

对规范粒子极化矢量的一些讨论*

曹俊杰^{1;1)} 陈兰莉^{1,2} 杨金民³

1 (河南师范大学物理与信息工程学院 新乡 453002)

2 (河南南阳理工学院电子系 南阳 473004)

3 (中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

摘要 对规范粒子的极化矢量做了较为系统的论述. 讨论内容包括极化矢量的具体形式和性质、求和规则和规范传播子之间的关系以及由其张成的投影算子的性质. 通过若干精选的例子, 进一步演示了计算牵涉规范粒子的过程时采用的基本方法和应当注意事项.

关键词 极化矢量 Helicity 态 求和规则 传播子 投影算子

1 引言

在常见的规范理论教材中^[1-6], 通常对规范粒子传播子的论述较多, 而对于规范粒子的极化矢量则鲜有较为系统的论述. 毫无疑问, 对于从事粒子唯象研究者而言, 理解规范粒子的极化矢量和传播子之间的关系并掌握规范粒子极化矢量的各种性质是很有必要的. 讨论规范粒子极化矢量的性质以及其在实际计算中的应用是本文的目的.

2 规范粒子极化矢量的形式和性质

在量子场论中, 规范粒子是矢量粒子, 它处于洛伦兹群的 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示空间^[1]. 在该表示空间中, 如果以通常的四维时空矢量作为基矢, 则自旋算子的形式为

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$
$$S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

为了给出规范粒子极化矢量的形式, 需要考虑规范粒子有、无质量两种情况.

(1) 规范粒子质量不为零的情况:

在这种情况下, 设在粒子静止系中, 粒子的自旋矢量为 $s = (0, \mathbf{s}) = (0, s_x, s_y, s_z)$, 那么极化方向沿 \mathbf{s} 方向的 3 个态分别为

(i) 若 $s_x = s_y = 0$,

$$\varepsilon_0 = (0, 0, 0, 1), \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \varepsilon_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0).$$

(ii) 若 $s_x^2 + s_y^2 \neq 0$,

$$\lambda = 1: \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2(s_x^2 + s_y^2)}} \times (0, -s_x s_z + i s_y, -s_y s_z - i s_x, s_x^2 + s_y^2),$$
$$\lambda = -1: \quad \varepsilon_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2(s_x^2 + s_y^2)}} \times (0, -s_x s_z - i s_y, -s_y s_z + i s_x, s_x^2 + s_y^2),$$
$$\lambda = 0: \quad \varepsilon_0 = (0, s_x, s_y, s_z). \quad (2)$$

上述形式是在粒子静止系中成立的, 为了给出粒子在实验室系中自旋矢量和极化矢量的形式, 应当对 (2) 式进行洛伦兹 Boost:

$$s^{\text{lab}} = \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{m}, \mathbf{s} + \frac{\mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{m(p_0 + m)} \right),$$
$$\varepsilon_\lambda^{\text{lab}} = \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda}{m}, \varepsilon_\lambda + \frac{\mathbf{p} \mathbf{p} \cdot \varepsilon_\lambda}{m(p_0 + m)} \right), \quad (3)$$

2006 - 03 - 23 收稿

* 国家自然科学基金(10475107, 10505007)资助

1) E-mail: junjie@physics.technion.ac.il

其中 $p = (p_0, \mathbf{p})$ 为粒子在实验室系中的动量, m 为粒子的质量. (3) 式中的 $\varepsilon_\lambda^{\text{lab}}$ 即为极化方向为 s^{lab} 的极化矢量的一般形式.

特别的, 当自旋方向取为粒子动量方向, 即令 $s = \left(0, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}\right)$ 时, 可得规范玻色子的 Helicity 态:

(i) 若 $p_x = p_y = 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{\text{H}} &= \frac{(0, 1, i, 0)}{\sqrt{2}}, & \varepsilon_{-1}^{\text{H}} &= \frac{(0, 1, -i, 0)}{\sqrt{2}}, \\ \varepsilon_0^{\text{H}} &= \left(\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{p_0}{m}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

(ii) 若 $p_x^2 + p_y^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{\text{H}} &= \frac{\left(0, -\frac{p_x p_z}{|\mathbf{p}|} + i p_y, -\frac{p_y p_z}{|\mathbf{p}|} - i p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2}{|\mathbf{p}|}\right)}{\sqrt{2(p_x^2 + p_y^2)}}, \\ \varepsilon_{-1}^{\text{H}} &= \frac{\left(0, -\frac{p_x p_z}{|\mathbf{p}|} - i p_y, -\frac{p_y p_z}{|\mathbf{p}|} + i p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2}{|\mathbf{p}|}\right)}{\sqrt{2(p_x^2 + p_y^2)}}, \\ \varepsilon_0^{\text{H}} &= \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{p_0}{m}\right). \end{aligned} \quad (5)$$

