非二进制离散小波的研究*

林海[1;1)] 刘连寿[2]

1 (雁北师范学院 大同 037009)
2 (华中师范大学 武汉 430070)

摘要 研究了非二进制离散小波, 提出了构建基本小波函数的理论与方法, 并以 $\lambda=3,4$ 为例具体构建了小波函数. 对非二进制小波的分解算法和回复算法进行了理论推证, 并针对 $\lambda=3,4$ 的情况具体研究了变换矩阵问题. 提出了本文所得结果在高能碰撞研究中的重要应用前景.

关键词 小波分析 非二进制小波 高能碰撞 小波函数

1 引言

上世纪80年代, Marlet和Arens等人首次提出了“小波” (wavelet)的概念. 小波分析的出现和发展, 源于不同科学领域信号处理的需要, 小波分析提供了一种自适应的时域和频域同时局部化的分析方法. 作为一种数学工具, 小波分析已广泛地应用于信号分析、图像处理、数值分析等方面, 近年来已被用于物理、化学问题的许多研究领域. 而在这些应用中产生的问题进一步激发了人们研究小波分析的兴趣.

按一般的定义[1], 函数集合

$$\psi_{a,b}(x)=|a|^{\frac{1}{2}}\psi(ax-b), \qquad (a,b\in R, \quad a\neq 0), \quad (1)$$

称为连续小波, 称 $\psi(x)$ 为基本小波函数. 在数值计算中, 常常需要把连续小波及其变换离散化, 在常见的离散小波分析中[2], 一般取 $a=2^j$, b 取作 k, 其中 j,k 取作整数, 即

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-k) \qquad (2)$$

这就是二进制离散小波.

当小波分析应用于不同的物理问题时, 需要找出恰当的、合乎物理问题要求的小波函数. 在应用于高能碰撞多重产生的研究中时, 常选用Haar小波函数[3–6], 这种小波是最简单的二进制离散小波. 高能碰撞间歇现象的进一步研究表明, 有必要考虑分割数 λ 大于2的情况[7]. 要想把小波分析方法应用于这种情况, 就需要研究非二进制离散小波. 近年来, 一些研究工作已涉及到了这方面的内容[8–10]. 本文试图通过对非二进制离散小波基本函数的选择、双尺度方程的构建、多分辨分析中的分解、回复算法、变换矩阵以及在高能碰撞末态相空间分析中的应用等方面的讨论, 达到对非二进制离散小波系统的研究, 这种研究对拓宽小波在各种研究中的应用有着积极的意义.

2 二进制离散小波基本理论

在小波分析中, 设 $\phi(x)$ 为基本标度函数, $\psi(x)$ 为基本小波函数. 正交的二进制标度函数 $\phi_{j,k}(x)$ 和小波函数 $\psi_{j,k}(x)$ 可由 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 通过压缩平移得到

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k), \qquad (3)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k). \qquad (4)$$

基本标度函数以及基本小波函数之间满足双尺度方程

$$\phi(x) = \sum_n h_n\phi(2x-n), \qquad (5)$$

$$\psi(x) = \sum_n g_n\phi(2x-n), \qquad (6)$$

系数 h_n 与 g_n 有如下关系

$$g_n=(-1)^nh_{1-n}. \qquad (7)$$

一个信号或一个函数 $f(x)$ 可在不同的小波尺度空间展开, 以反映该函数不同层次的细

2005 – 11 – 22 收稿
* 山西省自然科学基金(20021008)资助
1) E-mail: jiaowulinhai@sina.com

节. 若用 $V_n = \mathrm{span}\{\phi_{n,k}(x)|\phi_{n,k}(x)=2^{n/2}\phi(2^n x-k),\ k\in Z\}$ 表示 n 阶小波尺度空间, $W_n = \mathrm{span}\{\psi_{n,k}(x)|\psi_{n,k}(x)=2^{n/2}\psi(2^n x-k),\ k\in Z\}$ 表示 n 阶小波子空间, 则小波尺度空间的有限分解为

