二维晶化束的平均场概念和单粒子模型(Ⅰ)

罗诗裕[1)]　邵明珠　胡西多
(东莞理工学院　广东　523106)

摘要　引入平均场概念和单粒子模型讨论了储存环中二维晶化束的小尺度运动行为,并利用能量最小原理导出了粒子方位角分布的不连续性和晶化束的结构相变.

关键词　储存环　束流晶化　平均场　带电粒子

1　引言

通常束流应用要求加速器提供的粒子能量高、流强大和品质好.于是束流的能量、流强、发射度、单色性和粒子种类等就成了描述加速器性能的重要指标.遗憾的是有些指标很难兼得,最典型的例子就是粒子能量和流强表现出了明显的排他性.储存环技术是常规加速器技术的突破,它的出现使这一对矛盾得到了消减.但是,由于常规加速器提供的束流品质差,要求储存环积累太强的束流同样会遇到困难.主要是因为随着流强的增加,空间电荷效应和内束散射将导致束流不稳定.20 世纪 70 年代末提出的束流冷却技术使这一问题得到了缓解,并在高能物理、天体物理和重离子聚变中找到了重要应用.束流冷却技术有随机冷却、激光冷却和电子束冷却等.美国斯坦福大学教授 Steven Chu 提出了用激光俘获和冷却中性原子束的方法,成功地将束流温度降低到 1mK 以下,获得了 1997 年诺贝尔物理学奖.本文主要关心储存环中的电子束冷却以及在冷却过程中出现的束流晶化现象.人们把储存环中的晶化束近似地视为单分量等离子体或库仑气体,并利用这种模型对它进行了研究,导出了晶化束的结构相变[1—2].我们也曾开展过这方面的工作[3—11].2000 年,在德国召开的第六届国际计算加速器物理会议,对束流晶化作了更广泛的研究[12].借用原子核壳层模型中的平均场和单粒子概念,来描述二维晶化束的粒子运动行为,同样导出了晶化束的结构相变.

2　一般描述

一个典型的二维问题是储存环中的粒子束,其特点是粒子平衡轨道是闭合的,围绕平衡轨道运动的粒子束可近似当作圆形束流来处理.引入周期边界条件(Born-Von Karman 条件),将闭合的圆形束流视为一个周期,并将它解析延拓;再考虑到平衡轨道的曲率半径比平均粒子间距大得多,于是可把闭合的圆形束视为无限长的柱型束,考虑到电子冷却是将带正电的离子完全浸泡在一束电子流中,并让它们以同一速度运动,于是这个系统可看作单分量等离子体(The One-Component Plasma, OCP)或经典库仑气体[1,2].事实上,所谓单分量等离子体就是把带电离子均匀地镶嵌在相反电荷的本底中,本底的作用可以保证系统的电中性和热力学平衡.对于二维柱型束,引入柱坐标(ρ,θ,z)来描写是方便的.关心的问题是晶化束中单粒子的运动行为.在平衡轨道附近,粒子经受磁场力和库仑力作用,其中粒子所受的磁场聚焦力可表示为

$$f_1 = -k\rho, \tag{1}$$

其中 k 是恢复系数,且

$$k = m_0\gamma\nu_0^2, \nu_0 = \left(\frac{q^2 n_c}{m_0\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}, q = Ze,$$

2003-05-18 收稿

1) E-mail: oul901@163.com

$$n_c = 1/d_c^3,\ d_c = \left(\frac{Z^2 e^2}{m_0 \gamma \nu_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

