

# 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场胶球质量的 七阶 RPA 近似\*

惠萍<sup>1)</sup>

(广东教育学院物理系 广州 510303)

**摘要** 采用无规相近似(RPA)方法,用空心图作为试探波函数,利用 Feymann-Hellman 定理计算七阶 2 + 1 维  $SU(2)$  格点规范场的胶球质量,在弱耦合区  $1/g^2 = 1.0 - 1.8$  胶球质量表现出良好的标度行为,基本趋于常数 ( $m/e^2 \approx 1.20 \pm 0.01$ ).

**关键词** 格点规范理论 胶球质量 无规相近似

## 1 引言

量子色动力学(QCD)是研究基本粒子强相互作用最成功的理论,该理论预言真空态具有复杂的结构,并存在胶球态.胶球态的确定一直受到人们极大的关注,也是人们一直在探索的重要课题之一.目前国际上从实验和理论计算两个方面寻找胶球质量等物理量,虽然都有一些有意义的努力和尝试,但至今仍然没有肯定的答案.

Wilson 等在 1974 年提出的格点规范理论(LGT)为胶球质量的计算提供了理论基础,它是目前最成功的非微扰方法,已成为人们研究规范场非微扰效应的一种重要途径.近年来,格点规范理论已经取得了不少令人振奋的成果,尤其在数值计算方面,随着高速计算机的应用,使高精度的数值计算成为可能.但数值计算也存在局限性,一是它没有清晰的物理图像,二是计算很难深入到弱耦合区,因此发展有效的解析计算方法是十分必要的.1980 年, J. P. GREENSITE<sup>[1]</sup>导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程,但此方程无法严格求解,于是人们引入了各种级数展开方法进行近似计算,但高阶展开的复杂性是解析方法遇到的困难,也是它的局限性.1993

年, SMITH<sup>[2]</sup>等人提出了一种截断本征值方程的近似方法,但计算出的 2 + 1 维  $SU(2)$  群的胶球质量没有好的标度性.1994 年,文献[3,4]在耦合集团展开方法的基础上发展了保持连续极限截断本征值方程的方法,用这种方法已计算出了 2 + 1 维  $SU(2)$  LGT 的三阶至四阶真空波函数和胶球质量<sup>[3-5]</sup>出现了较好的标度行为,但更高阶结果的收敛行为不能令人满意<sup>[6,7]</sup>,对于 2 + 1 维  $SU(3)$  LGT,计算结果也不够理想.人们试图在找一种方法,这种方法得到的结果应该是:计算的阶数越高,计算结果的标度行为和收敛性越好,并且可以推广到 3 + 1 维  $SU(3)$  LGT 实际计算中.然而,由于高阶计算所涉及的图形多而复杂,使解析计算变得十分艰难,文献[8,9]提出了将无规相近似(RPA)方法应用到耦合集团展开方法中,成功地用于 2 + 1 维  $SU(3)$  格点规范理论(LGT)的真空波函数和胶球质量的计算,并把 2 + 1 维  $SU(3)$  格点规范理论的计算从原来的三阶提高到四阶,计算结果显示收敛的趋势,胶球质量也比较早的结果有所改善<sup>[9]</sup>.最近将上述方法运用于六阶 2 + 1 维  $SU(2)$  格点规范场的真空波函数和胶球质量的计算中<sup>[10,11]</sup>,真空波函数表现良好的标度行为,胶球质量也出现标度窗口,并预示七阶胶球质量会出现良好的标度行为.本文将展示七阶 2 + 1 维  $SU(2)$

2004 - 03 - 15 收稿

\* 广东省自然科学基金(33446),广东教育学院教授、博士科研专项经费资助

1) E-mail: huiping519@tom.com

格点规范场的胶球波质量的计算结果.

## 2 截断本征值方程和 RPA 近似

2+1-D SU(2) 格点规范理论的 Kogut-Susskind 哈密顿量的表达式为

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[ \sum_l E_l^a E_l^a - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right], \quad (1)$$

其中,  $E_l^a |0\rangle = |0\rangle$ ,  $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_1 U_2 U_3 U_4$ ,  $a$  是格距,  $g$  为无量纲的耦合常数, 它与不变荷  $e$  的关系为  $g^2 = e^2 a$ . 在  $g^2 \rightarrow 0$  的弱耦合区,  $a \rightarrow 0$ . 哈密顿量的本征值方程为

$$H | \Omega \rangle = \epsilon_0 | \Omega \rangle, \quad (2)$$

$$H | F \rangle = \epsilon_F | F \rangle, \quad (3)$$

其中真空波函数和胶球波函数分别表示为

$$| \Omega \rangle = e^{R(U)} | 0 \rangle, \quad (4)$$

$$| F \rangle = \left[ F(U) - \frac{\langle \Omega | F(U) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right] | \Omega \rangle, \quad (5)$$