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= W_n\oplus V_n = \\ &W_n\oplus W_{n-1}\oplus V_{n-1} = \\ &\cdots\cdots \\ &W_n\oplus W_{n-1}\oplus\cdots\oplus W_0\oplus V_0. \end{aligned} \tag{8}$$

函数 $f(x)$ 可以近似展开为 $f^N(x)$

$$\begin{aligned} f^N(x) &= \sum_k c_k^N\phi_{N,k}(x) = \\ &\sum_k c_k^{N-1}\phi_{N-1,k}(x)+\sum_k d_k^{N-1}\psi_{N-1,k}(x) = \\ &\cdots\cdots \\ &\sum_k c_k^j\phi_{j,k}(x)+\sum_{m=j}^{N-1}\sum_k d_k^m\psi_{m,k}(x) = \\ &\cdots\cdots \\ &c_0^0\phi_{0,0}(x)+\sum_{m=0}^{N-1}\sum_k d_k^m\psi_{m,k}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

在上式中第一个等式称作 $f(x)$ 的母表示, 最后一个等式称作 $f(x)$ 的父表示.

小波在用于消噪和数据压缩方面时, 其主要运算涉及到的就是分解运算和回复运算[11–13]. 分解算法系数递推公式

$$c_n^j = 2^{-1/2}\sum_k c_k^{j+1}h_{k-2n}, \tag{10}$$

$$d_n^j = 2^{-1/2}\sum_k c_k^{j+1}g_{k-2n}. \tag{11}$$

回复算法的递推公式为

$$\begin{cases} \tilde{c}_n^{j+1} = 2^{-1/2}\sum_l c^j_{(n-l)/2}h_l \\ \tilde{\tilde{c}}_n^{j+1} = 2^{-1/2}\sum_l d^j_{(n-l)/2}g_l \\ c_n^{j+1} = \tilde{c}_n^{j+1}+\tilde{\tilde{c}}_n^{j+1} \end{cases}. \tag{12}$$

对于 Haar 小波, 标度函数为

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}, \tag{13}$$

根据 $\phi(x)$ 的正交性和 (5) 式, 由

$$\int_0^1\phi(x)\phi(2x-n)\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_k h_k\phi(2x-k)\phi(2x-n)\mathrm{d}x$$

可确定出

$$h_n=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & 其他\end{cases},\quad g_n=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=1\\ 0 & 其他\end{cases}. \tag{14}$$

由此导出 $\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$, 即

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}. \tag{15}$$

按方程 (3) 和 (4) 通过压缩和平移生成的 $\phi_{j,k}(x)$ 和 $\psi_{j,k}(x)$ 有如下性质

$$\int_0^1\phi_{j,k}(x)\phi_{j,l}(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1\psi_{j,k}(x)\mathrm{d}x=0,\\ &\int_0^1\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & j=j',\ k=k'\\ 0 & 其他\end{cases}. \end{aligned} \tag{17}$$

3　非二进制离散小波的基本小波函数

在 (1) 式中, 如果 a 不取 2^j 的形式, 而是取作 $a=\lambda^j$, 其中 λ 取作大于 2 的整数, 例如 $\lambda=3,\ 4$ 等时, b 取为 k (整数), 即为非二进制离散小波.

3.1　基本小波函数的构建

当 $\lambda>2$ 时, 把形式为 (5), (6) 式的双尺度方程修改为

$$\phi(x) = \sum_n h_n\phi(\lambda x-n), \tag{18}$$

$$\psi^{(1)}(x) = \sum_n g_n^{(1)}\phi(\lambda x-n), \tag{19}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\psi^{(\lambda-1)}(x) = \sum_n g_n^{(\lambda-1)}\phi(\lambda x-n). \tag{20}$$

$\phi_{j,k}(x)$ 与 $\psi_{j,k}^{(\lambda-1)}(x)$ 的定义类似于 (3) 和 (4) 式, 其正交性和归一性类似于 (16) 和 (17) 式.

