

用逐次线性化法对储存环动力学孔径的解析研究*

杨建成^{1,2;1)} 夏佳文¹ 武军霞^{1,2} 夏国兴^{1,2} 刘伟^{1,2} 殷学军^{1,2}

1(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

2(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要 从逐次线性化法解粒子非线性 Betatron 振荡方程出发,对存在非线性六极场、八极场及六极场与八极场共存的粒子 Betatron 振荡方程进行研究.应用线性理论得出了粒子非线性 Betatron 振荡稳定性的判据,得到了动力学孔径的半解析表达式,分析了在小振幅下,导致粒子非线性不稳定性的另外一种机制——小振幅下,参量共振所引起的自激振荡.用此方法对实际 lattice 的动力学孔径进行了研究,所得结果与数值跟踪结果吻合得很好.

关键词 非线性 Betatron 振荡 逐次线性化 动力学孔径

1 引言

储存环设计中,一个重要的部分就是确保束流在相当长的时间内是被约束的,即不会丢失.在早期建加速器时,动力学孔径的研究并不重要,它通常都远大于加速器的物理孔径.随着新一代加速器的建成,如第三代同步辐射专用光源和超导对撞机有强度很大的六极铁和误差较大的超导线圈,都引入了极强的非线性,从而导致动力学孔径的急剧减小.为了获得好的束流品质,在设计储存环时,常常要研究影响动力学孔径的因素,进而提出改进动力学孔径的方法,最终使动力学孔径得到增大.动力学孔径的研究通常有解析研究和数值跟踪两大类.解析研究方法有共振近似^[1]、相空间畸变^[2-5]和 LIE 变换法^[6]等.由于实际储存环中各种扰动及误差高阶量的复杂性,使解析法研究有一定的局限性.但通过解析研究可以找出在非线性场存在时主导粒子运动的机制,从而提出改善动力学孔径的方法.这是数值模拟不可替代的.

2 逐次线性化法

通常研究粒子 Betatron 振荡的方法是从粒子运

动的 Hamiltonian 函数出发,用一系列的正则变换来求得新的独立于时间(或轨道弧长)的 Hamiltonian,再用微扰理论做进一步的研究.这里用逐次线性化法直接对粒子运动的微分方程进行求解.

考虑方程

$$L[x(s)] - \frac{1}{2}m(s)x^2(s) = 0, \quad (1)$$

这里 L 是微分算子

$$L = \frac{d^2}{ds^2} + g(s), \quad (2)$$

初始条件

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \quad (3)$$

以上是包含六极场的一维水平方向 Betatron 振荡方程^[7].这里, $g(s) = -k(s) = -\frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x}$ 是四极场的

场强系数, $m(s) = \frac{1}{B_0\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$ 是六极场的场强系数, B_0 为参考场(参考粒子在参考轨道上所受的二极场).

在实际应用中,当六极场的强度以及由六极场所引起的方程(1)的振幅的非线性部分相对线性部分(二极及四极场决定的部分)比较小时,可以将方程的解近似为如下线性方程

$$L[x^{(0)}(s)] = 0, \quad (4)$$

2003-02-20 收稿

* 国家九五重大科学工程——兰州重离子加速器冷却储存环(HIRFL-CSR)项目资助

1) E-mail: yangjch@impcas.ac.cn

由方程(4)得到的解叫做方程(1)的一阶近似解. 将方程(1)近似为方程(4)称为“第一次线性化”.

方程(4)是描述加速器中粒子线性 Betatron 振荡的 Hill 方程, 对于它, 文献[7]中已有详尽的描述. 当满足条件

$$|\text{Tr}M| \leq 2 \quad (5)$$

时, 它的解在 (x, x') 空间内为一椭圆曲线. M 是矢量 X_{n+1}, X_n 之间的传输矩阵

$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(0)'} \end{pmatrix}_{n+1} = M \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(0)'} \end{pmatrix}_n, \quad (6)$$

$\text{Tr}M$ 是矩阵 M 的迹. (6)式还可以写成 n 与初值 X_0 的函数^[9]

$$X_n^{(0)} = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(0)'} \end{pmatrix}_n = X_0 \cos(n\mu) + \frac{\sin(n\mu)}{\sin\mu} (M - I \cos\mu) X_0, \quad (7)$$

