thermal inflation)^[3],这个范围甚至可能是 $N(k_{\text{COBE}}) = 0 \sim 60$.

2003-05-09 收稿

* 国家自然科学基金(10047004)资助

1) E-mail: wangxl@mail.ihep.ac.cn

一个确定的暴涨模型与 CMB 观测数据的拟合可以给出 $V(k_{\text{COBE}})$ 的估计值^[4,5],但是今天的观测尚不能对重新加热能标给出较强的限制. 唯象上, $\rho_{\text{reh}}^{1/4}$ 在 $1\text{MeV}-10^{16}\text{GeV}$ 范围内都是允许的, 根据方程 (6), 不同的 N_{COBE} 取值可以相差大约 15. 这样, 模型预言的原初扰动谱 $P_s(k)$ 及其对 CMB 的效应都存在一个不确定性.

2 不确定性对原初扰动谱的效应

原初扰动谱的一般形式可以写为

$$P_s(k) = Ak^{n_s(k)-1}, \quad (7)$$

其中 $n_s(k)$ 是谱指数. 改变 $N(k_{\text{COBE}})$ 的效果跟 $P_s(k)-k$ 图像水平平移的效果完全类似. 如果原初扰动谱是标度不变的谱, 即 $n_s(k) - 1 = 0$, 这个平移不改变任何结果. 但是只要 $P_s(k)$ 是倾斜的, 取 $a_1 H_1$ 或 $a_2 H_2$ 等于 k_{COBE} 将会整体地改变 $P_s(k)$ 的值. 如果 $n_s(k)$ 是标度不变的, k_{COBE} 的不同取值会让 $P_s(k)$ 变为 $cP_s(k)$. 其中 c 是一个常数. 这一改变等价于在 (7) 式中将 A 变为 cA . 在图 1 中给出了 N_{COBE} 的不同选择所带来的效应. 假定哈勃常数 H 在所示尺度保持不变, 那么即使 $P_s(N)$ 可以完全确定, $N_{\text{COBE}} = 50$ 或 60 也会给出完全不同的 $P_s(k)$ 值.

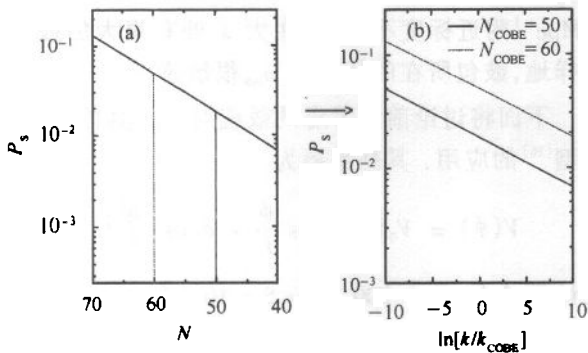


图 1 (a):原初扰动谱 P_s 作为 e-fold 数 N 的函数;
(b):原初扰动谱作为波数 k 的函数
图中给出了不同的 N_{COBE} 对应的原初扰动谱.

当 n_s 是常数, 并且引力波的影响可以忽略时, Bunn 和 White^[6] 对 COBE 观测数据的拟合给出 $|\delta_H(k_{\text{COBE}})| = 1.94 \times 10^{-5} \times \Omega_0^{-0.785-0.05\ln\Omega_0} \times \exp[-0.95(n_s - 1) - 0.169(n_s - 1)^2]$. (8) 误差不超过 10%, 其中 Ω_0 是今天的宇宙密度参数,

$$\delta_H(k) = \frac{2}{5} \frac{g(\Omega_0)}{\Omega_0} P_s^{1/2}(k), \quad (9)$$

$$g(\Omega_0) = \frac{5}{2} \Omega_0 \left(\frac{1}{70} + \frac{209\Omega_0}{140} - \frac{\Omega_0^2}{140} + \Omega_0^{4\eta} \right)^{-1}, \quad (10)$$