先考虑 $\lambda=3$ 的情况. 标准正交标度函数取为

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}, \tag{21}$$

由 (18) 式及 $\phi(x)$ 的正交性可得

$$h_n=\begin{cases}1 & n=0,1,2\\ 0 & 其他\end{cases}, \tag{22}$$

$g_n^{(1)}$ 和 $g_n^{(2)}$ 分别构建为

$$g_n^{(1)}=(-1)^n h_{1-n}=\begin{cases}1 & n=0\\ -1 & n=1\\ 0 & 其他\end{cases},$$
$$g_n^{(2)}=(-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{n!}{2}h_n=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=0,1\\ -1 & n=2\\ 0 & 其他\end{cases}. \tag{23}$$

由此得到 $\lambda=3$ 时的小波基函数[8]

$$\psi^{(1)}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\\ 0 & 其他\end{cases},$$
$$\psi^{(2)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\leqslant x<\frac{2}{3}\\ -1 & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}. \tag{24}$$

$\lambda=4$ 时的标度函数也取为(21)的形式, 同理可推出

$$h_n=\begin{cases}1 & n=0,1,2,3\\ 0 & 其他\end{cases}, \tag{25}$$

可构建

$$\begin{aligned} g_n^{(1)} &= (-1)^n h_{1-n},\\ g_n^{(2)} &= (-1)^n h_{n-2}h_n,\\ g_n^{(3)} &= (-1)^{[\frac{n}{2}]}h_n. \end{aligned} \tag{26}$$

由此可得[8]

$$\psi^{(1)}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\frac{1}{4}\\ -1 & \frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 0 & 其他\end{cases},$$
$$\psi^{(2)}(x)=\begin{cases}1 & \frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}\\ -1 & \frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}, \tag{27}$$
$$\psi^{(3)}(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其他\end{cases}.$$

3.2 基本小波函数的理论分析

对于定义在 [0, 1] 区间上的一个函数

$$f(x)=\begin{cases}a & 0\leqslant x<\frac{1}{3}\\ b & \frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3}\\ c & \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}, \tag{28}$$

选 $\lambda=3$ 的小波函数, $f(x)$ 的母表示为 $f(x)=a\phi(3x)+b\phi(3x-1)+\phi(3x-2)$, 设其父表示[5, 6]为 $f(x)=A\phi(x)+B\psi^{(1)}(x)+C\psi^{(2)}(x)$. 则由(24)式知有如下线性方程组成立

$$\begin{cases}a=A+B+\frac{C}{2}\\ b=A-B+\frac{C}{2}\\ c=A-C\end{cases}, \tag{29}$$

由此解出父表示系数为

$$\begin{cases}A=\frac{a+b+c}{3}\\ B=\frac{a-b}{2}\\ C=\frac{a+b-2c}{3}\end{cases}. \tag{30}$$

同样, 对于定义在 [0, 1] 区间上的一个函数

$$f(x)=\begin{cases}a & 0\leqslant x<\frac{1}{4}\\ b & \frac{1}{4}\leqslant x<\frac{1}{2}\\ c & \frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}\\ d & \frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}, \tag{31}$$

选 $\lambda=4$ 的小波函数, $f(x)$ 的母表示为

$$f(x)=a\phi(4x)+b\phi(4x-1)+\phi(4x-2)+\phi(4x-3),$$

设父表示为

$$f(x)=A\phi(x)+B\psi^{(1)}(x)+C\psi^{(2)}(x)+D\psi^{(3)}(x).$$

由(27)式知有如下线性方程组成立

$$\begin{cases}a=A+B+D\\ b=A-B+D\\ c=A+C-D\\ d=A-C-D\end{cases}, \tag{32}$$

由此解出父表示系数为

$$\begin{cases} A=\dfrac{a+b+c+d}{4} \\ B=\dfrac{a-b}{2} \\ C=\dfrac{c-d}{2} \\ D=\dfrac{a+b-c-d}{4} \end{cases}. \tag{33}$$

函数 $f(x)$ 采用 λ 阶小波的母表示与父表示时, 母表示系数与父表示系数之间要满足 λ 阶线性方程组. 由此可推知, 非二进制离散小波的基本小波函数应有 $\lambda-1$ 个, 如 (24) 和 (27) 式. 可以将其构建成 $\lambda-1$ 维的空间矢量

$$\boldsymbol{\psi}(x)=(\psi^{(1)}(x),\psi^{(2)}(x),\cdots\psi^{(\lambda-1)}(x)), \tag{34}$$