其中

$$\cos\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}M.$$

方程(4)的解 $x^{(0)}(s)$ 只是方程(1)在不考虑非线性效应时的近似解, 为了求得方程(1)的精确解, 可将 $x(s)$ 写为

$$x(s) = x^{(0)}(s) + u(s), \quad (8)$$

将(8)式代入(1)式化简可得关于 $u(s)$ 的方程

$$L(u) - m(s)x^{(0)}(s)u - \frac{1}{2}m(s)u^2 = \frac{1}{2}m(s)[x^{(0)}(s)]^2, \quad (9)$$

$u(s)$ 作为 $x(s)$ 解的一部分, 相对 $x^{(0)}(s)$ 而言较小, 所以可以略去 $u(s)$ 平方项, 将方程(9)近似为

$$L(u^{(0)}) - m(s)x^{(0)}(s)u^{(0)} = \frac{1}{2}m(s)[x^{(0)}(s)]^2, \quad (10)$$

称之为“第二次线性化”. (8)式相应地近似为

$$x(s) = x^{(0)}(s) + u^{(0)}(s), \quad (11)$$

此时, 方程(10)为线性的, 并且包含六极场成分. 从方程(10)解出 $u^{(0)}(s)$, 就可以得到方程(1)的二次线性化的解(11)式. 下面来讨论初值 $x^{(0)}(0)$, $u^{(0)}(0)$, $x^{(0)'}(0)$ 和 $u^{(0)'}(0)$ 的选取. 原则上, 上述初值的选取是任意的, 只要满足下述条件

$$x(0) = x_0 = x^{(0)}(0) + u^{(0)}(0), \quad (12)$$

$$x'(0) = x'_0 = x^{(0)'}(0) + u^{(0)'}(0) \quad (13)$$

即可. 在实际中, 为了解方程方便及与第一次线性化解的初值相吻合, 通常取初值

$$x^{(0)}(0) = x_0, x^{(0)'}(0) = x'_0,$$

$$u^{(0)}(0) = 0, u^{(0)'}(0) = 0.$$

上述初值要求在 $s=0$ 的邻域内方程(9)中的 $u(s)$ 平方项可以忽略不计(由于 u 非常小). 这样, 将方程(9)近似为方程(10)是合理的. 可以证明^[8], 选此类初值, 由(11)式求得的解, 可以精确到方程(1) Talor 级数解的四阶. 以上所描述的线性化过程可以推广到第三次、第四次及更高次, 当然解就越接近方程(1)的精确解, 但求解的过程也越复杂.

3 动力学孔径的理解

简单说, 动力学孔径是一个振幅的阈值, 粒子的振幅小于这个阈值时, 在一定时间内粒子不会丢失, 而超过这个阈值时, 粒子的 Betatron 振荡便失去约束, 运动不再稳定, 粒子不能完成在储存环中的绕行而丢失.

通常认为引起粒子非线性 Betatron 振荡振幅的阈值(动力学孔径)的基本机制是, 当振荡振幅很大时, 非线性部分变为决定方程解的主导项, 它引起振幅的自激振荡, 导致粒子丢失. 例如对如下的非线性递推关系

$$x_{n+1} = \lambda x_n^2, \quad (14)$$

其解为

$$x_{n+1} = x_0 (\lambda x_0)^{2^{n+1}-1}, \quad (15)$$

这里 x_0 为初值. 从上式可以看出, 当

$$|\lambda x_0| < 1 \quad (16)$$

时解有界. 也就是说, 对给定的 λ , 当 $x_0 > 0$ 时, 由方程(14)决定的系统的动力学孔径为

$$(x_0)_{\text{lim}} = \frac{1}{\lambda}. \quad (17)$$

当 x_0 大于 $(x_0)_{\text{lim}}$ 时, 非线性部分变为主导项, 发生自激振荡^[1], 粒子丢失. 这里, 粒子的丢失似乎完全是“大振幅效应”引起的. 在大振幅时, 由于非线性部分起主导作用, 所以不能用微扰理论来研究发生自激振荡的机制. 但对方程(1)描述的系统, 即使在小振幅, 非线性部分还不是主导项时也会发生自激振荡. 这种粒子在小振幅的不稳定性说明除了“大振幅效应”外, 还有一种导致粒子自激振荡的机制.

