

Frequency Map分析在合肥光源GPLS上的应用*

王相碁¹⁾ 郝浩²⁾ 冯光耀

(中国科学技术大学国家同步辐射实验室 合肥 230029)

摘要 介绍了Frequency Map Analysis在合肥光源上的应用,通过粒子跟踪得到加入六极以及八极磁铁后合肥光源的tune漂移,根据得到的tune图分析高阶共振情况计算发现通用光源模式(GPLS)lattice处在弱共振带上.

关键词 合肥光源 Frequency Map Analysis 非线性动力学 tune图 束流动力学

1 引言

Numerical Frequency Map分析是由J.Laskar首先提出,并应用到太阳系稳定性问题的研究中^[1].这种方法使用数值模拟得到保守哈密顿系统的全局动力学性质,可以更好地分析系统的动力学状况,如共振带的分布等.由于带电粒子在圆形加速器中作长时间的回旋,因此分析其共振等性质尤为重要.现代的同步辐射光源中,为了校正色品以及抑制头尾不稳定性,需要使用大量的六极铁.六极磁铁是非线性元件,会产生一个附加的四极场,非理想轨道上的粒子所看到的四极场强度随粒子的横向位置变化而变化.粒子每圈经过六极铁受到的附加四极场强度是不同的,所以不同初始位置的粒子在这个附加的四极场作用下产生的tune漂移各不相同.很难用解析的方法得到六极铁对系统动力学性质的影响,因此有必要把这种非线性元件对动力学的影响进行数值分析,根据得到的六极铁对系统的影响对系统进行微调,使之达到最佳状态.

2 NAFF计算方法

NAFF(Numerical Analysis of Fundamental Frequency)是一种类似于傅里叶分析来分析频谱的方法.使用如下的映射

$$F^T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y) \rightarrow (\nu_x, \nu_y), \quad (1)$$

这种方法首先对粒子进行跟踪,得到 N 圈的数据后使用一阶Hanning window filter滤波,使得主频分量增大,这样可以得到更精确的tune值.使用Hanning滤波后的精度可以达到 $1/T^4$,而通常的FFT只有 $1/T$.

由于跟踪圈数较多,通常需要数千圈,通常的非辛性跟踪方法得到的结果不能反映出系统的动力学性质.为了对比结果的准确性,作者试验了辛积分方法跟踪以及高阶泰勒映射跟踪两种方法.

2.1 辛积分方法

根据六极铁的磁场分布

$$\begin{cases} B_x = 2\lambda xy, \\ B_y = \lambda(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (2)$$

x, y 分别是实空间中水平和垂直方向的坐标,同时有不考虑纵向偏差的相对论粒子在电磁场中的哈密顿量^[2]

$$H = \frac{1}{2} \left(x' - \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 + \frac{1}{2} \left(y' - \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 - \frac{e}{p_0} A_z, \quad (3)$$

其中 A_x, A_y, A_z 为电磁矢势的分量, $x' = p_x/p_0$, $y' = p_y/p_0$ 是水平和垂直方向动量与理想粒子动量

2005-06-15 收稿, 2005-08-15 收修改稿

*国家自然科学基金(10175062)资助

1) E-mail: wangxaqi@ustc.edu.cn

2) E-mail: hhao3@mail.ustc.edu.cn

之比. 假定六极铁无纵向分量, 得到六极铁哈密顿量为

$$H_s = \frac{1}{6}S(x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2), \quad (4)$$

其中 $S = (1/(B\rho))(d^2B_y/dx^2)$ 是六极铁的归一化强度. 根据李代数方法, 可以得到六极铁的传输函数为

$$M_s = e^{-l:H_s:} = e^{-l:(\frac{1}{6}S(x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2))}, \quad (5)$$

上面的结果无法得到有限长度的解. 根据 BCH 定理^[3]有

$$e^{-l:H_s:} = e^{-l:H_{s1}:} e^{-l:H_{s2}:} e^{-l:H_{s3}:} = e^{-l:\frac{1}{12}S(x^3 - 3xy^2):} e^{-l:\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2):} e^{-l:\frac{1}{12}S(x^3 - 3xy^2):}, \quad (6)$$

而公式(6)是可解的, 设六极铁初始端粒子坐标为 (x_0, x'_0, y_0, y'_0) , 末端粒子坐标为 (x, x', y, y') , 可以得到六极铁的传输函数