而小波函数 $\boldsymbol{\psi}_{j,k}(x)$ 由 $\boldsymbol{\psi}(x)$ 经压缩和平移得到, 形式为

$$\boldsymbol{\psi}_{j,k}(x) = (\psi_{j,k}^{(1)}(x),\psi_{j,k}^{(2)}(x),\cdots\psi_{j,k}^{(\lambda-1)}(x)), \tag{35}$$

$$\psi_{j,k}^{(i)}(x) = \lambda^{j/2}\psi^{(i)}(\lambda^j x-k),\ \ (i=1,2,\cdots,\lambda-1). \tag{36}$$

函数 $f(x)$ 可以近似展开为 $f^N(x)$

$$f^{(N)}(x)=c_0^0\phi(x)+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{\lambda^j-1}\boldsymbol{d}_k^j\cdot\boldsymbol{\psi}_{j,k}(x) \tag{37}$$

其中 $\boldsymbol{d}_k^j=(\boldsymbol{d}_k^{j^{(1)}},\ \boldsymbol{d}_k^{j\,(2)},\ \cdots\ \boldsymbol{d}_k^{j^{(\lambda-1)}})$ 与 c_0^0 一起称作父表示系数.

4 Mallat 算法及变换矩阵

在小波的多分辨分析中, Mallat 算法是一种数字的快速递推算法, 包括分解算法和回复算法. 分解算法是由一个函数 $f(x)$ 的母表示推出其父表示的算法, 回复算法是由一个函数的父表示推出其母表示的算法.

4.1 分解算法

对于分割数为 λ 的非二进制离散小波函数, 其分解算法的递推公式推证如下:

设

$$f^{j+1}(x)=\sum_k c_k^{j+1}\phi_{j+1,k}(x),\quad f^{j+1}(x)\in V_{j+1}, \tag{38}$$

$$f^j(x)=\sum_k c_k^j\phi_{j,k}(x),\quad f^j(x)\in V_j, \tag{39}$$

$$w^j(x)=\sum_k \boldsymbol{d}_k^j\cdot\boldsymbol{\psi}_{j,k}(x),\quad w^j(x)\in W_j, \tag{40}$$

根据 $\phi_{j,k}(x)$ 的正交性可知

$$c_n^j=(f^j(x),\phi_{j,n}(x)), \tag{41}$$

由 $V_j\perp W_j$ 可得

$$c_n^j=(f^j(x)+w^j(x),\phi_{j,n}(x)), \tag{42}$$

因为 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$, 所以

$$\begin{aligned} c_n^j\ =\ & \big(f^{j+1}(x),\phi_{j,n}(x)\big)= \\ & \sum_k c_k^{j+1}(\phi_{j+1,k}(x),\phi_{j,n}(x))= \\ & \sum_k c_k^{j+1}(\lambda^{(j+1)/2}\phi(\lambda^{j+1}x-k),\ \lambda^{j/2}\phi(\lambda^j x-n))= \\ & \sum_k c_k^{j+1}\lambda^{1/2}(\phi(\lambda y+\lambda n-k),\ \phi(y))= \\ & \sum_k c_k^{j+1}\lambda^{1/2}\sum_m h_m(\phi(\lambda y+\lambda n-k),\phi(\lambda y-m))= \\ & \lambda^{-1/2}\sum_k c_k^{j+1}h_{k-\lambda n}. \end{aligned} \tag{43}$$

根据 $\psi_{j,n}^{(i)}(x)$ 的正交性和归一性,

$$d^{(i)}{}_n^j=(w^j(x),\psi_{j,n}^{(i)}(x)), \tag{44}$$

由 $V_j\perp W_j$ 可得

$$d^{(i)}{}_n^j=(w^j(x)+f^j(x),\ \psi_{j,n}^{(i)}(x))=(f^{j+1}(x),\psi_{j,n}^{(i)}(x)), \tag{45}$$

仿照 (43) 式的推导可得

$$d^{(i)}{}_n^j=\lambda^{-1/2}\sum_k c_k^{j+1}g_{k-\lambda n}^{(i)},\quad i=1,2,\cdots\lambda-1, \tag{46}$$

(43) 式和 (46) 式就是分解算法的递推公式.