可以证明方程(10)的振幅阈值(动力学孔径)只与它的齐次方程

$$L(u^{(0)}) - m(s)x^{(0)}(s)u^{(0)} = 0 \quad (18)$$

有关^[9]. 此时, 由方程(18)决定的 $u^{(0)}$ 不再以 $m(s)$, $k(s)$ 的周期为周期, 但方程(18)可以写成矢量递推

关系

$$\begin{pmatrix} u_{n+1}^{(0)} \\ u_{n+1}^{(0)'} \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} u_n^{(0)} \\ u_n^{(0)'} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中 M_n 为一传输矩阵. 一般地, 当储存环磁铁周期结构的线性频率 Q 为有理数时, 也就是

$$Q = \frac{p}{q}, \quad p, q \text{ 为整数}. \quad (20)$$

根据参考文献[7]及(7)式可以证明, 此时 $x^{(0)}(s)$ 的周期为储存环磁铁结构周期的 q 倍, 方程(18)为对应于传输矩阵的 Hill 方程

$$R = \prod_{i=q-1}^0 M_i, \quad (21)$$

这里 M_i 为由方程(18)决定的与粒子第 i 次通过储存环磁铁结构所对应的传输矩阵. 根据线性理论^[7], 只要

$$|\text{Tr}R| \leq 2, \quad (22)$$

粒子运动是稳定的. 显然, R 的表达式包含初值 x_0 和 x'_0 , 所以此式可以作为确定粒子 Betatron 振荡振幅阈值(动力学孔径)的判据.

从以上过程可以看出导致粒子非线性不稳定性的另外一种机制是由(18)式决定的“波动矩阵” M_i 所引起的参量共振^[1]. 由于非线性效应, 即使振幅很小, 也有可能使 $|\text{Tr}R| > 2$, 产生自激振荡, 导致粒子丢失.

4 计算结果与分析

以上讨论研究了粒子 Betatron 振荡的逐次线性化法, 也就是: 1) 将线性频率 Q 用最简分式 p/q 表

$M_i =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{4}{L}\sin(\pi Q) - m_F(s)lx_i^{(0)F} & 1 - 2\sin(\pi Q) - \frac{L}{2}m_F(s)lx_i^{(0)F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ \frac{4}{L}\sin(\pi Q) + m_D(s)lx_i^{(0)D} & 1 + 2\sin(\pi Q) + \frac{L}{2}m_D(s)lx_i^{(0)D} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

这里 $x_i^{(0)F}$, $x_i^{(0)D}$ 分别表示第 i 次通过聚焦与散焦四极铁时线性 Betatron 振荡的振幅值. M_i 是将线性传输矩阵中的 $k(s)$ 用 $k(s) + m(s)x^{(0)}(x)$ 代替得到的, 将它代入

$$|\text{Tr}R| = \left| \text{Tr} \prod_{i=q-1}^0 M_i \right| \leq 2 \quad (26)$$

得到关于 $x^{(0)}$ 及 Q 的不等式. 对于给定的 Q 值, 利

示; 2) 计算矩阵 $R = \prod_{i=q-1}^0 M_i$; 3) 计算 $|\text{Tr}R|$, 并利用 $|\text{Tr}R| \leq 2$ 确定动力学孔径. 下面就不同的情况来研究动力学孔径.

4.1 只有六极场

储存环结构越复杂, q 越大, 计算 R 的难度就越大, 但对由 FODO 结构组成的储存环结构而言计算 R 相对简单. 下面就对由 FODO 结构组成的、每个 FODO 结构包含两个六极铁(SF, SD)且分别放在聚焦与散焦四极铁附近的储存环的动力学孔径进行研究.