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0 l - \frac{1}{2} x_0'^2 l^2 \lambda + \frac{1}{2} \lambda y_0'^2 l^2 \\ x' = x'_0 - \frac{1}{2} \lambda x_0'^2 l^3 + \frac{1}{2} \lambda y_0'^2 l^3 - \\ \quad \lambda x_0 x_0' l^2 + \dots - \frac{1}{8} \lambda^3 y_0'^4 l^5 \\ y = y_0 + y_0' l + \lambda x_0 y_0 l^2 \\ y' = y_0' + \lambda x_0' y_0' l^2 + \lambda x_0 y_0' l^2 + \dots + \frac{1}{2} \lambda^3 x_0 y_0 l^5, \end{cases} \quad (7)$$

检验传输函数的泊松括号,

$$\begin{cases} [x, x'] = [y, y'] = 1 \\ [x, y'] = [x', y] = [x, y] = [x', y'] = 0, \end{cases} \quad (8)$$

可见此映射是满足辛条件的.

2.2 高阶泰勒映射

直接对公式(5)作展开可以得到高阶泰勒映射. 综合考虑, 计算中取映射阶数为6阶, 得到传输函数为

$$\begin{cases} x = x_0 + x'_0 l - \frac{1}{12} \lambda x_0'^2 l^4 \dots + \frac{1}{7200} \lambda y_0'^6 l^{10} \\ x' = x'_0 - \frac{1}{3} \lambda x_0'^2 l^2 + \frac{1}{3} \lambda y_0'^2 l^3 \dots + \frac{1}{720} \lambda^5 y_0'^6 l^9 \\ y = y_0 + y_0' l + \frac{1}{6} \lambda x_0' y_0' l^4 + \frac{1}{3} \lambda x_0 y_0' l^3 + \\ \quad \dots + \frac{13}{18900} \lambda^5 x_0 y_0'^5 l^{10} \\ y' = y_0' + \frac{2}{3} \lambda x_0' y_0' l^3 + \lambda x_0 y_0' l^2 + \\ \quad \dots + \frac{13}{1890} \lambda^5 x_0 y_0'^5 l^9. \end{cases} \quad (9)$$

这个结果是不满足辛条件的, 可以得到其泊松括号为 $[X_\alpha, X_\beta] = S_{\alpha\beta} + \Delta$, 而 $\Delta \sim \mathcal{O}(l^{12})$, 可见泊松括

号所得值残余的量非常小, 近似满足辛条件. 在实际的跟踪计算中也可以发现截断到6阶的泰勒映射在数千圈的跟踪时间内仍然能准确地反映系统的动力学性质.

上述两种方法在横向相空间中的相图如图1, 2所示. 可见两种跟踪情况下的相空间轨迹基本相同, 高阶泰勒映射在混沌到来之前并没有出现相空间轨道的弥散, 说明其辛性质保持得非常好, 所以使用上述两种方法得到的结果相差不大, 这也可以从后面的 Frequency Map 中看出来. 通过进一步跟踪发现, 高于4阶泰勒映射在2000圈跟踪的相图上未发现相空间轨道的弥散, 即仍可以保持近似辛性质. 因此权衡计算所耗费的时间和准确性, 使用泰勒映射跟踪时取6阶已经足够.

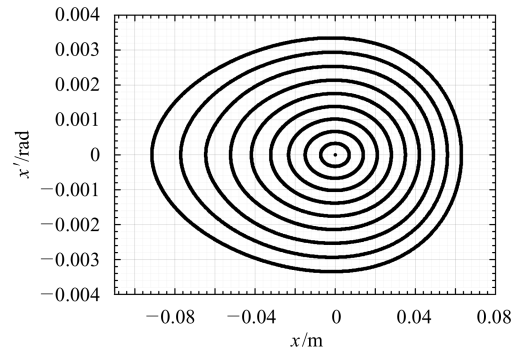


图1 使用辛积分方法得到的水平相空间

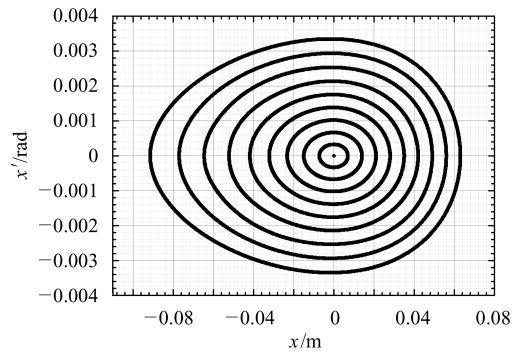


图2 使用泰勒映射得到的水平相空间

为了使束流快速阻尼, 需要使用八极铁产生朗道阻尼, 而八极铁的处理方法与六极铁完全相同, 并且使用辛积分与泰勒级数得到的结果基本相同.