$g(\Omega_0)/\Omega_0$ 的误差不超过 5%. 对于给定的 n_s 和 Ω_0 , 这个结果对 $P_s(k_{\text{COBE}})$ 有很强的限制. 对单场暴涨模型 $V = V_0 f(\phi/\mu)$, 有

$$P_s(k) \propto \frac{V^3}{V_*^2} \propto V_0, \quad (11)$$

其中 $V_* \equiv \partial V / \partial \phi$. 对不同的 N_{COBE} , COBE 归一会使 V_0 取不同的值. 例如 $n_s = 0.84$, $\Delta N = 15$ 时, 会让 V_0 的大小发生 $e^{\Delta N \times (1 - n_s)} = e^{15(1 - 0.84)} \approx 11$ 倍的变化.

当前的暴涨理论还不能给出 V_0 的确定的值. 通常 V_0 被用作拟合大尺度结构和 CMB 的观测数据的自由参数. 在 n_s 是常数的情况下, N_{COBE} 的不确定性所引起的效果会完全被 COBE 归一抵消. 但只要 $dn_s/d\ln k \neq 0$, 取不同的 $N(k_{\text{COBE}})$ 所对应的两个归一后的原初扰动谱必然是有区别的. 关于这一类, 将在下一节详细地讨论.

3 不确定性对 CMB 的效应

现在研究这个不确定性对宇宙微波背景辐射谱产生的影响. CMB 各向异性的第 1 个多极矩 C_l 与角关联函数的关系为

$$\langle \Delta(n_1) \Delta(n_2) \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l[\cos(n_1 \cdot n_2)] \quad (12)$$

对标量场扰动引起的温度涨落的多级矩 C_l^S

$$C_l^S \equiv \frac{2\pi}{l(l+1)} \bar{C}_l = \frac{4\pi}{(2l+1)} \int \frac{dk}{k} T_l^2(k) P_s(k) \quad (13)$$

其中 $T_l(k)$ 是转移函数, $P_s(k)$ 是暴涨产生的原初标量扰动谱. 为了简单起见, 下面的研究采用 Wang 等人^[7] 的一次拟合给出的数据: $h = 0.64$, $\Omega_A = 0.66$, $\Omega_b h^2 = 0.020$ 和 $\Omega_k = 0$, 并假设张量的贡献可以忽略.

首先, 当 n_s 的跑动很小时, ρ_{reh} 的不确定很难给 CMB 带来可观测效应. 在图 2 中给出了一个例子.

$$P_s(k) = A (k/k_*)^{0.91-1-0.001\ln(k/k_*)}. \quad (14)$$

其中常数 A 是可归一的常数, k_* 是与 k 有相同量纲的一个参数. C_{0l} 表示 C_l 在 $N_{\text{COBE}} = N_*$ 时的值. 为

了比较差别大小,在图中给出了 cosmic variance 限 (它的物理意义在于:假设 C_l 对应理想的真实情况, CMB 观测的误差将不可能小于 $\Delta\tilde{C}_l$),其中^[8-10]

$$\Delta\tilde{C}_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}} \tilde{C}_l. \quad (15)$$

图 2 中,两条特定的线分别代表 $N'_{\text{COBE}} = N_{\star} + 15$ 和 $N_{\star} - 15$,当 $l \leq 2000$ 时,它们都在 C_{0l} 的 cosmic variance 范围之内,因而与 C_{0l} 难以区分. 我们同样检验了在方程(14)中改变 n_{\star} 的效果,(14)式中 $n_{\star} = 0.91$,但对 n_{\star} 取别的值, $0.84 < n_{\star} < 1.06$,结果没有什么改变. 在很多 $dn_s/d\ln k$ 很小的模型中,比如混沌暴涨模型和自然暴涨模型,如果 V_0 可以当做一个自由参数,那么由重新加热能标的不确定性所带来的效应是可以忽略的.

