

四极透镜的三阶像差分析*

宋明涛¹⁾ 杨晓东 原有进 袁平 张文志

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

摘要 用 Lie 代数方法推导了四极透镜的三阶像差. 像差源于四极透镜场在轴向的有限分布. 在一阶焦距不变的条件下, 增加透镜的长度或增加透镜的孔径可以减小三阶像差.

关键词 四极透镜 三阶像差 Lie 映射

1 引言

四极透镜用于带电粒子束流的聚焦、传输和匹配. 自交变梯度理论建立以后^[1], 同步加速器的不断涌现使四极磁铁的应用更加广泛. 在加速器物理领域, 人们对四极透镜特性的认识也日益深刻. 然而在四极透镜的三阶像差方面, 似乎还存在模糊的认识. 在四极透镜设计当中有一个原则——长度大于孔径. 由于较长的四极透镜具有较小的三阶像差, 由此可能引起了模糊认识: 增加长度是减小三阶像差的惟一方法; 大孔径四极透镜的三阶像差较大. 事实上, 像差起源于透镜场在轴向分布的有限性. 透镜长度增加时, 场的范围也随之增加; 孔径足够大时, 透镜的场也会在一定程度上延伸. 在某些特殊场合, 大孔径、短透镜的使用是不可避免的, 因此必须仔细研究其三阶像差.

本文从四极透镜的哈密顿量出发, 分别推导出电、磁四极透镜的四阶 Lie 映射, 给出了形式简洁的三阶像差公式, 定性讨论了长度和孔径对三阶像差的影响.

2 理论分析

2.1 磁四极透镜

质量为 m , 荷电量为 e 的带电粒子在电磁场中

的哈密顿量表示为:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2} + e\Phi, \quad (1)$$

\mathbf{p} 是正则动量, \mathbf{A} 和 Φ 分别是矢量磁势和标量电势. 在加速器物理的研究中, 经常进行正则变换^[1,2], 在新的六维相空间当中, 以参考粒子的路径为自变量. 在四极磁铁的情形, 电势 $\Phi = 0$, 磁势 \mathbf{A} 不随时间改变. 这种正则变换给出新的哈密顿量 (仍记作 H):

$$H = -A_z - [1 - (p_x - A_x)^2 - (p_y - A_y)^2]^{1/2} \quad (2)$$

代表经过总动量归一化后的纵向动量. 展开根式到四次项, 并忽略常数项, 得到

$$H = -A_z + \frac{1}{2}[(p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2] + \frac{1}{8}[(p_x - A_x)^2 + (p_y - A_y)^2]^2 + \dots \quad (3)$$

磁势的同阶展开式为:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{k'}{4}(x^2 - y^2)x, \\ A_y &= \frac{k'}{4}(x^2 - y^2)y, \\ A_z &= -\frac{k''}{2}(x^2 - y^2) + \frac{k''}{12}(x^4 - y^4). \end{aligned} \quad (4)$$

代入(3)式, 并按照幂次分类, 可以看到哈密顿量由两部分构成:

2003-10-22 收稿

* 国家大科学工程——兰州重离子加速器冷却储存环(HIRFL-CSR)资助

1) E-mail: songmt@impcas.ac.cn

$$H = H_2 + H_4, \quad (5)$$

H_2 代表一个理想的四极磁铁:

$$H_2 = \frac{k}{2}(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2), \quad (6)$$

H_4 是其哈密顿量的四阶成分:

$$H_4 = \frac{1}{8}(p_x^2 + p_y^2)^2 - \frac{k}{12}(x^4 - y^4) - \frac{k}{4}(x^2 - y^2)(xp_x + yp_y) + \dots, \quad (7)$$

式中第1项为小量,代表几何像差,与磁场无关,可以忽略.

与哈密顿量对应的 Lie 映射也由两部分构成^[3,4]:

$$\mathcal{M} = \exp(:M_n:) \mathcal{M}_2, \quad (8)$$

\mathcal{M}_2 是线性映射; Lie 元 M_n 描述粒子的非线性运动,表示为

$$M_n = - \int_{-L}^L \mathcal{M}_2^{L-z} H_n dz, \quad (9)$$

这里 $H_n = H_4$, 积分限为磁场不为零的区间. 将(7)式代入,得

$$M_n = \int_{-L}^L \mathcal{M}_2 \left[\frac{k}{12}(x^4 - y^4) \right] dz + \int_{-L}^L \mathcal{M}_2 \left[\frac{k}{4}(x^2 - y^2)(xp_x + yp_y) \right] dz. \quad (10)$$

利用公式 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2 : H_2$: 对上式进行一次分部积分,并利用下列 Lie 算符的作用:

$$\begin{aligned} :H_2: x^4 &= [H_2, x^4] = -4x^3 p_x, \\ :H_2: y^4 &= [H_2, y^4] = -4y^3 p_y, \end{aligned} \quad (11)$$

结果为:

$$M_n = - \frac{1}{12} \int_{-L}^L k' \mathcal{M}_2 [(x^3 + 3xy^2)p_x - (y^3 + 3x^2y)p_y] dz. \quad (12)$$

