第27卷 第7期 高能物理与核物理 Vol.27, No.7
2003年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jul., 2003

束流线性耦合效应的初步研究*

夏国兴[1)] 夏佳文 赵红卫 杨建成 武军霞 刘伟 殷学军 魏宝文

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 在储存环的束流传输系统中,斜四极场和纵向螺线管场是引起束流线性耦合的主要原因.由于这种耦合,使得束流的幅度和发射度发生交换,引起束流横向包络的增大,严重的将造成束流损失.从Betatron运动方程出发研究了斜四极场和螺线管场存在时束流的幅度耦合效应,分析了斜四极场存在时束流发射度的变化.

关键词 斜四极场 线性耦合 Betatron运动

1 引言

在储存环中,束流在水平方向和垂直方向的耦合是影响束流品质的一个关键因素.耦合可以直接引起束流在垂直方向发射度的增加、Betatron运动的频移以及机器动力学孔径的减小,造成束流的损失.对于同步辐射装置和对撞机,耦合也使光源和对撞机亮度减小.因此在储存环中,必须设法计算出束流耦合的大小.对于加速器的束流传输系统,斜四极场以及螺线管纵向场是引起耦合的主要来源,并且这种效应已经在CERN的质子同步加速器(PS)上得以证实[1].一般地,它们引起的耦合称为线性耦合;另外由于空间电荷效应以及束-束相互作用引起的耦合称为非线性耦合.耦合发生后,使得加速器束流品质变坏.为了去除耦合,经常采用斜四极场产生的附加场来补偿这种效应.本文从Betatron运动方程出发研究斜四极场和螺线管场存在时束流的传输特性,得到了存在线性耦合时束流幅度的交换,分析了斜四极场存在时束流横向发射度的交换.

2 束流的耦合运动方程

在不考虑耦合发生时,粒子在横向的Betatron运动可以用Hill方程来描述,即

$$\frac{d^2 x}{d s^2}+K_x(s)x=0, \tag{1}$$

其中 $$K_x(s)=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{B\rho}\left[\frac{\partial B_y}{\partial x}\right]_0,$$

$$\frac{d^2 y}{d s^2}+K_y(s)y=0, \tag{2}$$

其中 $$K_y(s)=-\frac{1}{B\rho}\left[\frac{\partial B_y}{\partial x}\right]_0,$$

这里 s 为束流的传输方向,x、y 分别表示水平方向和垂直方向的轨道偏离,$K_x(s)$, $K_y(s)$ 分别为水平和垂直方向的磁聚焦常数.$B\rho$ 为机器的磁刚度.为了使耦合问题讨论方便,利用机器平滑近似条件[2],假设磁聚焦作用平均到储存环上,得到单粒子运动的简谐运动方程为[3]

$$x''+\Omega_x^2 x=0, \tag{3}$$

$$y''+\Omega_y^2 y=0, \tag{4}$$

这里 $\Omega_x\left(=\frac{Q_x}{R}\right)$ 和 $\Omega_y\left(=\frac{Q_y}{R}\right)$ 分别为粒子在水平方向和垂直方向的自由振荡频率,R 为机器的半径.斜四极场和螺线管同时存在时,粒子受到的作用力为

2002-09-24 收稿

* 国家重大科学工程HIRFL-CSR冷却储存环项目资助

1) E-mail: xiagx@impcas.ac.cn

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = qv_s\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial B_x}{\partial x}x \\ \frac{\partial B_y}{\partial y}y \\ B_s\end{pmatrix}\approx$$

$$qv_sB\rho[k_s(x\hat{y}+y\hat{x})+b(y'\hat{x}-x'\hat{y})], \tag{5}$$

其中 q 为带电粒子的电荷量，v_s 为粒子的纵向速度，$k_s=\frac{1}{B\rho}\left[\frac{\partial B_x}{\partial x}\right]_0 - \frac{1}{B\rho}\left[\frac{\partial B_y}{\partial y}\right]_0$，$b=\frac{B_s}{B\rho}$分别为斜四极场和纵向螺线管场的聚焦强度，$\hat{x}$，$\hat{y}$ 分别表示 x 和 y 方向的单位矢量. 由此可见，斜四极场主要引起位置耦合，而螺线管场主要引起速度耦合. 因此，粒子的横向耦合运动方程可以分别写为