Z 是离子的原子序数，e 电子电荷，m_0 是离子静止质量，γ 是相对论因子，ν_0 是粒子自由振荡频率，d_c 是系统的特征长度，n_c 是特征粒子数密度．对于柱型束，系统的库仑能可表示为

$$V = \frac{(Ze)^2}{2d_c}\left\{\sum_{i,j}\frac{d_c}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} + \frac{1}{d_c^2}\sum_i |\rho_i|^2\right\}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_j$ 是参考粒子到第 i 个粒子和第 j 个粒子的矢径，离子所受的库仑力可形式上表示为

$$f_2 = -\frac{\partial V}{\partial \rho}. \tag{4}$$

当粒子数为无穷时，式(3)中第一项求和是发散的，考虑到库仑屏蔽，发散问题可以避免．

对于单分量等离子体，最重要的一个参数是耦合参数 Γ，它定义为系统的平均库仑能与热能之比

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2}{d_c k_B T}, \tag{5}$$

其中 d_c 由式(2)给出，其量级大约 10—100μm，k_B 是 Boltzmann 常数，T 是绝对温度．式(5)表明，在束流冷却过程中，库仑排斥和热效应互相抗衡，当温度比较高，比如 $\Gamma < 0.1$ 时，系统处于气态，当温度比较低，比如 $\Gamma > 170$ 时，系统处于固态，当 $0.1 < \Gamma < 170$ 时，系统处于液态[1]．

根据式(1)和(4)，原则上系统就可在经典框架内进行处理．但是，由于式(3)的复杂性，这种处理需要容量大、速度快的计算机进行数字计算．下面引入平均场概念和单粒子模型，用近似的解析方法进行处理．结果使问题得到了简化，而且也揭示二维晶化束的主要特征，比如组态的不连续性及壳层结构等．

3　平均场和单粒子模型

人们曾在原子核的壳层模型中引入平均场和单粒子概念，成功地描述了原子核结构的周期性和稳定性．注意到考查的系统是二维库仑系统，被冷却的离子和电子构成了半径为 ρ_0 无限长的均匀带电圆柱．值得注意的是由于圆柱表面的不确定性，ρ_0 已不再是经典概念下的几何边界．引入平均场和单粒子概念，由式(3)和(4)描写的库仑作用可简化为单个粒子在平均场中的运动．设圆柱体的线电荷密度为 λ，由高斯定理可求得圆柱体内部和外部任一点的电场力

$$f_2 = \begin{cases} 2q\lambda\rho/\rho_0^2 & \rho < \rho_0 \\ 2q\lambda/\rho & \rho > \rho_0 \end{cases}. \tag{6}$$

本文只讨论 $\rho < \rho_0$（即小尺度）的情形，大尺度（$\rho > \rho_0$）情形留到第二部分讨论．在储存环中运动的带电粒子还将受到磁场的聚焦作用，在线性近似下由式(1)给出，为了方便把式(1)改写为

$$f_1 = -qk_1\rho, \tag{7}$$

其中 $k_1 = k/q$ 是磁场的聚焦强度．对于 $\rho < \rho_0$ 的情形，由式(6)的第一式和式(7)可求得离子所受合力

$$f = -c_1\rho, \tag{8}$$

其中

$$c_1 = q(k_1 - 2\lambda/\rho_0^2). \tag{9}$$

在平衡状态下（令 $f = 0$），可得束流半径 ρ_0 的平衡值

$$\rho_{0c} = (2\lambda/k_1)^{1/2},$$

于是式(9)可改写为

$$c_1 = qk_1(1 - \rho_{0c}^2/\rho_0^2). \tag{10}$$

由式(8)和(10)可以看出，在柱坐标中粒子所受的力是简谐力，在直角坐标系中，粒子的运动方程表示为

$$m_0\gamma\ddot{x} + c_1 x = 0, \tag{11}$$

$$m_0\gamma\ddot{y} + c_1 y = 0, \tag{12}$$

$$\ddot{z} = 0, \tag{13}$$

其中 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \dot{z} = \frac{dz}{dt}$，$x, y$ 是粒子的横坐标，z 是粒子的纵坐标（沿束流运动方向），方程(11—13)的解可直接表示为

$$x = a_0\cos\omega t, \tag{14}$$

$$y = b_0\sin\omega t, \tag{15}$$

$$z = \beta ct, \tag{16}$$

其中

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \tag{17}$$

$$\omega = \left(\frac{c_1}{m_0\gamma}\right)^{1/2} \tag{18}$$

是粒子绕平衡轨道的振荡频率，a_0, b_0 由系统初值确定，$\beta = v/c$ 是无量纲的粒子纵向速度，c 是光速，v 是粒子纵向运动速度．方程(14—16)描写的是离子绕轴缠绕的螺旋运动，运动轨道在(x, y)平面上的投影是一个椭圆