如果进行薄透镜近似, 一个 FODO 结构的传输矩阵为^[10]

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_F & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

若先从直线节算起, 则有

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

其中 L 为一个 FODO 结构的长度, $|\delta_F| = |\delta_D| = 4\sin \frac{L}{2} = 4\sin(\pi Q)$, $\delta_{F,D} = k(s)l$, l 为磁铁元件长度, δ_F 取负, δ_D 取正, Q 为线性频率. 当考虑六极非线性场时, 由(18)及(24)式可得包含六极场的一个 FODO 结构的传输矩阵为

用(26)式即可求出使粒子稳定的初值 $x^{(0)}$ 的最大值(动力学孔径). 图 1 是当 $Q = 0.34 = \frac{17}{50}$, $L = 5.15\text{m}$, $m_F l = 0.127\text{m}^{-2}$, $m_D l = -0.133\text{m}^{-2}$ 时, $\text{Tr}R(x_0)$ 随 x_0 的变化曲线. 可以看出, 当 $\text{Tr}R(x_0) = -2$ 时, $x_0 = 0.0431\text{m}$, 而用数值跟踪所得结果为 $x_0 = 0.0407\text{m}$. 本文中用 MAD^[11] 进行数值跟踪, 跟踪圈数为 10^4 .

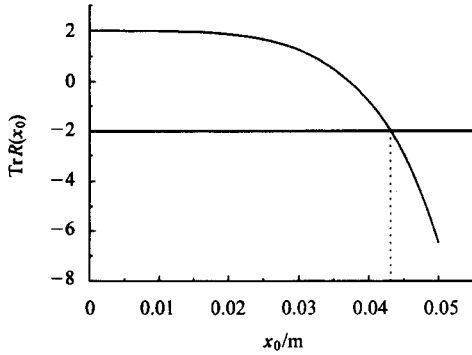


图 1 $\text{Tr}R(x_0)$ 随 x_0 的变化曲线

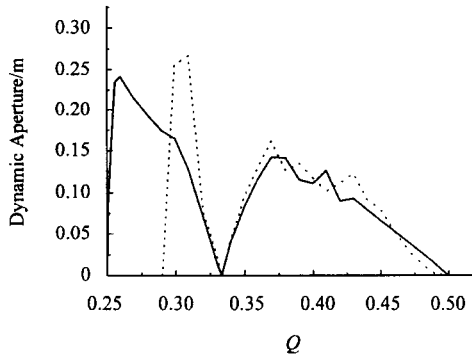


图 2 存在六极场时动力学孔径随 Q 的变化曲线
逐次线性化法求得的结果, ——MAD 跟踪 10^4 圈的结果.

图 2 是存在非线性六极场时,动力学孔径随 Q 的变化曲线. 其中 $L = 5.15\text{m}$, $m_F l = 0.127\text{m}^{-2}$, $m_D l = -0.133\text{m}^{-2}$. 由图可以看出两者在 $0.32-0.50$ 的频率范围内基本吻合,由于非线性六极场的存在,当 $Q = \frac{1}{3}$ 时,发生 $\frac{1}{3}$ 的整数倍共振,所以在 $Q = \frac{1}{3}$ 点动力学孔径为零. 在 $0.25-0.32$ 频率范围内出现较大

$M_i =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{4}{L}\sin(\pi Q) - a_F [x_i^{(0)F}]^2 & 1 - 2\sin(\pi Q) - \frac{L}{2} a_F [x_i^{(0)F}]^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ \frac{4}{L}\sin(\pi Q) + a_D [x_i^{(0)D}]^2 & 1 + 2\sin(\pi Q) + \frac{L}{2} a_D [x_i^{(0)D}]^2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

这里 $O_{F,D}(s) = \frac{1}{B_0 \rho} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3}$ 是八极场的场强系数, $a_{F,D} = \frac{1}{2} O_{F,D}(s) l$. 同样求出 $\text{Tr}R$ 后,再利用(26)式计算动力学孔径.

图 4 是存在非线性八极场时,动力学孔径随 Q 的变化曲线. 其中 $L = 5.15\text{m}$, $O_F l = 1.27\text{m}^{-3}$, $O_D l = -1.33\text{m}^{-3}$. 可见,在 $0.25-0.50$ 频率范围内两者吻

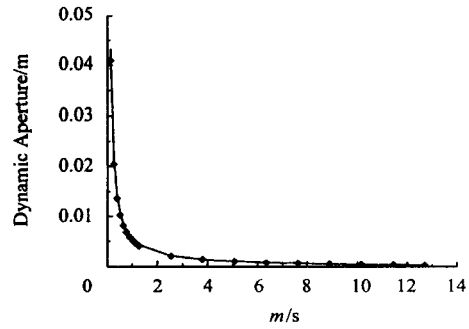


图 3 动力学孔径随六极场强的变化曲线

◆逐次线性化法求得的结果, ——MAD 跟踪 10^4 圈的结果.

