

周期驱动八极形变势导致混沌的机制*

郑仁蓉^{1;1)} 朱顺泉² 金华¹ 李君清³

1 (上海师范大学物理系 上海 200234)

2 (上海商学院 上海 201400)

3 (中国科学院近代物理所 兰州 730000)

摘要 通过对周期含时因子的自治化, 给出了哈密顿正则方程在参考态附近线性化方程组的特征根. 根据扁椭球谐振子加八极形变势场中, 粒子规则和混沌运动的判据, 说明了周期含时因子增加了粒子到达等势面负曲率的可能性, 从而使粒子的运动更容易表现出混沌.

关键词 八极形变 周期含时因子 扁椭球 哈密顿正则方程 混沌

考虑一个粒子具有如下的哈密顿量:

$$H_0 = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\rho^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3z\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}) - V_0, \quad (1)$$

式中 ω_0 为谐振子频率, $\omega_0 = \omega_x = b\omega_z$, $b = 0.5$ (对应扁椭球四极形变), λ 为八极形变强度, V_0 为谐振子势的势阱深度.

人们从经典的角度分析了单核子在(1)式的扁椭球谐振子加八极形变谐振子势场中的运动, 指出当不可积扰动 λ 增强到势能面上出现负曲率时系统就会出现混沌运动^[1]. 本文中给(1)式的八极形变增加了一个周期驱动因子, 使其成为:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\rho^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3z\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \cos\omega t) - V_0, \quad (2)$$

ω 为驱动频率. 如果从错误的静态观点看, (2)式中的 $\lambda \cos\omega t$ 相当于(1)的 λ , 好象(2)式中的 $\cos\omega t$ 使(1)式的 λ 值减小, 因而 H 系统应比 H_0 系统更容易趋向于规则运动. 但事实正好相反. 图1是 $\lambda/\lambda_c = 0.3$ 时3种功率谱的比较图. 其中 $P(\omega) = |\bar{z}(\omega)|^2$, 而

$$\bar{z}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t)e^{i\omega t} dt$$

是 $z(t)$ 的傅里叶变换. 图1中, (a)是粒子在扁椭球谐振子势场中运动时 z 方向的振动功率谱, 此时, 粒子的运动是可积的, 在 z 方向上, 粒子以频率 $\omega_z = 2\omega_0$ 作简谐振动; (b)是八极形变无驱动时的功率谱, 图中在 $\omega_z \approx 2\omega_0$ 附近有两个较强的功率谱线, 同时存在着另外一个较弱的功率谱线, 这表明此时粒子的运动是准周期的; (c)中粒子在八极形变低频驱动下 z 方向的振动在在驱动频率 ω 处有一较强的功率谱线, 在 $\omega_z = 2\omega_0$ 处产生了较宽的连续的频率响应, 所以粒子的运动不再是规则的, 而是出现了一定的混沌状态. 这说明八极形变的周期驱动因子使系统更容易趋向于混沌运动. 为什么? 这就是我们本文要研究的主要问题

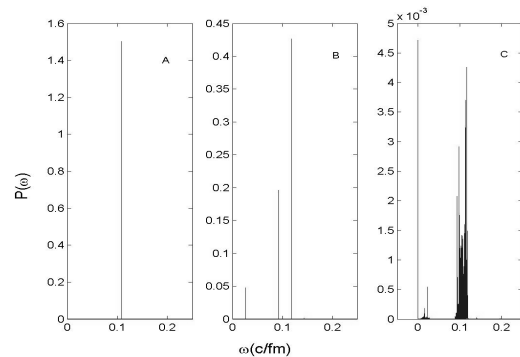


图 1 初始值为: $r_0 = 0$, $\theta_0 = 20^\circ$, 不可积扰动 $\lambda/\lambda_c = 0.3$ 时 z 方向的振动功率谱 (a)无八极形变; (b)无驱动的 H_0 系统(1); (c)有驱动的 H 系统(2).注意:3个图的纵坐标的单位是不一样的.

* 国家自然科学基金(10375001), 上海市教委高校科技发展基金(03DZ03), 上海市科委科技发展基金(0252nm082)和兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心第三期课题资助

1) E-mail: rrrzheng@online.sh.cn

令 $u = \cos \omega t$ 可将哈密顿(2)中含时部分自治化. 得到粒子的哈密顿正则运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_x, & \frac{dz}{dt} &= p_z, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial V(x, z, u)}{\partial x}, \\ \frac{dp_z}{dt} &= -\frac{\partial V(x, z, u)}{\partial z}, \\ \frac{du}{dt} &= v, & \frac{dv}{dt} &= -\omega^2 u, \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式为一非线性微分方程组, 在它的参考解附近线性化以后的特征根方程为

$$(x^4 - (a_t + d_t)x^2 + a_t d_t - b_t^2)(x^2 + \omega^2) = 0, \quad (4)$$

其中 $a_t = -\frac{\partial^2 V(x, z, u)}{\partial x^2}$, $b_t = -\frac{\partial V(x, z, u)}{\partial x \partial z}$, $d_t = -\frac{\partial V(x, z, u)}{\partial z^2}$. 脚标 t 表示变量 u 中含有时间 t . 求解方程(4)得到6个本征值为