(4) 式和 (5) 式中的  $R(U)$  和  $F(U)$  分别由各阶 Wilson 圈图  $U_i$  组成,  $\epsilon_0$  为真空能量. 在本方法中,  $R(U)$  和  $F(U)$  按照空心 Wilson 圈图展开:

$$R(U) = \sum_i R_i(U), F(U) = \sum_i F_i(U). \quad (6)$$

设  $w = \frac{2a}{g^2} H$ , 则  $w | \Omega \rangle = w_0 | \Omega \rangle$ , 再将式 (4) 代入 (2) 式得到关于真空波函数的本征值方程:

$$\left[ \sum_l E_l^a E_l^a - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right] | \Omega \rangle = w_0 | \Omega \rangle. \quad (7)$$

公式 (2) 中的  $\epsilon_0$  与公式 (7) 中的  $w_0$  的关系为  $\epsilon_0 = w_0 g^2 / 2a$ . 将 (5) 式代入 (3) 式得到关于胶球波函数的本征值方程:

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_l E_l^a E_l^a - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right] [F(U) - \langle F \rangle] | \Omega \rangle \\ & = \epsilon_F \frac{2a}{g^2} [F(U) - \langle F \rangle] | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

胶球质量隙为  $\Delta w = (\epsilon_F - \epsilon_0) 2a / g^2$ , 胶球质量表示

$$\text{为 } m = \Delta w \frac{g^2}{2a} = \Delta w e^2 / 2.$$

将 (6) 式代入 (7) 式和 (8) 式得

$$\begin{aligned} & \sum_l \left[ E_l^a, \left[ E_l^a, \sum_i R_i(U) \right] \right] + \sum_{ij} \left[ E_l^a, R_i(U) \right] \cdot \\ & \left[ E_l^a, R_j(U) \right] - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_l \left\{ \left[ E_l^a, \left[ E_l^a, \sum_i F_i(U) \right] \right] + \sum_{ij} \left[ E_l^a, F_i(U) \right] \times \right. \\ & \left. \left[ E_l^a, R_j(U) \right] \right\} - \Delta w \sum_i F_i(U) = \text{const}. \end{aligned} \quad (10)$$

随着  $R(U)$  和  $F(U)$  阶数的增加, 由 (9) 和 (10) 式得到的独立方程的数目越来越大, 为了得到封闭的代数方程组, 必须采用有效的截断方法, 这种截断方法要保证方程组封闭可解. 由于七阶真空波函数的计算比六阶计算更加繁琐, 所以直接导出计算七阶胶球质量的方程. 在采用空心图展开真空波函数和胶球波函数的情况下, 对易关系  $[E, [E, R_7]]$  对胶球质量的计算没有贡献, 因此 (9) 式和 (10) 式的截断方程如下:


$$\begin{aligned} & \left[ \sum_l \left\{ \left[ E_l^a, \left[ E_l^a, R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \right] \right] + \right. \right. \\ & 2 \left[ E_l^a, R_1 \right] \left[ E_l^a, R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \right] + 2 \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. R_2 \right] \left[ E_l^a, R_3 + R_4 + R_5 \right] + 2 \left[ E_l^a, R_3 \right] \left[ E_l^a, R_4 \right] + \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. R_1 \right] \left[ E_l^a, R_1 \right] + \left[ E_l^a, R_2 \right] \left[ E_l^a, R_2 \right] + \left[ E_l^a, R_3 \right] \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. R_3 \right] \left. \right\} - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right] | \Omega \rangle = w_0 | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_l \left\{ \left[ E_l^a, \left[ E_l^a, F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \right] \right] + \right. \right. \\ & \left[ E_l^a, F_1 \right] \left[ E_l^a, R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \right] + \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. F_2 \right] \left[ E_l^a, R_3 + R_4 + R_5 \right] + \left[ E_l^a, F_3 \right] \left[ E_l^a, R_4 \right] + 2 \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. F_1 \right] \left[ E_l^a, R_1 \right] + 2 \left[ E_l^a, F_2 \right] \left[ E_l^a, R_2 \right] + 2 \left[ E_l^a, F_3 \right] \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. R_3 \right] + \left[ E_l^a, R_1 \right] \left[ E_l^a, F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 \right] + \left[ E_l^a, \right. \\ & \left. R_2 \right] \left[ E_l^a, F_3 + F_4 + F_5 \right] + \left[ E_l^a, R_3 \right] \left[ E_l^a, F_4 \right] \left. \right\} - \\ & \Delta w \sum_{i=1}^6 F_i = \text{const}. \end{aligned} \quad (12)$$