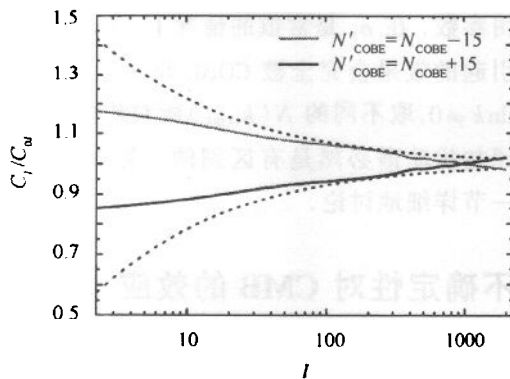


图 2 C_l 与 C_{0l} 的比值

C_{0l} 是 $n_s(k_{\text{COBE}}) = 0.91$ 且 $dn_s/d\ln k = -0.002$ 所对应的 C_l 值. 两条点线之间是 C_{0l} 的 cosmic variance 所允许的范围.

下面考虑一个原初扰动谱,它具有大的跑动谱指数: $dn_s/d\ln k = -0.022$:

$$P_s(k) = A(k/k_{\star})^{1.014-1-0.011\ln(k/k_{\star})}. \quad (16)$$

在 CMB 和 LSS 能够观测到的尺度范围内 ($k = 3 \times 10^{-4} - 6\text{hMpc}^{-1}$), 方程(16)所示的 $P_s(k)$ 在 $k_{\star} = k_{\text{COBE}}$ 时, n_s 从 1.06 变化到 0.84^[11]. 基于 $n_s = 0.91^{+0.15}_{-0.07}$ ^[7], 可以看出唯象上谱指数在此范围内跑动的谱不与观测矛盾. 在图 3 中, C_{0l} 表示 C_l 在 $k_{\text{COBE}} = k_{\star}$ 时的值, 两条虚线是它的 cosmic variance 范围. 从图中可以看出这个 C_{0l} 很难与具有常数谱指数 $n_s = 0.97$ 的谱区别开来. 在图中同样可以看到, 如果 A 是自由参数, N_{COBE} 数值改变 1 不会引起 cosmic variance 之外的差异. 但 N_{COBE} 的变化大于 10 时, 即 n_s 整体上大于 1.06 或小于 0.84, 这个谱就会被观测排除.

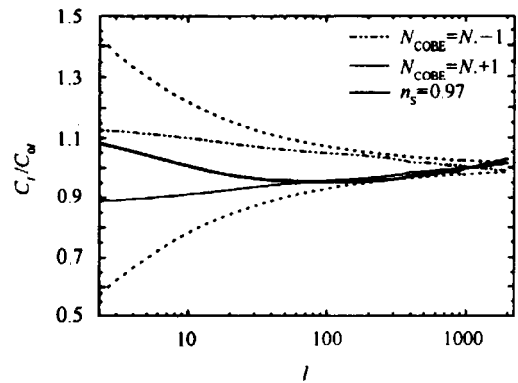


图 3 C_l 与 C_{0l} 的比值

C_{0l} 是 $n_s(k_{\text{COBE}}) = 1.014$ 且 $dn_s/d\ln k = -0.022$ 时的 C_l 值. 两条点线之间是 C_{0l} 的 cosmic variance 所允许的范围.

值得指出,有明显标度依赖性的原初扰动谱曾被用来解释许多观测现象: 比如在 $k \sim 0.05\text{Mpc}^{-1}$ 处观测到的特征^[12,13]; 能够部分的解决冷暗物质 (CDM) 模型在小尺度上的困难, 如星系暗晕的密度和矮星密度问题^[14]. 但这样的谱对 $N(k)$ 的变化很敏感, $N(k)$ 有一个小的变化就能让这样的谱被目前的观测所排除. 由于 N_{COBE} 的不确定性, 谱上有明显特征的位置很容易被移到完全不同的位置上去, 15 个 e-fold 数的不确定甚至可以让一个特征从解释观测所需要的位置移到 CMB 和 LSS 不相关的尺度.