3 Frequency Map Analysis 在 HLS 上的计算结果

合肥光源通用光源(GPLS)模式计算 lattice 参数如表1, 横向振荡数为(3.58, 2.58). 考虑14块六极磁

铁, 强度分别为 $SD = -13.597$, $SF = 11.702$, 在注入能量 200MeV 下对此 lattice 进行跟踪分析, 此时色品为 $\xi_x = \xi_y = 3$, 跟踪 2000 圈得到的动力学孔径如图 3 所示, 再通过 NAFF 得到 tune 分布如图 4, 定义颜色标志

$$D = \log \sqrt{(\nu_{x2} - \nu_{x1})^2 + (\nu_{y2} - \nu_{y1})^2}, \quad (10)$$

其中 (ν_{x1}, ν_{y1}) , (ν_{x2}, ν_{y2}) 分别为前 1000 圈和后 1000 圈的 tune 值, 不同的颜色反映了电子运行过程中的稳定性, 下文的计算均采用辛积分的方法.

表 1 合肥光源通用光源模式(GPLS)lattice 参数

四极铁名称	强度/ m^{-2}
Q1	1.56918
Q2	-0.955667
Q3	-2.2671
Q4	3.0708
Q5	3.0708
Q6	-2.2671
Q7	-0.955667
Q8	1.56918

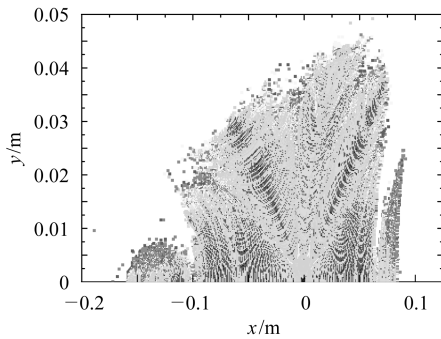


图 3 GPLS 模式动力学孔径

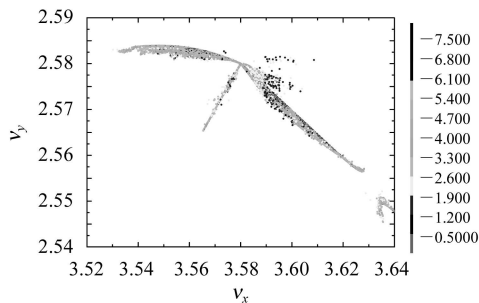


图 4 GPLS 模式 tune 图

在工作点附近粒子运动状况比较复杂, 取其细部, 如图 5 所示, 很容易发现共振带的存在. 而分析其工作点随水平方向振荡振幅的漂移如图 6, 也可以发现, $(x, \nu_x) = (0, 3.58)$ 附近曲线不光滑, 此处的 KAM 环面发生畸变, 工作点附近的动力学状态是弱混沌的, 这条共振线恰恰是 $\nu_x = 3.58$. 这说明当六极铁强度为

$SD = -13.597$, $SF = 11.702$ 时, 机器的工作点在一条弱共振线上.

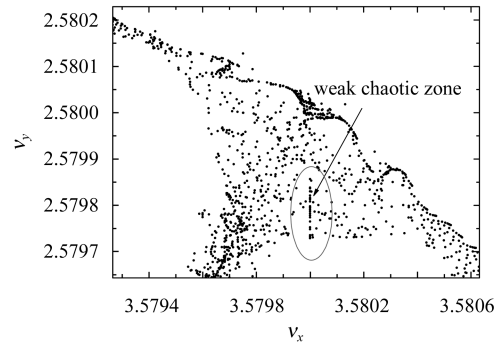


图 5 GPLS tune 图细部

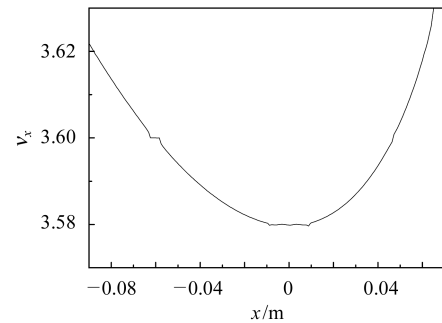


图 6 GPLS 工作点漂移

加入八极铁后, 又会引入不可预见的非线性效应. 保持六极铁强度不变, 取两块八极铁强度均为 1300m^{-4} , 此时朗道阻尼时间约为 $\tau_{\text{Oct}} = 1.9\text{ms}$ ^[4]. 跟踪得到的 tune 图的细部如图 7 所示, 可以看出又出现了一条弱共振线 $\nu_y = 2.58$, 同时 $\nu_x = 3.58$ 共振宽度变宽, 这说明加入了八极铁后其共振情况变强.