再次分部积分后得到

$$M_n = - \frac{1}{12} \int_{-L}^L k^2 \mathcal{M}_2 (x^4 + 6x^2y^2 + y^4) dz + \frac{1}{4} \int_{-L}^L k \mathcal{M}_2 (x^2 + y^2)(p_x^2 - p_y^2) dz. \quad (13)$$

上式中第2项是小量,可以解释为倾斜进入透镜的粒子比中心粒子有较长的渡越时间,否则没有这一像差成分. 假定带电粒子位置坐标的变化可以忽略,描述三阶像差的 Lie 元可以简化为

$$M_n = - \frac{1}{12} (x^4 + 6x^2y^2 + y^4) \int_{-L}^L k^2 dz, \quad (14)$$

与八极磁铁的 Lie 元对照,只是第2项的符号不同. 此“八极子”的强度为

$$k_4 = 2 \int_{-L}^L k^2(z) dz. \quad (15)$$

三阶像差可以表示为

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \exp(:M_n:) p_x - p_x \\ &= - \frac{1}{3} (x^3 + 3xy^2) \int_{-L}^L k^2(z) dz, \end{aligned} \quad (16)$$

与其一阶焦距公式 $\Delta p_x = -x/f$ 比较可知

$$\frac{\Delta f_x}{f} = \frac{f}{3} (x^2 + 3y^2) \int_{-L}^L k^2(z) dz, \quad (17)$$

其中 $f^{-1} = \int_{-L}^L k(z) dz$ 是其一阶焦距的倒数.

2.2 电四极透镜

在电四极透镜的情况,没有磁势,只有电势. 类似对磁四极透镜哈密顿量的处理,进行正则变换给出新的哈密顿量

$$H = \frac{1}{2} (\Psi + p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{8} (\Psi + p_x^2 + p_y^2)^2. \quad (18)$$

精确到四阶的电势为

$$\Psi = g(x^2 - y^2) - \frac{1}{12} g''(x^4 - y^4), \quad (19)$$

代入(18)式后,得到哈密顿量的表示式

$$H = \frac{1}{2} [g(x^2 - y^2) - \frac{g''}{12}(x^4 - y^4) + p_x^2 + p_y^2] + \frac{1}{8} [g(x^2 - y^2) + p_x^2 + p_y^2]^2. \quad (20)$$

同样,我们按照幂次分类:

$$H_2 = \frac{g}{2} (x^2 - y^2) + \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2), \quad (21)$$

$$H_4 = \frac{1}{8} g^2 (x^2 - y^2)^2 + \frac{1}{4} g (x^2 - y^2) \times (p_x^2 + p_y^2) - \frac{g''}{24} (x^4 - y^4). \quad (22)$$

四阶 Lie 元表示为

$$M_n = - \int_{-L}^L \mathcal{M}_2 \left[\frac{1}{8} g^2 (x^2 - y^2)^2 + \frac{1}{4} g (x^2 - y^2) \times (p_x^2 + p_y^2) - \frac{g''}{24} (x^4 - y^4) \right] dz, \quad (23)$$

分部积分两次以消去各阶导数,可得

$$M_n = \int_{-L}^L \mathcal{M}_2 \left[- \frac{7g^2}{24} (x^4 + y^4) + \frac{g^2}{4} x^2 y^2 + \frac{g}{4} (x^2 + y^2)(p_x^2 - p_y^2) \right] dz, \quad (24)$$

忽略第3项,并假定带电粒子位置坐标的变化可以

忽略,就得到四阶 Lie 元

$$M_n = -\frac{1}{24}(7x^4 + 7y^4 - 6x^2y^2) \int_{-L}^L g^2 dz, \quad (25)$$

以及三阶像差公式

$$\begin{aligned} \Delta p_x &= \exp(: M_4 :) - p_x \\ &= -\left(\frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2\right) \int_{-L}^L g^2 dz. \end{aligned} \quad (26)$$

可见,磁透镜与电透镜的像差公式非常相似,以下我们以磁透镜为例进行讨论.

3 讨论

从数学角度讲,方均根值不小于算术平均值.因此,像差的强度存在下限

$$k_4 = 2 \int_{-L}^L k^2 dz \geq \frac{1}{L} \left(\int_{-L}^L k dz \right)^2 = \frac{1}{Lf^2}, \quad (27)$$

表明像差是四极透镜的内禀属性,因为实际透镜的长度及其磁场分布的范围总是有限的.