的差异.引起这种差异可能有两个原因:1)逐次线性化过程中将(9)式变为(10)式时,略去 $u(s)$ 平方项所引起的;2)可能是由于逐次线性化法没有考虑两六极场之间位相与振幅关系^[9,12,13]所引起的,而这一相互关系对描述高阶共振是很重要的.图 3 是当 $Q = 0.34 = \frac{17}{50}$, $L = 5.15\text{m}$ 时动力学孔径随六极场强的变化曲线.从图可以看出无论是跟踪还是用逐次线性化法,动力学孔径与六极场强存在这样的关系^[14]:动力学孔径 $\propto \frac{1}{m}$,而且两者吻合得很好.

4.2 只有八极场

当每个 FODO 结构包含两个八极铁(OF, OD)且分别放在聚焦与散焦四极铁附近时,方程(18)为

$$L(u^{(0)}) - \frac{1}{2} O(s) [x^{(0)}(s)]^2 u^{(0)} = 0, \quad (27)$$

对应于(25)式的矩阵 M_i 为

合得很好.与图 2 所示的存在非线性六极场时不同,由于不发生 $\frac{1}{3}$ 的整数倍共振,在 $Q = \frac{1}{3}$ 点动力学孔径不为零.但在 $Q = \frac{1}{4} = 0.25$ 时发生非线性 $\frac{1}{4}$ 整数倍共振而使动力学孔径为零.图 5 是当 $Q = 0.34 = \frac{17}{50}$, $L = 5.15\text{m}$ 时,动力学孔径随八极场强 $O(s)$ 的变化曲

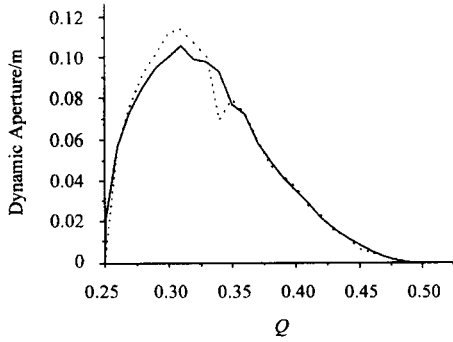


图 4 存在八极场时动力学孔径随 Q 的变化曲线

……逐次线性化法求得的结果, ——MAD 跟踪 10^4 圈的结果.

线. 为了看清变化趋势, 这里取点 $(-0.05, -200)$ 为坐标原点. 可以看出动力学孔径与八极场强存在这样的关系^[14]: 动力学孔径 $\propto \frac{1}{\sqrt{O_{F,D}}}$.

4.3 六极场与八极场共存

当每个 FODO 结构的聚焦与散焦四极铁附近既

$M_i =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ -\frac{4}{L}\sin(\pi Q) - b_F x_i^{(0)F} & 1 - 2\sin(\pi Q) - \frac{L}{2} b_F x_i^{(0)F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ \frac{4}{L}\sin(\pi Q) + b_D x_i^{(0)D} & 1 + 2\sin(\pi Q) + \frac{L}{2} b_D x_i^{(0)D} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

这里 $b_F = m_F(s)l + \frac{1}{2} O_F(s) l x_i^{(0)F}$, $b_D = m_D(s)l + \frac{1}{2} O_D(s) l x_i^{(0)D}$.

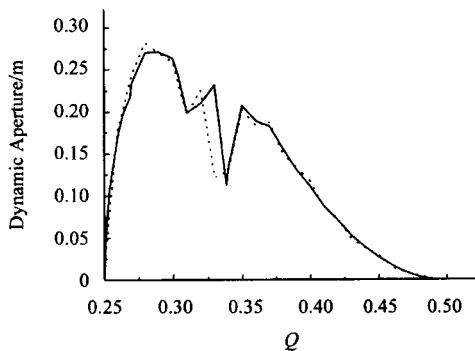


图 6 六极场与八极场共存时动力学孔径随 Q 的变化曲线

……逐次线性化法求得的结果, ——MAD 跟踪 10^4 圈的结果.