$$x''+\Omega_x^2x=-by'-k_sy, \tag{6}$$

$$y''+\Omega_y^2y=bx'-k_sx. \tag{7}$$

其尝试解可以写为

$$x=X(s)e^{j\Omega_xs}, \tag{8}$$

$$y=Y(s)e^{j\Omega_ys}, \tag{9}$$

其中 $X(s)$ 和 $Y(s)$ 为粒子自由振荡幅度函数. 将(8)和(9)式分别代入方程(6)和(7)，得到

$$X''+2j\Omega_xX'=e^{-j(\Omega_x-\Omega_y)s}[-bY'-(k_s+jb\Omega_x)Y], \tag{10}$$

$$Y''+2j\Omega_yY'=e^{j(\Omega_x-\Omega_y)s}[bX'-(k_s-jb\Omega_y)X], \tag{11}$$

假设束流幅度函数为慢变化，且水平和垂直方向的频率近似相等，即 $\Omega_x\approx\Omega_y$，忽略二阶项，仅保留扰动的最低阶项，则有

$$X'=j\frac{e^{-j\delta s}}{2\Omega}(k_s+jb\Omega)Y, \tag{12}$$

$$Y'=j\frac{e^{j\delta s}}{2\Omega}(k_s-jb\Omega)X, \tag{13}$$

(12)和(13)式即为粒子振荡幅度的耦合方程，其中，$\delta=\Omega_x-\Omega_y$，$\Omega=(\Omega_x+\Omega_y)/2$. 为了求解此方程，对(12)式求导，有

$$X''=(-j\delta Y+Y')j\frac{e^{-j\delta s}}{2\Omega}(k_s+jb\Omega), \tag{14}$$

消去 Y 得到

$$X''+j\delta X'+\frac{b^2\Omega^2+k_s^2}{4\Omega^2}X=0, \tag{15}$$

可求得解为

$$X=C_1e^{-\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}+C_2e^{\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}, \tag{16}$$

这里 $\eta=\sqrt{\delta^2+(k_s/\Omega)^2+b^2}$，$C_1$ 和 C_2 为任意复系数. 类似的，在 y 方向有

$$Y=-\frac{\Omega(\eta+\delta)}{k_s+jb\Omega}C_1e^{-\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}+\frac{\Omega(\eta-\delta)}{k_s+jb\Omega}C_2e^{\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}, \tag{17}$$

为了使粒子的横向振荡幅度函数的形式对称，引入复系数 C_3，且

$$C_3=-\frac{\Omega(\eta+\delta)}{k_s+jb\Omega}C_1=-\frac{(\eta+\delta)(k_s-jb\Omega)}{\Omega((k_s/\Omega)^2+b^2)}C_1=$$

$$-\frac{(\eta+\delta)(k_s-jb\Omega)}{\Omega(\eta^2-\delta^2)}C_1=-\frac{k_s-jb\Omega}{\Omega(\eta-\delta)}C_1, \tag{18}$$

重写方程的解为

$$X=C_2e^{\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}-C_3\frac{\Omega(\eta-\delta)}{k_s-jb\Omega}e^{-\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}, \tag{19}$$

$$Y=C_3e^{-\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}+C_2\frac{\Omega(\eta-\delta)}{k_s+jb\Omega}e^{\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}. \tag{20}$$

将式(19)，(20)分别代入式(8)，(9)中，得到耦合运动方程的解为

$$x=e^{j\Omega_xs}\left(C_2e^{\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}-C_3\frac{\Omega(\eta-\delta)}{k_s-jb\Omega}e^{-\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}\right), \tag{21}$$

$$y=e^{j\Omega_ys}\left(C_3e^{-\frac{1}{2}j(\eta-\delta)s}+C_2\frac{\Omega(\eta-\delta)}{k_s+jb\Omega}e^{\frac{1}{2}j(\eta+\delta)s}\right). \tag{22}$$

利用机器的平滑近似条件，有

$$x=C_2e^{j(\Omega+\eta/2)s}\quad C_3\frac{(\eta-\delta)}{\sqrt{(k_s/\Omega)^2+b^2}}e^{j(\Omega-\eta/2+\phi)s} \tag{23}$$

$$y=C_3e^{j(\Omega-\eta/2)s}+C_2\frac{(\eta-\delta)}{\sqrt{(k_s/\Omega)^2+b^2}}e^{j(\Omega+\eta/2-\phi)s} \tag{24}$$

这里，$\tan\phi=\Omega b/k_s$，$\eta=\sqrt{\delta^2+(k_s/\Omega)^2+b^2}$ 对上式求模即为束流横向振荡的幅度函数

$$|X^2|=|C_2^2|+\frac{|C_3^2|(\eta-\delta)^2}{(k_s/\Omega)^2+b^2}+$$

$$\frac{2|C_2C_3^*|(\eta-\delta)}{\sqrt{(k_s/\Omega)^2+b^2}}\cos(\eta s-\phi), \tag{25}$$

$$|Y^2|=|C_3^2|+\frac{|C_2^2|(\eta-\delta)^2}{(k_s/\Omega)^2+b^2}-$$

$$\frac{2|C_2C_3^*|(\eta-\delta)}{\sqrt{(k_s/\Omega)^2+b^2}}\cos(\eta s-\phi). \tag{26}$$