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 = 1. \tag{19}$$

结果表明，从平均场概念出发，离子的运动轨迹是一条绕 z 轴缠绕的螺旋线，下面的分析表明离子占据这条轨道的状态将是不连续的，而且当粒子数变化时，系统将出现结构相变．

4 不连续的平衡组态和结构相变

现在从最小能量原理出发对系统作静态分析. 首先讨论简单螺旋管情形. 假设粒子的轨道是一条半径为 ρ、且绕 z 轴缠绕的螺旋线,则第 j 个粒子与第 i 个粒子相互作用的库仑能为

$$E_{ij} = q^2/|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|, \tag{20}$$

其中 $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ 是第 i 个粒子与第 j 个粒子之间的距离,对于简单螺旋管 $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|$ 可表示为

$$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = d\left(n^2 + u^2\sin\frac{n\theta}{2}\right)^{1/2}, \tag{21}$$

其中 $n = j - i$, d 是沿 z 轴的平均离子间距,而

$$u = 2\rho/d \tag{22}$$

是离参考粒子的无量纲距离. 系统的库仑能表示为

$$E_c = \sum_{ij} E_{ij}. \tag{23}$$

对于储存环系统,由磁聚焦产生的"弹性能"表示为

$$E_e = \frac{1}{8}kd^2qu^2. \tag{24}$$

系统的总能量由式(23)和(24)给出

$$E = \sum_{i,j} E_{ij} + E_e. \tag{25}$$

可以看出系统的能量与半径 ρ 和方位角 θ 有关. 由最小能量原理,径向和方位角的平衡值由 $F_u = -\frac{\partial E}{\partial u} = 0$ 和 $F_E = -\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$ 给出. 令 $\frac{\partial E}{\partial u} = 0$ 可得

$$\frac{kd^3}{4q} = \sum_{n=1} \frac{\phi(\theta)}{[n^2 + u^2\phi(\theta)]^{3/2}}, \tag{26}$$

其中

$$\phi(\theta) = \sin^2\frac{n\theta}{2}. \tag{27}$$

展开式(26),略去三阶以上的项,式(26)可简化为

$$\frac{kd^3}{4q} = \phi(\theta)\zeta(3) - \frac{3}{4}\phi^2(\theta)\zeta(5)u_c^2, \tag{28}$$

其中 $\zeta(n)$ 是辐角为 n 的 Riemann-Zeta 函数. 由式(28)可求出系统的临界半径

$$u_c = \left\{\frac{4}{3\phi^2(\theta)\zeta(5)}\left[\phi(\theta)\zeta(3) - \frac{3}{8}\left(\frac{d}{a}\right)^3\right]\right\}^{1/2}, \tag{29}$$

其中

$$a = \left(\frac{3q}{2k}\right)^{1/3} \tag{30}$$

是 Wigner-Seitz 半径. 当 $u_c = 0$ 时,系统退化为一维库仑链,对于这种系统曾经系统地研究过[3—8]. 一维库仑链的临界线密度

$$\lambda_c = \frac{a}{d} = \left[\frac{3}{8\phi(\theta)\zeta(3)}\right]^{1/3}, \tag{31}$$

再令 $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$,由式(20—25)求得方位角的可能值为

$$\theta_c = 2m\pi/n \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2\cdots, \tag{32}$$

为了保证式(29)和(31)有解,实际上,m 仅取下列奇数值

$$m = 2p + 1 \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{33}$$

于是(29),(31)和(32)可重新表示为

$$u_c = \left\{\frac{4}{3\zeta(5)}\left[\zeta(3) - \frac{3}{8}\left(\frac{d}{a}\right)^3\right]\right\}^{1/2}, \tag{34}$$

$$\lambda_c = \left[\frac{3}{8\zeta(3)}\right]^{1/3}, \tag{35}$$

$$\theta_c = (2p + 1)\pi/n \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{36}$$