在计算中, 考虑到了各种圈图的对易关系的可能性, 例如:

$$[E, R_1][E, R_2] \rightarrow [E, \square][E, \square] + [E, \square][E, \square]$$

$$[E, \square][E, \square] \rightarrow \{ [E, \square][E, \square] + [E, \square][E, \square] \}$$

由于高阶计算所涉及的图形多而复杂, 使解析计算变得十分艰难, 为了能使计算进行下去, 必须简化计算过程. 参照文献 [4] 的方法, 去掉特殊的图形, 例如 , 它是在下面的对易式计算中出现的:

$$[E, \square][E, \square] \rightarrow 2[\square - 1/2 \square]$$

在计算时, 将括号中的两项经同时去掉.

经对易计算可以得到组成  $R(U)$  和  $F(U)$  的空心图, 一至六阶图共 56 个.  $R(U)$  的组合系数分别为  $x(1), x(2), x(5), x(6), x(9), x(10), x(11), x(12), x(13), x(14), \dots, x(25), e_1, e_2, \dots, e_{35}$  等 56 个.  $F(U)$  的组合系数分别为  $z(1), z(2), z(5), z(6), z(9), z(10), z(11), z(12), z(13), z(14), \dots, z(25), e_{01}, e_{02}, \dots, e_{035}$  等 56 个. 以四阶图为例,  $R(U)$  和  $F(U)$  的展开如下: (其中  $z(1) = 1$ )

$$R_1 = x(1) \square$$

$$R_2 = x(2) \square$$

$$R_3 = x(5) \square + x(6) \square$$

$$R_4 = x(9) \square + x(10) \square + x(11) \square + x(12) \square + x(13) \square$$

$$F_1 = Z(1) \square$$

$$F_2 = Z(2) \square$$

$$F_3 = Z(5) \square + Z(6) \square$$

$$F_4 = Z(9) \square + Z(10) \square + Z(11) \square + Z(12) \square + Z(13) \square.$$

将  $R(U)$  所有的图形和  $F(U)$  所有的图形代入 (11) 和 (12) 式中计算. 计算中, 利用幺模条件  $\text{Tr} U \text{Tr} V = \text{Tr} UV + \text{Tr} UV^+$  ( $U$  和  $V$  是任意 Wilson 圈图) 把计算过程中出现的连接图变成空心图. 按照文献 [8,9] 的 RPA 方法, 将双图组态或多图组态中较小的图取平均值, 而保留较大的图, 例如

$$\begin{aligned} \square \square &= \square \langle \square \rangle \\ \square &= \langle \square \rangle \square \\ \square \square &= \langle \square \rangle \square \end{aligned}$$

对于七阶计算, 小图的平均值共 4 个两个, 分别用  $x(3), x(4), x(7)$  和  $x(8)$  表示

$$\begin{aligned} x(3) &= \langle \square \rangle, \quad x(4) = \langle \square \rangle, \\ x(7) &= \langle \square \rangle, \quad x(8) = \langle \square \rangle. \end{aligned}$$

从 (10) 式的计算得到的  $w_0$  的表达式为

$$w_0 = -4x(1)^2 - 3x(2)^2 - 4x(5)^2 - 4x(6)^2$$

设  $w' = w + x(1)' \square + x(2)' \square + x(5)' \square + x(6)' \square$ , 采用文献 [8,9] 的方法, 应用 Feymann-Hellman 定理可以得到  $x(3), x(4), x(7)$  和  $x(8)$  所满足的 4 条方程:

$$\begin{aligned} x(3) &= \frac{\partial w'}{\partial x(1)'} = - \left[ 8x(1) + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(1)} + 8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(1)} + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(1)} \right] \frac{\partial x(1)}{\partial x(1)'}, \\ x(4) &= \frac{\partial w'}{\partial x(2)'} = - \left[ 8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(2)} + 6x(2) + 8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(2)} + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(2)} \right] \frac{\partial x(2)}{\partial x(2)'}, \\ x(7) &= \frac{\partial w'}{\partial x(5)'} = - \left[ 8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(5)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(5)} + 8x(5) + 8x(6) \frac{\partial x(6)}{\partial x(5)} \right] \frac{\partial x(5)}{\partial x(5)'}, \end{aligned}$$