因此，束流粒子的运动范围为

$$|X^2|+|Y^2|=\frac{2\eta}{(\eta-\delta)}(|C_2^2|+|C_3^2|). \tag{27}$$

设粒子初始时在 x 方向的位移为

$$C_3 = -C_2\frac{(\eta-\delta)\Omega}{k_s + \mathrm{j}b\Omega}, \tag{28}$$

则有

$$|X^2| = |C_2^2| + \frac{|C_2^2|(\eta-\delta)^4}{((k_s/b)^2+b^2)^2} + \frac{2|C_2^2|(\eta-\delta)^2}{(k_s/\Omega)^2+b^2}\cos(\eta s-\phi), \tag{29}$$

化简为

$$|X^2| = |C_2^2| + \frac{|C_2^2|(\eta-\delta)^4}{(\eta^2-\delta^2)^2} + \frac{2|C_2^2|(\eta-\delta)^2}{\eta^2-\delta^2}\cos(\eta s-\phi), \tag{30}$$

即最后得到幅度的变换为

$$|X^2| = \frac{2|C_2^2|(\eta^2+\delta^2)}{(\eta+\delta)^2} + \frac{2|C_2^2|(\eta-\delta)}{(\eta+\delta)}\cos(\eta s-\phi). \tag{31}$$

幅度模的深度定义为

$$R_m = \frac{|X^2|_{\min}}{|X^2|_{\max}} = \frac{\delta^2}{\eta^2}, \tag{32}$$

则幅度交换的波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\eta}, \tag{33}$$

表征在此波长时，水平和垂直方向发生一次完整的能量交换．一般地，为了研究耦合的大小，分别定义耦合系数为

$$C_q = \frac{R^2}{Q}\frac{1}{B\rho}\left[\frac{\partial B_x}{\partial x}\right]_0 = Rk_s/\Omega, \tag{34}$$

$$C_b = R\frac{B_s}{B\rho} = Rb, \tag{35}$$

$$C = \sqrt{C_q^2 + C_b^2}, \tag{36}$$

其中 C_q，C_b 和 C 分别表示斜四极场，螺线管场和总的耦合系数．且有 $\Delta = Q_x - Q_y = R\delta$，$Q = R\Omega$，根据以上关系，易得到耦合的波数为

$$Q_r = \sqrt{C_q^2 + C_b^2 + \Delta^2} = \sqrt{C^2+\Delta^2}, \tag{37}$$

耦合系数亦可以表示成

$$C = \frac{\sqrt{1-R_m}}{f_{rev}T}, \tag{38}$$

其中 T 为幅度互换周期，f_{rev} 为回旋周期．正常模式下的频率差值为 $\eta = \sqrt{\delta^2 + (k_s/\Omega)^2 + b^2}$，测量值用 tunes 值表示为 $\Delta_{mea} = \sqrt{\Delta^2 + C^2}$，且有 $(\Delta_{mea})_{\min} = |C|$．

3　斜四极场存在时束流发射度的变化

以下讨论没有耦合的束流注入到有耦合元件的机器中的情况．为了简便，假设只有斜四极场存在．在机器平滑近似下，粒子的 Betatron 运动方程为

$$x'' + \Omega_x^2 x = -k_s y,\ \Omega_x = \Omega + \delta/2, \tag{39}$$

$$y'' + \Omega_y^2 y = -k_s x,\ \Omega_y = \Omega - \delta/2, \tag{40}$$

将 (x,y) 坐标系旋转 α 角到 (u,v) 坐标系中[4]，即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{41}$$

当 $k_s + 4\delta\Omega\tan\alpha + k_s\tan^2\alpha = 0$，或 $\tan\alpha = \dfrac{\delta - \sqrt{\delta^2 + (k_s/b)^2}}{k_s/\Omega}$ 时，运动方程的耦合得以解除，新方程为

$$u'' + \Omega_u^2 u = 0,\ \Omega_u^2 = \Omega^2 + \frac{\Delta^2}{4} + \sqrt{\Omega^2\Delta^2 + k_s^2}, \tag{42}$$

$$v'' + \Omega_v^2 v = 0,\ \Omega_v^2 = \Omega^2 + \frac{\Delta^2}{4} - \sqrt{\Omega^2\Delta^2 + k_s^2}, \tag{43}$$