在被用来解决 CDM 模型在小尺度上的困难的 BSI^[15] 模型中, 要求 $P_s(k)$ 在尺度 $k = 3 \times 10^{-4} - 6\text{hMpc}^{-1}$ 附近标度不变, 并在大 k 处有很大的鼓包, 同样地, 鼓包所在的位置对 ρ_{reh} 很敏感.

下面将讨论前面考虑的效应对一个具体的暴涨模型^[16] 的应用. 其暴涨势为

$$V(\phi) = V_0 \left(1 + \cos \frac{\phi}{f} + \delta \cos \frac{M\phi}{f} \right) \quad (17)$$

在计算中取 $M = 300$, $\delta = 5 \times 10^{-5}$ 和 $f = 0.4 M_{\text{pl}}$. $N > 50$ 时, 慢滚条件满足得很好. 得到慢滚近似下的功率谱:

$$P_s(k) = \frac{8}{3M_{\text{pl}}^4} V(k)/\epsilon(k) \quad (18)$$

其中慢滚参数 ϵ :

$$\epsilon = \frac{M_{\text{pl}}^2}{16\pi} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2$$

用上面曾经提到的宇宙学参数的背景值, COBE 归一预言: 在 k_{COBE} 附近,

$$V(k)^{\frac{1}{4}} \approx 6.4 \epsilon^{\frac{1}{4}} \exp[-0.95(n_s - 1)]$$

$$2 - 0.169(n_s - 1)^2/2] \times 10^{16} \text{ GeV}. \quad (20)$$

对于 $0.84 < n_s < 1.06$, 指数因子可以忽略, 从而 $V(k)^{\frac{1}{4}} \approx 6.4\epsilon^{\frac{1}{4}} \times 10^{16} \text{ GeV}$. 在图 4 中, 由于哈勃常数 H 在 $N > 40$ 的情况下在图示尺度上的变化不超过百分之一, 因此有 $d \ln k \approx dN$. $V(N)$ 在 $N > 40$ 时几乎为常数, 并有 $V^{1/4}(N > 40)/V_{\text{end}}^{1/4} \approx 2.0$. 目前 CMB 和 LSS 所观测到的尺度对应的最小的 k 是 $k_0 \approx H_0$, 由以上分析及式 (6) 可得到最大可能的 $N(k_0)$ 值是

$$N(k_0) \approx 62 - \ln\left(\frac{10^{16} \text{ GeV}}{6.4\epsilon \times 10^{14} \text{ GeV}}\right) + \ln 2 \approx 60.0, \quad (21)$$

其中 $\epsilon \sim 10^{-8}$. 相应的谱指数是 $n_s(k_0) \approx 0.96$. 从图 4 可以看出, 原初扰动谱上 $N(k_0) > 60.0$ 的区域仍然能很好的满足目前的 CMB 观测, 但是模型的细节排除了这种可能. 在这个图中, $N = 52.6$ 对应 $n_s = 0.84$. 由于 $n_s(k_0) \leq 0.84$ 已经被目前的观测数据所排除, 要求 $n_s(k_0) > 0.84$ 给出 $\rho_{\text{rh}}^{1/4} > 10^5 \text{ GeV}$.