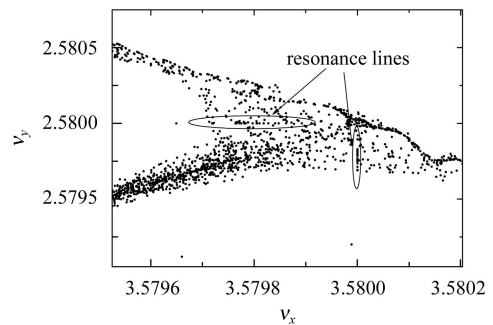


图 7 GPLS 模式加入八极铁后的 tune 图细部

从上面的分析可以看出 GPLS 模式下加入六极铁和八极铁以后工作点附近出现了共振线 $\nu_x = 3.58$ 和 $\nu_y = 2.58$, 即工作点本身就处在弱共振带上, 显然这对于机器的运行是不利的.

对于合肥光源 GPLS 运行的工作点 $(3.55, 2.59)$, 跟踪后得到的动力学孔径并无多大改变, 得到的 tune

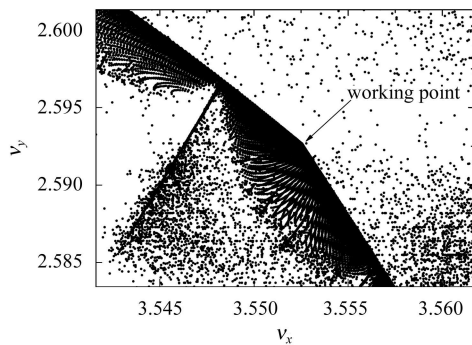


图8 GPLS模式另一工作点的tune图细部

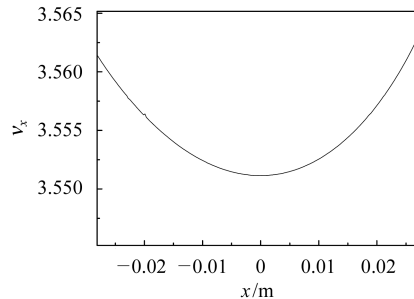


图9 GPLS另一工作点漂移

图在工作点附近的情况如图8所示. 可见虽然工作点附近密布共振线, 但工作点本身并没有受到影响. 由图9可见 tune 随水平方向振荡振幅的变化是光滑的, 说明KAM环面没有畸变, 也就是并无混沌产生. 因此从全局动力学的角度来说, 这个工作点应该是稳定的.

4 结论

通过Frequency Map分析, 得到了计算的lattice下合肥光源在高阶场作用下的全局非线性动力学的性质, 并通过分析频率漂移找出了运行lattice稳定的一个原因, 说明使用Frequency Map分析对于进一步探讨合肥光源的动力学性质是有益的.

感谢国家同步辐射实验室的王琳博士和张赫博士对本论文工作的有益讨论.

参考文献(References)

- 1 Laskar J. Icarus, 1990, **88**: 266—291
- 2 Wiedemann H. Particle Accelerator Physics: Vol **2**(2nd Edition). Springer, 1999. 1—10
- 3 Chao A W. SLAC-PUB-9574. 213—216
- 4 LIU J H. HLS Bunch by Bunch Measurement System and Beam Instability Research. University of Science and Technology of China Thesis, 2005. 95—97 (in Chinese)
(刘建宏. HLS bunch by bunch测量系统研制及束流不稳定性初步研究, 中国科学技术大学博士论文, 2005. 95—97)

Application of Frequency Map Analysis to HLS GPLS Mode*

WANG Xiang-Qi¹⁾ HAO Hao²⁾ FENG Guang-Yao

(National Synchrotron Radiation Laboratory,
University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

Abstract For the Phase 2 of HLS (Hefei Light Source) Project, many sextupoles and octupoles have been installed in the machine to improve the operation condition. These nonlinear elements will introduce nonlinear effects to the beam dynamics. In this paper, we apply Frequency Map Analysis to the HLS ring. By analyzing the resonance lines on the tune map, we find that the calculated lattice of GPLS mode lies on the weak chaotic zone, and the operating mode is better.

Key words HLS, Frequency Map Analysis, non-linear dynamic, tune map, beam dynamic

Received 15 June 2005, Revised 15 August 2005

*Supported by National Natural Science Foundation of China (10175062)

1) E-mail: wangxaqi@ustc.edu.cn

2) E-mail: hhao3@mail.ustc.edu.cn