4.2 回复算法

由 (38) 式知

$$c_n^{j+1}=(f^{j+1}(x),\phi_{j+1,n}(x)), \tag{47}$$

因为 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$, 所以

$$c_n^{j+1}=(f^j(x)+w^j(x),\phi_{j+1,n}(x)), \tag{48}$$

应用 (39) 和 (40) 式得

$$\begin{aligned} c_n^{j+1}\ =\ & \sum_k c_k^j(\phi_{j,k}(x),\phi_{j+1,n}(x))+ \\ & \sum_k d^{(1)}{}_k^j(\psi_{j,k}^{(1)},\ \phi_{j+1,n}(x))+\cdots+ \\ & \sum_k d^{(\lambda-1)}{}_k^j(\psi_{j,k}^{(\lambda-1)}(x),\phi_{j+1,n},(x)). \end{aligned} \tag{49}$$

根据 $\phi_{j,k}(x)$ 和 $\psi_{j,k}^{(i)}(x)$ 的定义及其正交归一性可知

$$
\begin{aligned}
&(\phi_{j,k}(x),\ \phi_{j+1,n}(x))=\\
&\qquad\left(\lambda^{j/2}\phi(\lambda^j x-k),\lambda^{j+1/2}\phi(\lambda^{j+1}x-n)\right)=\\
&\qquad\lambda^{1/2}\int\limits_R\phi(y)\phi(\lambda y+\lambda k-n)\mathrm{d}y=\\
&\qquad\lambda^{1/2}\sum_m h_m\int\limits_R\phi(\lambda y-m)\phi(\lambda y-n+\lambda k)\mathrm{d}y=\\
&\qquad\lambda^{-1/2}h_{n-\lambda k},
\end{aligned}\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\psi^{(i)}_{j,k}(x),\ \phi_{j+1,n}(x))=\\
&\qquad(\lambda^{j/2}\psi^{(i)}(\lambda^j x-k),\lambda^{(j+1)/2}\phi(\lambda^{j+1}x-n))=\\
&\qquad\lambda^{1/2}\int\limits_R\psi^{(i)}(y)\phi(\lambda y+\lambda k-n)\mathrm{d}y=\\
&\qquad\lambda^{1/2}\sum_m g^{(i)}_m\int\limits_R\phi(\lambda y-m)\phi(\lambda y-n+\lambda k)\mathrm{d}y=\\
&\qquad\lambda^{-1/2}g^{(i)}_{n-\lambda k},\qquad (i=1,2,\cdots,\lambda-1).
\end{aligned}\tag{51}
$$

将(50)和(51)式代入(49)式, 得

$$
\begin{aligned}
c^{j+1}_n\ =\ &\lambda^{-1/2}\sum_k c^j_k h_{n-\lambda k}+\sum_k d^{(1)}{}^j_k g^{(1)}_{n-\lambda k}+\cdots+\\
&\sum_k d^{(\lambda-1)}{}^j_k g^{(\lambda-1)}_{n-\lambda k},
\end{aligned}\tag{52}
$$

令

$$
\begin{aligned}
c^{(0)}{}^{j+1}_n\ &=\ \lambda^{-1/2}\sum_k c^j_k h_{n-\lambda k},\\
c^{(1)}{}^{j+1}_n\ &=\ \lambda^{-1/2}\sum_k d^{(1)}{}^j_k g^{(1)}_{n=\lambda k},\\
&\cdots\cdots,\\
c^{(\lambda-1)}{}^{j+1}_n\ &=\ \lambda^{-1/2}\sum_k d^{(\lambda-1)}{}^j_k g^{(\lambda-1)}_{n=\lambda k},
\end{aligned}
$$

则 $$c^{j+1}_n=c^{(0)}{}^{j+1}_n+c^{(1)}{}^{j+1}_n+\cdots+c^{(\lambda-1)}{}^{j+1}_n,\tag{53}$$

这就是回复算法的系数递推公式.