$$x_{1,2,3,4} = \pm \left\{ \text{Tr} S_t \pm \left[\frac{1}{4} (\text{Tr} S_t)^2 - K_t \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$x_{5,6} = \pm i\omega$, 其中 $S_t = \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ b_t & d_t \end{pmatrix}$, $K_t = a_t d_t - b_t^2$. 值得一提的是, 这里前4个本征值 $x_{1,2,3,4}$ 与 H_0 系统(1)式对应的全部4个本征值 $x_{1,2,3,4}^0$ 在形式上完全一样. 差别仅在 H_0 中 $V = V(x, z)$ 与时间无关, 因而定义 a, b, d, S, K 均没有下标 t . 由于在 $\lambda/\lambda_c = 0.1 - 0.8$ 的范围内, 有 $\text{Tr} S < 0$, 而 K 与势能面 $V = V(x, z)$ 高斯曲率的正负号相同, 被称之为等效曲率. 当 $K < 0$ 时, 特征根 x^0 中至少有一个根大于零, 致使 $H_0(H)$ 系统中粒子的运动趋于混沌. 为考

察(2)式 H 系统与(1)式 H_0 系统, 哪个更容易出现混沌运动, 考虑到 $\text{Tr}(S_t) \leq \text{Tr} S$, 让我们以 $\lambda/\lambda_c = 0.3$ 为例, 比较 K 和 K_t 小于零, 从而使系统处于混沌状态的范围. 由图2(a)可见, 对于 H_0 系统, 等效曲率 $K < 0$ 只出现在 $z = 1$ 的附近. 而对于 H 系统(b), 等效曲率 $K_t < 0$ 不仅出现在 $z = 1$ 的附近, 也出现在 $z = -1$ 的附近. 事实上, 在 $z = -1$ 的附近, 由于处于 $u = -1$ 的附近, 于是使 $K_t < 0$. 正是因为 $K_t < 0$ 的范围比 $K < 0$ 的范围大, 所以含时的 H 系统比不含时的 H_0 系统更容易处于混沌运动的状态.

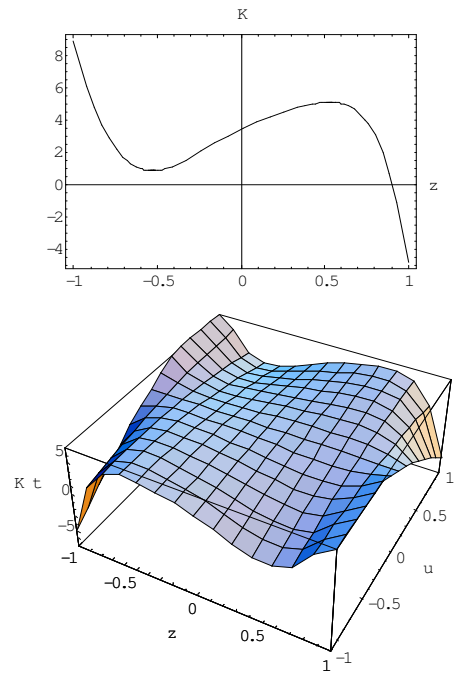


图 2 (a) H_0 系统的 K vs. z 的图象; (b) H 系统的 K_t vs. z 和 $u = \cos \omega t$ 的立体图象

参考文献(References)

- 1 LI Jun-Qing, LIU Fang. The Chaotic Phenomena in Octupole Deformation Field, Journal of Qindao University (Supp.), 1997, 50 (in Chinese)
(李君清, 刘芳. 八极形变谐振子势场中的混沌现象, 青岛大学

学报(增刊), 1997, 50)

- 2 LIU Bin-Zheng. Nonlinear Dynamics and the Bases of Chaos, Changchun: China Northeast Normal University Press, 1994. 37—39 (in Chinese)
(刘秉正. 非线性动力学与混沌基础. 长春: 东北师范大学出版社, 1994. 37—39)

Mechanism of Chaos Induced by the Periodic Driving Octupole Deformation*

ZHENG Ren-Rong^{1,1)} ZHU Shun-Quan² JIN Hua¹ LI Jun-Qing³

1 (Department of Physics, Shanghai Normal University, Shanghai, 200234, China)

2 (Shanghai Commercial College, Shanghai 201400, China)

3 (Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

Abstract The eigen values of the linear equations near the reference solutions of Hamiltonian-canonical equation are given by autonomy the time factor. It is demonstrated that the periodic time factor in octupole potential provides the particle to have more opportunity to encounter the negative curvature of the potential surface. Therefore the particle will be easier to get chaos, according to the discrimination of the motions for regulation and chaos.

Key words octupole deformation, low frequency driving, oblate, the canonical equation of Hamiltonian, chaos

* Supported by National Natural Science Foundation(10375001), Shanghai Foundation for Developing Science and Technology (0252nm082), Shanghai Foundation for Developing Science and Technology in Universities(03DZ03) and Third Phase Foundation of China Lanzhou National Key Laboratory in China

1) E-mail: rrzheng@online.sh.cn