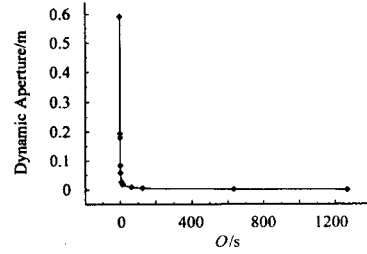


图 5 动力学孔径随八极场强的变化曲线

逐次线性化法求得的结果, ——MAD 跟踪 10^4 圈的结果.

有六极场又有八极场时, 方程(18)为:

$$L(u^{(0)}) - [m(s)x^{(0)}(s) + \frac{1}{2}O(s)(x^{(0)}(s))^2]u^{(0)} = 0, \quad (29)$$

此时, 对应于(25)式的矩阵 M_i 为

5 结论

本文用逐次线性化法对存在非线性六极场、八极场及六极场与八极场共存时, 由 FODO 结构组成的储存环的动力学孔径进行了研究, 所得结果与数值跟踪结果吻合得很好. 同时对影响粒子非线性 Betatron 振荡不稳定性的机制进行了探讨, 分析了导致粒子非线性不稳定性的另外一种机制——小振幅下, 参量共振所引起的自激振荡^[1].

参考文献 (References)

- 1 Roper A. Dynamic Aperture. In: CERN 90-04. 1990
- 2 Guignard G. Chromaticity; Nonlinear Aberration. In: CERN 87-03. 1987
- 3 Ando A. Particle Accelerators, 1984, **15**: 177
- 4 Willeke F. Analytical Study of the Tevatron Nonlinear Dynamics. In: FN-422. FNAL. 1984
- 5 Collins T. Distortion Function. In: Tech Note Fermilab-84/114. 1984
- 6 Forest E. Lie Algebraic Methods for Charged Particle Beams and Light Optics. Ph. D. Thesis. Univ. Maryland. 1984
- 7 Courant E., Snyder H. Ann. Phys. (N.Y.), 1958, **3**: 48
- 8 Hagel J. Analytic Calculation of the Off-Momentum Closed Orbit in Storage Rings with Insertions and Sextupoles. In: CERN/LEP-TH/84-18. 1984
- 9 Guignard G., Hagel J. Particle Accelerators, 1986, **18**: 129
- 10 Keil E. Single Particle Dynamics-Linear Machine Lattice. In: CERN 77-13. Geneva: 1977. 22
- 11 Christoph Iselin F. The Mad Program (Methodical Accelerator Design)
- 12 Wiedemann H. Chromaticity Correction in Large Storage Rings. In: (SLAC) PEP-0220. 1976
- 13 Guignard G. First Order Chromatic Perturbation and Sextupole Strength. In: CERN ISR-TH/82-14. 1982
- 14 GAO J. Nucl. Instrum. Meth., 2000, **A451**: 545

Analytical Study of Dynamic Aperture for Storage Ring by Using Successive Linearization Method *

YANG Jian-Cheng^{1,2;1)} XIA Jia-Wen¹ WU Jun-Xia^{1,2} XIA Guo-Xing^{1,2} LIU Wei^{1,2} YIN Xue-Jun^{1,2}

1 (Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

2 (The Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract The determination of dynamic aperture is a critical issue in circular accelerator. In this paper, we solved the equation of motion including non-linear forces by using successive linearization method and got a criterion for the determining of the dynamic aperture of the machine. Applying this criterion, a storage ring with FODO lattice has been studied. The results are agree well with the tracking results in a large range of linear turn (Q). The purpose is to improve our understanding of the mechanisms driving the particle motion in the presence of non-linear forces and got another mechanism driving instability of particle in storage ring-parametric resonance caused by "fluctuating transfer matrices" at small amplification.

Key words non-linear Betatron oscillation, successive linearization, dynamic aperture

Received 20 February 2003

* Supported by HIRFL-CSR Project, Lanzhou, China

1) E-mail: yangjch@impcas.ac.cn