4.3 变换矩阵

根据递推公式(43)和(46)式, 可推出函数$f(x)$在V_{j+1}空间的母表示与其父表示之间的关系. 设ρ是由$f^{(j+1)}(x)$母表示系数$c^{j+1}_0,c^{j+1}_1,\cdots c^{j+1}_{\lambda^{j+1}-1}$为元素构成的列矩阵, $\tilde{\rho}$是由其父表示系数

$$
\begin{aligned}
&c^0_0,d^{(1)}{}^0_0,d^{(1)}{}^1_0,\cdots,d^{(1)}{}^1_{\lambda-1},\cdots d^{(1)}{}^j_0\cdots d^{(1)}{}^j_{\lambda^j-1},\cdots\\
&d^{(\lambda-1)}{}^0_0,d^{(\lambda-1)}{}^1_0,\cdots,d^{(\lambda-1)}{}^1_{\lambda-1},\cdots d^{(\lambda-1)}{}^j_0\cdots d^{(\lambda-1)}{}^j_{\lambda^j-1}
\end{aligned}
$$

为元素构成的列矩阵, 它们之间存在一个变换矩阵W, 关系式为$\tilde{\rho}=W\rho$, W为$\lambda^{j+1}\times\lambda^{j+1}$阶矩阵. 它的结构为$W=\tilde{A}^{(1)}\tilde{A}^{(2)}\cdots\tilde{A}^{(j)}A^{(j+1)}$, 其中

$$\tilde{A}^{(i)}=\begin{bmatrix}A^{(i)} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\tag{54}$$

而$A^{(i)}$为$\lambda^i\times\lambda^i$阶矩阵. $\tilde{A}^{(i)}$为$\lambda^{j+1}\times\lambda^{j+1}$阶矩阵, I为相应的单位矩阵.

为明确起见, 下面列出了$\lambda=3,4$两种情况下的$A^{(j+1)}$.

对于$\lambda=3$

$$
A^{(j+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}
1&1&1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&\cdots&0&0&0\\
&&&&&&\ddots&&&\\
0&0&0&0&0&0&\cdots&1&1&1\\
1&-1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0\\
0&0&0&1&-1&0&\cdots&0&0&0\\
&&&&&&\ddots&&&\\
0&0&0&0&0&0&\cdots&1&-1&0\\
\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\
0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1&\cdots&0&0&0\\
&&&&&&\ddots&&&\\
0&0&0&0&0&0&\cdots&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1
\end{bmatrix},\tag{55}
$$

对于$\lambda=4$

$$
A^{(j+1)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&\cdots&0&0&0&0\\
&&&&&&&&\ddots&&&&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots&1&1&1&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
&&&&&&&&\ddots&&&&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots&1&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&\cdots&0&0&0&0\\
&&&&&&&&\ddots&&&&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1&1\\
1&1&-1&-1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&-1&-1&\cdots&0&0&0&0\\
&&&&&&&&\ddots&&&&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots&1&1&-1&-1
\end{bmatrix}.\tag{56}
$$

5 结论与讨论

通过本文的研究, 得到了非二进制小波的一些重要结果. 例如, 基本小波函数的构建方法, 小波函数是矢量函数, 分解算法、回复算法的递推公式, 变换矩

阵等. 这些结果对于小波理论的进一步研究有着积极的意义, 同时在各种不同的研究领域也有着广泛的应用. 下面以在高能碰撞多重产生方面的应用为例加以讨论.

在高能碰撞末态分析中, 常常使用分割数不等于2的α模型, 利用本文的结果, 可对末态相空间的几率矩C_q、阶乘矩F_q与分割窗口数M的关系进行分析研究[7—9]. 在用二进制小波进行分析时, 要求末代窗口数一定是$M=2^\nu$, 有了非二进制小波的支持就放宽了这方面的限制. 在α模型中, 当知道了最后一代几率分布后, 用小波分析的分解算法, 可很方便地做出几率矩C_q、阶乘矩F_q与分割窗口数M的关系图, 便于理论上的进一步研究.