对于任意坐标系中的自旋矢量 s 和极化矢量 ε_λ , 很容易验证它们有如下性质

$$\begin{aligned} p^\mu s_\mu &= 0, & s^\mu s_\mu &= -1, & p^\mu \varepsilon_{\lambda\mu} &= 0, \\ (\varepsilon_{\pm,0}^\mu)^* &= \varepsilon_{\mp,0}^\mu, & \varepsilon_\lambda^\mu \varepsilon_{\lambda'\mu} &= -\delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (6)$$

进一步, 注意到 $\varepsilon_{\pm,0}$ 和 p 为 4 个线性无关的矢量, 它们可以作为四维闵氏空间的基矢, 故有如下恒等式

$$\sum_{\lambda=\pm 1,0} \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_{\lambda'}^*{}^\nu(p) \equiv -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \quad (7)$$

(2) 规范玻色子质量为零的情况:

在这种情况下, 实的规范粒子只存在横向极化态, 即只存在 Helicity 取值为 ± 1 的态. 利用 (1) 式, 可得它的 Helicity 态为

(i) 若 $p_x = p_y = 0$,

$$\varepsilon_1^{\text{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad \varepsilon_{-1}^{\text{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0). \quad (8)$$

(ii) 若 $p_x^2 + p_y^2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{\text{H}} &= \frac{\left(0, -\frac{p_x p_z}{|\mathbf{p}|} + i p_y, -\frac{p_y p_z}{|\mathbf{p}|} - i p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2}{|\mathbf{p}|}\right)}{\sqrt{2(p_x^2 + p_y^2)}}, \\ \varepsilon_{-1}^{\text{H}} &= \frac{\left(0, -\frac{p_x p_z}{|\mathbf{p}|} - i p_y, -\frac{p_y p_z}{|\mathbf{p}|} + i p_x, \frac{p_x^2 + p_y^2}{|\mathbf{p}|}\right)}{\sqrt{2(p_x^2 + p_y^2)}}. \end{aligned} \quad (9)$$

与有质量的规范粒子类似, 无质量粒子的 Helicity 态有如下性质:

$$p^\mu \varepsilon_{\lambda\mu} = 0, \quad (\varepsilon_\pm^\mu)^* = \varepsilon_\mp^\mu, \quad \varepsilon_\lambda^\mu \varepsilon_{\lambda'\mu} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (10)$$

但是两者不同之处在于实的无质量规范粒子只存在量子数为 ± 1 的 Helicity 态, 这两个态与动量 p 无法构成四维闵氏空间的完备基矢. 为了给出 Helicity 态的求和规则, 需要额外引入一新的矢量 $\tilde{\eta}$, 其中 $\tilde{\eta}$ 满足 $\tilde{\eta} \cdot \varepsilon = 0$ 并且和 p 线性无关. 以 $\varepsilon_{\pm 1}^{\text{H}}$, $\tilde{\eta}$ 和 $\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta} p - \tilde{\eta} \cdot p \tilde{\eta}$ 作为闵氏空间的基矢, 可得无质量粒子的 Helicity 态求和规则

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_{\lambda'}^*{}^\nu(p) \equiv -g^{\mu\nu} - \frac{\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta} p^\mu p^\nu}{(p \cdot \tilde{\eta})^2} + \frac{\tilde{\eta}^\mu p^\nu + p^\mu \tilde{\eta}^\nu}{\tilde{\eta} \cdot p}. \quad (11)$$

进一步, 如果要求 $\tilde{\eta} \cdot \tilde{\eta} = 0$, 则上式可以简化为

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon_\lambda^\mu(p) \varepsilon_{\lambda'}^*{}^\nu(p) \equiv -g^{\mu\nu} + \frac{\tilde{\eta}^\mu p^\nu + p^\mu \tilde{\eta}^\nu}{\tilde{\eta} \cdot p}. \quad (12)$$