对应以上的运动方程，在两种坐标系下的束流发射度不变量分别为

$$x'' + \Omega_x^2 x = 0,\ \varepsilon_x = \langle x'^2/\Omega_x + \Omega_x x^2\rangle, \tag{44}$$

$$y'' + \Omega_y^2 y = 0,\ \varepsilon_y = \langle y'^2/\Omega_y + \Omega_y y^2\rangle, \tag{45}$$

$$u'' + \Omega_u^2 u = 0,\ \varepsilon_u = \langle u'^2/\Omega_u + \Omega_u u^2\rangle, \tag{46}$$

$$v'' + \Omega_v^2 v = 0,\ \varepsilon_v = \langle v'^2/\Omega_v + \Omega_v v^2\rangle, \tag{47}$$

初始分布的参数表示为

$$x = \frac{r_x}{\sqrt{\Omega_x}}\cos\theta_x,\ x' = r_x\sqrt{\Omega_x}\sin\theta_x,\ \varepsilon_x = \langle r_x^2\rangle, \tag{48}$$

$$\frac{r_y}{\sqrt{\Omega_y}}\cos\theta_y,\ y' = r_y\sqrt{\Omega_y}\sin\theta_y,\ \varepsilon_y = \langle r_y^2\rangle, \tag{49}$$

则新坐标系下的束流发射度可以表述为

$$\varepsilon_u = \frac{1}{2}\varepsilon_x\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_x} + \frac{\Omega_x}{\Omega_u}\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_y\left(\frac{\Omega_u}{\Omega_y} + \frac{\Omega_y}{\Omega_u}\right)\sin^2\alpha, \tag{50}$$

$$\varepsilon_v = \frac{1}{2}\varepsilon_x\left(\frac{\Omega_v}{\Omega_x} + \frac{\Omega_x}{\Omega_v}\right)\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_y\left(\frac{\Omega_y}{\Omega_v} + \frac{\Omega_v}{\Omega_y}\right)\cos^2\alpha, \tag{51}$$

发射度之和的比值为

$$\frac{\varepsilon_u + \varepsilon_v}{\varepsilon_x + \varepsilon_y} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{k_s}{\Omega^2}\right)^2\frac{1}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right)^2} + \cdots. \tag{52}$$

利用 $K = K_x = -K_y = \Omega^2$，得到在平滑近似条件下，由于斜四极场耦合所引起发射度的增长为

$$\frac{\varepsilon_u + \varepsilon_v}{\varepsilon_x + \varepsilon_y} = 1 + \frac{1}{8}\left(\frac{k_s}{K}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right)^2} + \cdots . \tag{53}$$

由此可见，在只有斜四极场存在时，发射度的变化并不很大．并且发射度的变化取决于斜四极场的聚焦强度和正常模式下四极场的聚焦强度之比，斜四极场聚焦强度愈大，由此引起的耦合发射度就越大．

4　结论

斜四极场和螺线管场是引起束流线性耦合的主要来源．通过分析在这一扰动条件下的粒子的Betatron运动方程，得到了在位置耦合和速度耦合条件下束流幅度的耦合量大小，分析了斜四极场存在时束流发射度的交换效应．一般在储存环中，由于耦合的系数并不很大，所以耦合引起的作用只有在粒子回旋多圈后才能显示出来．

参考文献(References)

1　Benedikt M et al. Proc. 7th EPAC, 2000

2　Bryant P J. A Simple Theory for Weak Betatron Coupling, CERN 94－01

3　LIU Qiu-Quan et al. Theory of Accelerator, Beijing: Atomic Energy Press, 1990 (in Chinese)
(刘遒泉等．加速器理论．北京:原子能出版社,1990)

4　Carli C, Cyvoct G. PS/AE/Note 2001－018, 2001

Investigation of Beam Linear Coupling

XIA Guo-Xing[1)]　XIA Jia-Wen　ZHAO Hong-Wei　YANG Jian-Cheng　WU Jun-Xia
LIU Wei　YIN Xue-Jun　WEI Bao-Wen

(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract　For the beam transport system in storage ring, linear coupling is mainly caused by skew quadrupole and longitudinal solenoid field. It leads to emittance exchange and beam envelope augment. By using betatron motion of single particle in the presence of skew quadrupole and longitudinal solenoid field, the effect of the beam linear coupling is preliminarily investigated. Beam emittance variation due to skew quadrupole is obtained too.

Key words　skew quadrupole, linear coupling, Betatron motion

Received 24 September 2002

* Supported by HIRFL-CSR Project, Lanzhou, China

1) E-mail: xiagx@impcas.ac.cn