应用小波变换矩阵, 可对末态相空间的关联问题进行研究. 既可做解析计算, 也可做模拟分析. 结合一阶小波关联矩为零, 二阶小波关联矩只有对角元素不为零的结果[8], 可方便地进行窗口几率关联方面的研究. 有关这方面的研究工作正在进行中.

参考文献(References)

1 XU Chang-Fa, LI Guo-Kuan. Practical Wavelet Method. Wuhan: Publisher of Huazhong University of Science and Technology, 2001. 42—53 (in Chinese)
(徐长发, 李国宽. 实用小波方法. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001. 42—53)

2 LI Bi-Cheng, LOU Jian-Shu. Wavelet Analysis and Wavelet Application. Beijing: Publisher of Electronics Industry, 2003. 9—38(in Chinese)
(李弼程, 罗建书. 小波分析及其应用. 北京: 电子工业出版社, 2003. 9—38)

3 Greiner M, Lipa P, Carruthers P. Phys, Rev., 1995, **E51**: 1948—1952

4 Greiner M, Giesemann J, Lipa P et al. Z. Phys., 1996, **C69**: 305—310

5 ZHANG Huang et al. Phys. Rev., 1996, **D54**: 750—760

6 LIN Hai, LIU Lian-Shou. HEP & NP, 1998, **22**(6): 529—537 (in Chinese)
(林海, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1998, **22**(6): 529—537)

7 LIN Hai, LIU Lian-Shou. Chinese Sience Bulletin, 1995, **40**(6): 502—505 (in Chinese)
(林海, 刘连寿. 科学通报, 1995, **40**(6): 502—505)

8 LIN Hai, LIU Lian-Shou. HEP & NP, 1997, **21**(6): 513—522 (in Chinese)
(林海, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1997, **21**(6): 513—522)

9 LIN Hai, LIU Lian-Shou. HEP & NP, 1996, **20**(7): 625—634 (in Chinese)
(林海, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, **20**(7): 625—634)

10 LIN Hai, ZHAO Ren, LIU Lian-Shou. HEP & NP, 1998, **22**(6): 522—528 (in Chinese)
(林海, 赵仁, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1998, **22**(6): 522—528)

11 Albert Boggess, Narcowich Francis J. A First Course in Wavelet with Fourier Analysis. Beijing: Publishing House of Electronics Idustry, 2002. 183—242

12 ZHAO Kai, WANG Zong-Hua. Wavelet Transform and Application on the Analytical Chemistry. Beijing: Geological Publishing House, 2000. 70—99 (in Chinese)
(赵凯, 王宗花. 小波变换及其在分析化学中的应用. 北京: 地质出版社, 2000. 70—99)

13 CHENG Zheng-Xing. Wavelet Analysis Arithmetic and Application. Xian: Publisher of Xi'an Jiaotong University, 1998. 20—56 (in Chinese)
(程正兴. 小波分析算法与应用. 西安: 西安交通大学出版社, 1998. 20—56)

A Study of Non-binary Discontinuity Wavelet*

LIN Hai[1;1)]　LIU Lian-Shou[2]

1 (Yanbei Normal Institute, Datong 037009, China)
2 (Huazhong Normal University, Wuhan 430070, China)

Abstract This paper gives a study of non-binary discontinuity wavelet, put forward the theory and method of constituting basic wavelet functions, and has constituted concretely a wavelet function using λ=3.4 as an example. It also conducts a theoretical inference on the decomposition algorithm and reconstruction algorithm of non-binary wavelet, and gives a concrete study of the change of matrix in connection with λ=3.4. In the end, it shows the future of application of the result to the study of high energy collision.

Key words wavelet analysis, non-binary wavelet, high energy collision, wavelet function

Received 22 November 2005
*Supported by Natural Science Foundation of Shanxi Province of China (20021008)

1) E-mail: jiaowulinhai@sina.com