$$x(8) = \frac{\partial w'}{\partial x(6)'} = - \left[ 8x(1) \frac{\partial x(1)}{\partial x(6)} + 6x(2) \frac{\partial x(2)}{\partial x(6)} + 8x(5) \frac{\partial x(5)}{\partial x(6)} + 8x(6) \right] \frac{\partial x(6)}{\partial x(6)'}$$

从 (11) 和 (12) 式, 还可以得到有关计算胶球质量的封闭方程 112 个方程, 加上前面 4 个方程, 共 116 个方程组成封闭的方程组, 直接由这些方程组解出胶球质量. 列举其中 4 条方程如下:

$$\begin{aligned} 3 - W_j - 6x(2) - 6x(1)z(2) + 4x(1)x(3) - 5z(2)[x(5) + x(6)] - 5x(2)[z(5) + z(6)] - 2z(5)x(5)x(3) - 7z(5)[x(9) + x(11) + 2x(12) + 12x(13)/7]/2 - 7x(5)[z(9) + z(11) + 2x(12) + 12z(13)/7]/2 - 7z(6)[x(9) + 2x(10) + x(11)] - 7x(6)[z(9) + 2z(10) + z(11)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9z(2)/2 - z(2)W_j - 6x(2)z(2)x(4) - \{2x(1) - 6x(2)x(3) + 6[x(5) + x(6)]\} - x(1)\{-6z(2)x(3) + 6[z(5) + z(6)]\} - 2z(2)x(5)x(3) - 2x(2)z(5)x(3) - 5z(2)[x(9) + x(10) + x(12) + 8x(13)/5] - 5x(2)[z(9) + z(10) + z(12) + 8z(13)/5] + 2x(5)z(5)[5/4 - x(4)] - z(2)x(20)x(4)x(3)/2 - x(2)z(20)x(4)x(3)/2 - 2z(5)x(9)x(3) - 2x(5)z(9)x(3) - 4z(6)x(12)x(3) - 4x(6)z(12)x(3) - 2z(5)x(6)x(4) - 2x(5)z(6)x(4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6z(5) - z(5)W_j + [-4x(2) + 7x(3)x(5)] + x(1)[-4z(2) + 7x(3)z(5)] + 3z(2)x(5) + 3x(2)z(5) + x(4)19z(2)x(5)/2 + x(4)19x(2)z(5)/2 + 11x(5)z(5)x(7) + z(5)[17x(6)x(8)/4 - x(11) + 5x(9)/2 - x(13)x(4)] + x(5)[17z(6)x(8)/4 - z(11) + 5z(9)/2 - z(13)x(4)] + z(6)[-2x(11)x(4) + 5x(12) - 2x(12)x(4)] + x(6)[-2z(11)x(4) + 5z(12) - 2z(12)x(4)] + z(2)\{2x(3)[x(11) + x(12)] + 4x(19) + x(20) + x(21) + x(24) + [x(15) + x(17) + x(18) + x(22)]/2\} + x(2)\{2x(3)[z(11) + z(12)] + 4z(19) + z(20) + z(21) + z(24) + [z(15) + z(17) + z(18) + z(22)]/2\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6z(6) - z(6)W_j - 12x(2) - 2x(1)z(2) + 17x(6)x(3) + x(1)7z(6)x(3) - [3x(9) + 6x(10) + 3x(11)] - x(1)[3z(9) + 6z(10) + 3z(11)] + 17z(2)x(6)x(4)/2 + 17x(2)z(6)x(4)/2 + 10x(6)z(6)x(8) + z(5)[17x(6)x(8)/4 - x(11)x(4) - 2x(10)x(4)] + x(5)[17z(6)x(8)/4 - z(11)x(4) - 2z(10)x(4)] - z(6)[2x(11)x(4) + x(9)] - x(6)[2z(11)x(4) + z(9)] - x(2)x(3)\{z(9) + 2z(11) + 5[z(15) + z(17) + z(23)]/2 + 5[z(16) + 2z(19)/5 + z(25)]\} - z(2)x(3)\{x(9) + 2x(11) + 5[x(15) + x(17) + x(23)]/2 + 5[x(16) + 2x(19)/5 + x(25)]\} = 0 \end{aligned}$$

方程中的  $W_j$  与胶球质量的关系为  $W_j = 2m/e^2$ . 由方程组可以解出胶球质量  $m/e^2 = \Delta w/2 = W_j/2$  随着耦合常数  $1/g^2$  的变化规律.