注意实规范粒子的极化矢量描述客观实在的物理态, 因此它的形式与理论的规范条件选取无关. 对此应当和规范粒子的传播子予以区分. 在规范理论中, 取决于规范条件的选取, 虚规范粒子可以包含横向极化、纵向极化甚至类时极化态, 因此其传播子的形式与理论的规范条件选取有关. 由于物理的 S 矩阵元应该与规范条件无关, 因此在规范理论中必须通过引入一些虚拟粒子态来抵消规范粒子传播子中和规范相关的项^[2-5]. 事实上, 对 S 矩阵元有贡献的项仅来自规范粒子传播子中物理的极化态. 为了理解这一点, 我们来看一看 $W(Z)$ 的传播子. 在 R_ξ 规范中, 如果令 $\xi \sim \infty$ (即所谓的么正规范), 那么与 $W(Z)$ 相伴的虚拟粒子 (包括 Would-be Goldstone 粒子和鬼粒子) 质量为无穷大 (正比 $\sqrt{\xi}$) 从而其效应退耦. 此时 $W(Z)$ 传播子的形式为^[2, 3]

$$i\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 - M^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \right]. \quad (13)$$

上述传播子的分子即为 (7) 式, 即对 S 矩阵元有贡献的仅来自规范粒子物理的极化态. 再譬如胶子的传播子. 在轴规范下 (即胶子场满足条件 $\eta \cdot A = 0$), 由于 Fadeev-Popov 行列式与规范场无关, 因此没有必要引入鬼场^[5]. 这种情况下胶子传播子的形式为

$$i\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2} \left[g_{\mu\nu} + \frac{\eta \cdot \eta p^\mu p^\nu}{(p \cdot \eta)^2} - \frac{\eta^\mu p^\nu + p^\mu \eta^\nu}{\eta \cdot p} \right]. \quad (14)$$

上式中的分子即为 (11) 式. 事实上正是因为轴规范下胶子的传播子仅包含物理的极化态, 通常把轴规范称为物理规范.

下边利用 Spinor Helicity 方法^[7]来讨论由规范粒子极化矢量张成的投影算子.

在粒子唯象研究中, 通常会碰到初、末态涉及多个极化费米子和玻色子的过程. Spinor Helicity 方法就是一种有效地计算这种过程矩阵元的方法^[7]. 这种方法的基本做法在于借助无质量的旋量波函数给出有质量费米子的旋量波函数以及规范粒子的极化矢量, 利用无质量旋量场的性质将过程的矩阵元约化为一系列无质量旋量场内积的乘积, 从而达到简化计算的目的. 在这种方法中, 规范粒子的极化矢量为

(1) 规范粒子质量不为零情况:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\pm}^{\mu}(k, s) &= \frac{\langle k_1 \pm | \gamma^{\mu} | k_2 \pm \rangle}{\sqrt{2m}}, \\ \varepsilon_0^{\mu}(k, s) &= \frac{\langle k_1 + | \gamma^{\mu} | k_1 + \rangle - \langle k_2 + | \gamma^{\mu} | k_2 + \rangle}{2m} = \frac{k_1^{\mu} - k_2^{\mu}}{m}.\end{aligned}\quad (15)$$

上式中 $\varepsilon_{\pm 1, 0}^{\mu}(k, s)$ 代表规范粒子在 s 方向自旋取 $\pm 1, 0$ 的极化矢量; $k_1^{\mu} = \frac{k^{\mu} - ms^{\mu}}{2}$ 和 $k_2^{\mu} = \frac{k^{\mu} + ms^{\mu}}{2}$ 为类光矢量, 即满足 $k_i^{\mu} k_{i\mu} = 0$; $|k_i \pm \rangle \equiv u_{\pm}(k_i) = v_{\mp}(k_i) = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} u(k_i)$ 和 $\langle k_i \pm | \equiv \bar{u}_{\pm}(k_i) = \bar{v}_{\mp}(k_i)$ 是动量为 k_i 的手征旋量波函数.

(2) 规范玻色子质量为零情况:

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu}(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle k \pm | \gamma^{\mu} | p \pm \rangle}{\langle p \mp | k \pm \rangle}.\quad (16)$$

上式中 $\varepsilon_{\pm 1}^{\mu}(k)$ 代表无质量规范粒子 Helicity 为 ± 1 的态; p 为辅助矢量, 它为任一类光矢量(这对保证 $p^{\mu} \varepsilon_{\mu} = 0$ 是必须的), 但和 k 线性无关.