通常情况下,实验测得的 $k(z)$ 曲线具有一个平顶部分 $[-L_1, L_1]$ 和两端延长至 $\pm L$ 的尾部. 假设做一个最小的梯形能够包含此曲线,高度为 $k_0 = k(z=0)$. 以此梯形为基础的旋转体的体积给出了像差强度的上限:

$$\begin{aligned} k_4 &= 4 \int_0^{L_1} k^2 dz + 4 \int_{L_1}^L k^2 dz \leq 4k_0^2 L_1 + \frac{4}{3} k_0^2 (L - L_1) \\ &= \frac{4}{3} k_0^2 (L + 2L_1). \end{aligned} \quad (28)$$

当透镜增长时,平顶部分随之增加而尾部区域不变. 在保持一阶焦距不变的前提下,其最大值 k_0 却相应减小,像差的强度也随之减小,恰似变细了的旋转体的体积. 当透镜的长度增加很多时,尾部区域远小于平顶区间, $L_1/L \approx 1$. 所以, $L + 2L_1 \approx 1.5L_e$, 其中 L_e 为等效长度 $L_e = (fk_0)^{-1}$, 且 $2L_1 < L_e < 2L$. 像差强度(28)式简化为

$$k_4 = 2k_0^2 L_e = \frac{2}{f^2 L_e}. \quad (29)$$

焦距的变化率为

$$\frac{\Delta f_x}{f} = \frac{1}{fL_e} \left(\frac{1}{3} x^2 + y^2 \right). \quad (30)$$

在此特殊情况下,式(30)就是文献[5]的结果,虽然采用了不同形式的磁势.

在焦距相同,长度相同但孔径不同时,四极磁铁

的强度分布见图 1. 当透镜的孔径增加时,磁场的尾部向两边延伸,平顶部分随之减少. 进一步增加透镜的孔径,平顶完全消失. 在保持一阶焦距不变的前提下, $k(z)$ 曲线的峰值 k_0 减小. 像差强度即 $k(z)$ 旋转体的体积因而减小. 用高斯曲线近似,像差强度也是反比于等效长度:

$$k_4 = \frac{\sqrt{2}}{f^2 L_e}. \quad (31)$$

这说明,孔径足够大时,等效长度有所增加,像差随之减小.

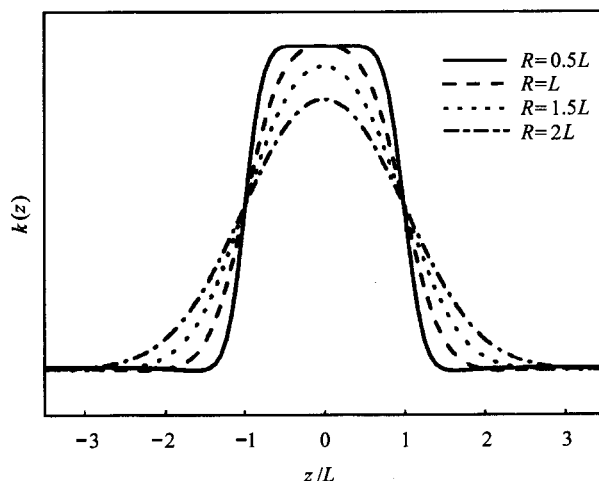


图 1 四极磁铁的强度 $k(z)$ 随 z/L 的变化
R: 磁铁内切圆半径, L: 磁铁半长度.

在增加透镜孔径时,存在过渡过程:平顶虽然已经消失, $k(z)$ 曲线的峰值 k_0 尚未减小. 尽管等效长度没有改变,却也有较小的像差. 在此情况下,可以归结为软边透镜具有较小像差.

4 结论

总之,磁四极透镜和电四极透镜的三阶像差分别由公式(16)和(26)表示,是电磁场在透镜的轴向有限分布的必然结果. 近似地,透镜的像差与等效长度成反比. 在一定焦距的前提下,增加透镜长度,像差显著减小;孔径增加,像差有所减小;如果等效长度也相同,则软边透镜的三阶像差略小.

第一作者感谢与加拿大国家实验室的 R. Baartman 博士进行的有益讨论.

参考文献 (References)

- 1 Courant E D, Snyder H S. *Annals of Physics*, 1958, **3**: 1—48
- 2 Ruth R. *Lecture Notes in Physics*, 1985, **247**: 37—63
- 3 Dragt A, Finn J. *J. Math. Phys.*, 1976, **17**: 2215—2227
- 4 Dragt A. *American Institute of Physics Proceedings*, 1982, **87**: 147—313
- 5 Baartman R. *Intrinsic Third Order Aberrations in Electrostatic and Magnetic Quadrupoles. PAC97*, 1997, 1415—1417

Analysis of Third Order Quadrupole Aberrations *SONG Ming-Tao¹⁾ YANG Xiao-Dong YUAN You-Jin YUAN Ping ZHANG Wen-Zhi

(Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract The formulae of 3rd order quadrupole aberrations are derived with Lie-algebraic map. It is the field extension along the axis that dominates the aberrations. For fixed focal length, the aberrations are small if the quadrupole length is long enough or its aperture is large enough. When the length is comparable to the aperture, the quadrupole with soft edge carries relatively small aberrations.

Key words quadrupole, aberration, Lie-algebraic map

Received 22 October 2003

* Supported by National Scientific Major Project; Heavy Ion Researching Facility in Lanzhou Cooler Storage Ring

1) E-mail: songmt@impcas.ac.cn