从式(34—36)可以看出,当系统的线电荷密度由式(35)给出时,系统是纯的一维库仑链;否则系统将是一条半径为 $\rho_c = du_c/2$,且绕 z 轴的缠绕的螺旋线,而粒子在这条轨道上的分布是不连续的,其位置由式(36)给出. 式(36)表明,粒子只能占据一系列分立位置,说明在静态条件下晶化束中的粒子沿方位角分布是"不连续的".

对于不同粒子数(或粒子数密度),晶化束将出现不同的结构,当粒子数密度比较低(相应的线电荷态密度由式(35)给出)系统呈现出纯粹的一维库仑链;随着粒子数密度增加,系统演化为简单螺旋管结构,其特点是粒子的方位角取值是不连续的. 进一步研究表明,随着粒子数密度的增加系统将进一步出现双层螺旋管结构和多层螺旋管结构,这正是人们预期的二维晶化束的结构相变.

5 讨论

二维晶化束的典型特征是它的层状结构和粒子沿方位角的不连续分布. 人们曾经用 OCP 近似或分子动力学(MD)方法进行了分析,但都需要容量大、速度快的计算机进行数值计算. 引入平均场概念和单粒子模型讨论了小尺度($\rho < \rho_0$)情况下的粒子运动行为,使问题得到了简化,又保证了方法本身的解析性和完整性,同时也揭示了二维晶化束的主要特征. 本文导出了粒子沿方位角的不连续分布和结构相变(壳层结构). 对于大尺度($\rho > \rho_0$)情形将在第二篇文章中讨论.

参考文献(References)

1 Rahman A, Schiffer J P. Phys. Rev. Lett., 1986,**57**:1133

2 Habs D et al. MPI 1987-v3, MPI, Heidelberg, 1987

3 Hofmann I, LUO S Y. GSI Report, 89-1,1989

4 LUO S Y, Hofmann I. GSI Report, 89-21, 1989

5 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8): 1189—1190(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I,罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1189—1190)

6 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8): 1200—1206(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I, 罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1200—1206)

7 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8): 1207—1213(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I, 罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1207—1213)

8 LUO S Y, LIU Z R, SHAO M Z. Acta Physica Sinica, 1987,**36**(5): 547(in Chinese)
(罗诗裕,刘曾荣,邵明珠. 物理学报,1987,**36**(5):547)

9 LUO S Y, SHAO M Z, LIU Z R, et al. Acta Physica Sinica, 1988,**37**(8):1394(in Chinese)
(罗诗裕,邵明珠,刘曾荣等. 物理学报,1988,**37**(8):1394)

10 SHAO M Z. Acta Physica Sinica, 1992,**41**(11):1825(in Chinese)
(邵明珠. 物理学报,1992,**41**(11):1825)

11 LUO S Y, SHAO M Z. Acta Mathematica Scientia, 1993,**13**(1):391 (in Chinese)
(罗诗裕,邵明珠. 数学物理学报,1993,**13**(1):391)

12 Schemoller T, et al. Nucl. Instr. and Meth., 2000,**A441**:50—53

Average Field Idea and Single Particle Model for 2 Dimension Crystallization Beams(Ⅰ)

LUO Shi-Yu[1)]　SHAO Ming-Zhu　HU Xi-Duo

(Dongguan University of Technology, Guangdong 523106, China)

Abstract In the paper an average field idea and a single particle model have been introduced, and the motion behaviours in small-scale of particles have been disscussed for 2 Dimension crystallization beams in storage rings. It is shown that a particle orbit is the spiral line moved along z axis and wended around z axis, the discountinuity in the azimuthal distribution and the structure phase transition of crystallization beams have been derived by the minimun-energy principle.

Key words storage ring, crystallization beam, average field, charged particles

Received 18 May 2003

1) E-mail: oul901@163.com