上述式子成立的依据在于手征旋量场以及它的共轭场分处于洛伦兹群的 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 表示中, 它们的直积空间可构成通常的矢量空间 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

对于上述结果, 应当注意如下事项:

(i) 当取 Dirac γ 矩阵的某个表示后, 可以给出 (15, 16) 式的具体形式, 由于 Dirac γ 矩阵的不同表示之间通过相似变换联系在一起, 因此 (15, 16) 式的具体形式与 γ 矩阵的表示无关. 如果取 γ 矩阵的手征表示, 即

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad (17)$$

利用该表示下无质量费米子手征旋量的形式

$$\begin{aligned}|p+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_3 + |\mathbf{p}|}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_3 + |\mathbf{p}| \\ p_1 + ip_2 \end{pmatrix}, \\ |p-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{p_3 + |\mathbf{p}|}} \begin{pmatrix} -p_1 + ip_2 \\ p_3 + |\mathbf{p}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (18)$$

可得 (15, 16) 的具体形式. 事实上, 在整体差一负号的情况下, (15) 式的结果即为 (3) 式的结果; 而对于 (16) 式, 如果令辅助矢量 p 取为 $(k^0, -\mathbf{k})$, (16) 式即可给出 (9) 式的结论.

(ii) 从 (16) 式可以看出, 为了构造无质量规范粒子的极化矢量, 需要引入一辅助矢量 p . 该矢量为类光矢量, 且和 k 线性无关. 通常而言, 选取不同的 p 将对应不同的 ε_{\pm}^{μ} , 但是很容易证明它们之间存在如下关系

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu}(k, p_1) = \varepsilon_{\pm}^{\mu}(k, p_2) + \beta_{\pm}(k, p_1, p_2) k^{\mu},\quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_{-}(k, p_1, p_2) &= \frac{\sqrt{2} \langle p_2 - | p_1 + \rangle}{\langle p_2 - | k + \rangle \langle p_1 - | k + \rangle}, \\ \beta_{+}(k, p_1, p_2) &= \beta_{-}(k, p_1, p_2)^*,\end{aligned}$$

考虑到理论的规范不变性, 上述差别不会影响研究过程的散射矩阵元.

下边来看一看辅助动量 p 所代表的意义. 为此, 利用 (16) 式考虑如下式子

$$\begin{aligned}\sum_{i=\pm} \varepsilon_i^{\mu} \varepsilon_i^{\nu*} &= \frac{1}{2} \frac{\langle k+ | \gamma^{\mu} | p+ \rangle \langle p+ | \gamma^{\nu} | k+ \rangle}{\langle p- | k+ \rangle \langle k+ | p- \rangle} + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle k- | \gamma^{\mu} | p- \rangle \langle p- | \gamma^{\nu} | k- \rangle}{\langle p+ | k- \rangle \langle k- | p+ \rangle} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(\gamma^{\mu} | p+ \rangle \langle p+ | \gamma^{\nu} | k+ \rangle \langle k+ |)}{\text{Tr}(| k+ \rangle \langle k+ | p- \rangle \langle p- |)} + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(\gamma^{\mu} | p- \rangle \langle p- | \gamma^{\nu} | k- \rangle \langle k- |)}{\text{Tr}(| k- \rangle \langle k- | p+ \rangle \langle p+ |)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(\gamma^{\mu} P_R \not{p} \gamma^{\nu} P_L \not{k})}{\text{Tr}(P_R \not{k} P_L \not{p})} + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{Tr}(\gamma^{\mu} P_L \not{p} \gamma^{\nu} P_R \not{k})}{\text{Tr}(P_L \not{k} P_R \not{p})} = \\ &= -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu} k^{\nu} + p^{\nu} k^{\mu}}{p \cdot k},\end{aligned}\quad (20)$$

将上式与 (14) 式相比, 可知 p 对应于轴规范中的轴矢.

在得到 (20) 式时, 用到无质量手征旋量场的如下性质

$$\begin{aligned} |p\pm\rangle\langle p\pm| &= \frac{1\pm\gamma_5}{2}\not{p}, \\ (\langle k\pm|\gamma^\mu|p\pm\rangle)^\dagger &= \langle p\pm|\gamma^\mu|k\pm\rangle, \\ (\langle p\mp|k\pm\rangle)^\dagger &= \langle k\pm|p\mp\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

下边来看由规范粒子的极化矢量构成的投影算子.

考虑对角元投影算子. 类似 (20) 式的做法, 有如下结论:

(1) 规范玻色子质量不为零情况:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm^\mu(k, s)\varepsilon_\pm^{\nu*}(k, s) &= -\frac{g^{\mu\nu}}{2} + \frac{k^\mu k^\nu - m^2 s^\mu s^\nu}{2m^2} \mp \\ &\quad \frac{i}{2m}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}k_\lambda s_\rho, \\ \varepsilon_0^\mu(k, s)\varepsilon_0^{\nu*}(k, s) &= s^\mu s^\nu. \end{aligned} \quad (22)$$

(2) 规范玻色子质量为零情况:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm^\mu(k, p)\varepsilon_\pm^{\nu*}(k, p) &= -\frac{g^{\mu\nu}}{2} + \frac{k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu}{2p\cdot k} \mp \\ &\quad \frac{i}{2p\cdot k}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda k_\rho. \end{aligned} \quad (23)$$

对于非对角元的投影算子, 譬如 $\varepsilon_\pm^\mu(k, s)\varepsilon_\mp^{\nu*}(k, s)$, 通常它们很难写为协变的形式. 但是借用前面给出的极化矢量的具体形式, 对于指定的 k 和 s , 很容易给出这类二阶张量的具体值. 关于上述投影算子的应用, 见下节例 1.