### 3 计算结果

文献[11]展示了三阶到六阶胶球质量  $m/e^2$  随着  $1/g^2$  的变化曲线(见图 1 的三阶到六阶结果), 在弱耦合区( $1/g^2 > 1$ ), 随着阶数的增加, 曲线斜率逐渐减小, 六阶结果已经出现标度窗口, 并推断: 七阶结果将显示出良好的标度行为, 结果很可能趋于收敛. 本文的计算结果确实如此, 从图 1 看到, 七阶结果在  $1/g^2 > 1.0$  的弱耦合区基本趋于水平, 在  $1/g^2 = 1.0 - 1.8$  区域, 胶球质量  $m/e^2 = 1.20 \pm 0.01$ , 但

直线略微向下倾斜. 从文献[12]的计算结果看到, 三阶到六阶胶球质量的曲线都是向上倾斜, 随着阶数的增加, 斜率逐渐减小, 直到七阶曲线趋于水平, 七阶曲线略微向下倾斜的原因可能是由于略去特殊图形的结果, 这个推断有待于进一步的计算来证实.

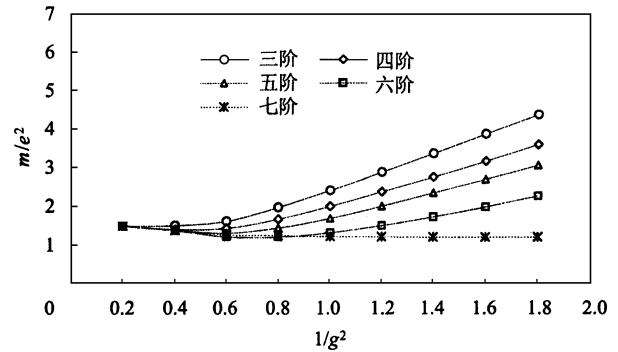


图 1 采用 RPA 方法得到的三阶到七阶 2+1-维  $SU(2)$  LGT 的胶球质量

### 参考文献 (References)

- Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**:113—124
- Llewellyn Smith C H, Watson N J. Phys. Lett., 1993, **B302**:463—471
- GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev., 1994, **D49**(1):507—510
- CHEN Q Z et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5):3564—3565
- HUI P, CHEN Q Z. HEP & NP, 1995, **19**(9):820—825(in Chinese)  
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9):820—825)
- HUI P. HEP & NP, 1998, **22**(4):322—325(in Chinese)  
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4):322—325)
- HUI P. HEP & NP, 1999, **23**(12):1171—1176(in Chinese)  
(惠萍. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12):1171—1176)
- HUI P et al. Phys. Rev., 2000, **D62**: 034505-1-5
- FANG X Y et al. Phys. Rev., 2002, **D65**:114505-1-3
- HUI P. HEP & NP, 2004, **28**(5):487(in Chinese)  
(惠萍. 高能物理与核物理, 2004, **28**(5):487)
- HUI P et al. HEP & NP, 2004, **28**(6):580(in Chinese)  
(惠萍等. 高能物理与核物理, 2004, **28**(6):580)
- HUI P. HEP & NP, 2000, **24**(7):636—641(in Chinese)  
(惠萍. 高能物理与核物理, 2000, **24**(7):636—641)

## Seventh Order Glueball Mass of the 2+1-D $SU(2)$ LGT in RPA \*

HUI Ping<sup>1)</sup>

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

**Abstract** The random phase approximation (RPA) method and the Feynmann-Hellman theorem are used to calculate the seventh order glueball mass of the 2+1-D  $SU(2)$  lattice gauge theory. As an approximation, the trial wave function is constructed only by single-hollow graphs. The calculated result of the seventh order glueball mass shows good scaling behavior at the weak coupling region of  $1/g^2 = 1.0 - 1.8$  ( $m/e^2 \approx 1.20 \pm 0.01$ ).

**Key words** lattice gauge theory, glueball mass, random phase approximation

Received 15 March 2004

\* Supported by Guangdong Provincial Natural Science Foundation(033446), Professorial and Doctoral Program Foundation of Guangdong Institute of Education

1)E-mail: huiping519@tom.com