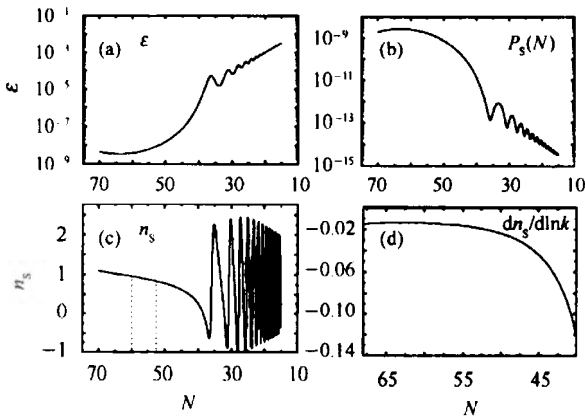


图 4 慢滚参数 ϵ , 谱 P_s , 标量谱指数 n_s 及其跑动 $dn_s/d \ln k$ 随 e-fold 数 N 的变化

选取的暴涨模型: $V(\phi) = V_0 \left(1 + \cos \frac{\phi}{f} + \delta \cos \frac{M_\#}{f} \right)$, 模型参数为: $M = 300, \delta = 5 \times 10^{-5}, f = 0.4 M_{\text{pl}}$. (c) 中两条虚线之间的区域是这个模型和目前对 $k_0 = H_0$ 的观测所允许的范围.

对于超引力暴涨模型, 为了避免产生太多的引力子, 需要 $\rho_{\text{rh}}^{1/4} < 10^{10} \text{ GeV}^{[17]}$, 即 $N(k_0) < 56.5, n_s(k_0) \leq 0.91$. 如果后来发生热暴涨的话, $N(k_0)$ 可以变得很小, 但是, 这样的谱不足以满足目前的 CMB 观测数据. 如图 5 所示, 只有在两条点线之间的狭窄区域是允许的. 在这个范围中, 谱具有很大的跑动 $|dn_s/d \ln k| \sim 0.01$, 这样的 n_s 是目前的数据所允许的. 从图 6 可以看出, 它的行为与 $n_s = 0.9$

的常数谱非常类似, 而且这样的倾斜谱展示了解决 CDM 小尺度困难的可能.

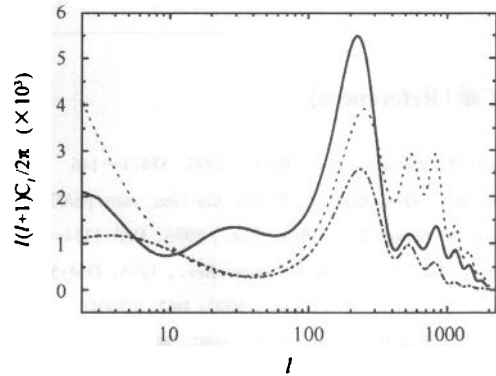


图 5 微波背景各向异性角功率谱
假设在方程 (17) 所示的暴涨之后存在热暴涨, 从左上方到左下方的 3 条线依次代表 $N(k_{\text{CMB}}) = 37, 27$ 和 32 时的角功率谱.

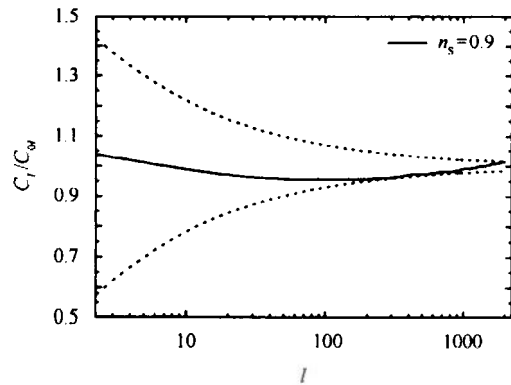


图 6 C_l 与 C_{0l} 的比值
 C_{0l} 是图 4 所示的 $P_s(N)$ 在 $N(k_0) \approx 60$ 时的值.

4 小结

本文研究了宇宙重新加热能标 ρ_{rh} 的不确定性对原初谱和 CMB 的效应. 结论是: ρ_{rh} 的不确定性为从暴涨势得到 $P_s(k)$ 带来不确定性. 这为暴涨参数 V_0 引入了额外的简并性, 如果不考虑这个简并, 观测数据可以给出 V_0 一个很强的限制^[18]. 对于 $dn_s/d \ln k$ 足够小的模型, 假设 V_0 可以任意归一, 这个不确定的效果可以忽略. 但对于有明显的标度依赖性的谱的模型, 重新加热的不确定性的效应可能非常大. 以方程 (17) 所示的暴涨模型为例, 指出根据观测数据对这个不确定性的限以得到对重新加热温度的限制. 最后要指出的是关于这个不确定性的一些方面在文献 [4, 5, 19, 20] 中有所提及, 但与这些

文献相比,我们更着重于在重新加热温度的不确定性以及对 ρ_{reh} 的限制.

作者感谢张新民教授对本文的悉心指导;文中的计算用到了 CMBFAST 程序^[21],一并致谢.

参考文献 (References)

- 1 Lyth D H, Riotto A. Phys. Rept., 1999, **314**:1—146
- 2 FENG Bo, GONG Xiao-Bo, WANG Xiu-Lian. astro-ph/0301111
- 3 Lyth D H, Stewart E D. Phys. Rev., 1996, **D53**:1784—1798
- 4 Bunn E, Liddle A, White M. Phys. Rev., 1996, **D54**:5917—5921
- 5 Lyth D H, Covi L. Phys. Rev., 2000, **D62**:103504(1—13)
- 6 Bunn E, White M. Astrophys. J., 1997, **480**:6—21
- 7 WANG X, Tegmark M, Zaldarriaga M. Phys. Rev., 2002, **D65**:123001(1—14)
- 8 White M et al. Astrophys. J., 1993, **418**:535—561
- 9 Zalsarriaga M, Seljak U. Phys. Rev., 1997, **D55**:1830—1840
- 10 Kamionkowski M, Kosowsky A, Stebbins A. Phys. Rev., 1997, **D55**:7368—7388
- 11 Tegmark M, Zaldarriaga M. astro-ph/0207047
- 12 Lesgourgues J, Polarski D, Starobinsky A A. Mon. Not. R. Astron. Soc., 1998, **297**:769—776; Barandela F A et al. Astrophys. J., 2001, **559**:1—10
- 13 Griffiths L M, Silk J, Zaroubi S. astro-ph/0010571
- 14 Kamionkowski M, Liddle A R. Phys. Rev. Lett., 2000, **84**:4525—4528; Zentner A R, Bullock J S. astro-ph/0205216
- 15 Starobinsky A A. JETP. Lett., 1992, **55**:489—494
- 16 WANG X, Feng B, LI M. astro-ph/0209242
- 17 Sarkar S. Rep. Prog. Phys., 1996, **59**:1493—1508
- 18 Moroi T, Takahashi T. Phys. Lett., 2001, **B503**:376—388
- 19 Chung D J H et al. Phys. Rev., 2000, **D62**:043508(1—19)
- 20 Burgess C P et al. hep-th/0210233
- 21 Seljak U, Zaldarriaga M. Astrophys. J., 1996, **469**:<http://cmbfast.org>

A Study on the Effect of Reheating Energy Scale on CMB *

GONG Xiao-Bo^{1,2} FENG Bo² WANG Xiu-Lian^{2;1)}

1 (Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

2 (Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China)

Abstract Inflation plays a significant role in interpreting current observations. Despite the success of inflation theory, the reheating energy scale ρ_{reh} is largely uncertain today. This consequently induces uncertainty to the primordial spectrum when achieving primordial spectra from inflation models. In this paper, we study the effects of this uncertainty on the primordial spectrum and cosmic microwave background (CMB) radiation. For the primordial spectra with small running indices, our result shows that the effect is negligible if the inflation parameter V_0 can be normalized freely. But for models with large running indices, we find that ρ_{reh} can be highly restricted by the CMB observations.

Key words primordial perturbation spectrum, reheating, cosmic microwave background(CMB) radiation

Received 9 May 2003

* Supported by NSFC(10047004)

1) E-mail: wangxl@mail.ihp.ac.cn