本小节所给规范玻色子极化矢量的形式在纯数值计算物理过程时是非常有用的.

3 计算初、末态含规范粒子过程的基本方法和注意事项

在计算初、末态含规范粒子的过程时, 通常会遇到规范粒子极化矢量的求和. 对此通常有两种处理方法:

方法 I: 利用式子 (7) (有质量情形) 和式子 (11) (无质量情形) 直接对规范玻色子的物理极化态求和. 这种计算方法的优点在于物理上非常直观, 而缺点则为计算起来相当麻烦.

注意在利用 (11) 式对无质量规范粒子的极化态求和时, 尽管每一个具体图的贡献会依赖 η , 但最终的物理结果将不依赖于 η ^[8], 这是由推广的 Ward 恒等式所保证的^[2].

方法 II: 在 't Hooft-Feynman 规范下进行计算^[2].

在这种计算方法中, 规范粒子极化求和规则为

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^* \rightarrow -g_{\mu\nu}. \quad (24)$$

由于这种求和规则会引入非物理极化态的贡献, 因此必须考虑虚拟粒子 (如鬼场和 Would-be Goldstone 粒子) 的贡献来抵消非物理极化态的贡献. 这种做法的正确性是由理论的么正性并以 Cutkosky 规则^[9] 配合所保证的, 它的优点在于计算比较简单, 缺点在于物理意义不明显, 并且容易漏掉虚拟粒子图的贡献. 在应用该方法时, 注意不要轻易扔掉 S 矩阵元中正比于 $k\cdot\varepsilon(k)$ 的项, 否则会导致错误 (见下边的例子).

考虑到物理的 S 矩阵元是和规范的选取无关的, 上述两种做法的区别就仅在于对极化矢量应用不同的求和规则. 在利用方法 II 时, 如果虚拟粒子的贡献为零, 那么极化矢量的求和就可以简单地等效写为 $-g_{\mu\nu}$ 的形式. 在 QED 中就是如此.

下边列举几个例子对上述两种计算方法予以说明:

1) 在标准模型中计算 $t \rightarrow bW$ 过程.

在标准模型中, 树图层次下 $t \rightarrow bW$ 过程的振幅为

$$i\mathcal{M} = \frac{ig}{\sqrt{2}} \bar{u}_b \gamma^\mu P_L u_t \varepsilon_\mu, \quad (25)$$

对于方法 I, 利用 (7) 式, 可得振幅平方为

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{4} \frac{m_t^4}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right) \left(1 + 2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right). \quad (26)$$

下边应用方法 II 对此进行计算. 在 't Hooft-Feynman 规范下, 与 W 玻色子对应的 Would-be Goldstone 粒子为 ϕ^\pm , 它的质量也为 M_W . 在计算 $t \rightarrow bW$ 过程矩阵元平方时, 当应用 (24) 式的求和规则后, 还应当考虑 $t \rightarrow b\phi^+$ 的贡献. 它们的振幅平方分别为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|_{t \rightarrow bW}^2 &= \frac{g^2}{2} (m_t^2 - m_W^2), \\ \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|_{t \rightarrow b\phi^+}^2 &= \frac{g^2}{4} \frac{m_t^2}{m_W^2} (m_t^2 - m_W^2). \end{aligned} \quad (27)$$

将上述两式相加, 可以回到 (26) 式的结果, 这表明这两种计算方法是等效的. 从上述表达式可以看出, 当 $m_t \gg m_W$ 时, 第二式的贡献 (或纵向极化的 W 玻色子的贡献) 是最主要的, 这正是哥德斯通等效定理^[10] 所反映的内容.

下边用投影算子的方法重新计算过程 $t \rightarrow bW_0$, 其中 0 代表 W 玻色子纵向极化. 为了应用这种方法, 首先需要构造 W 玻色子的自旋矢量. 设在 Top 夸克静止系中, W 玻色子的动量为 p_W . 则对于 Helicity 态, W

玻色子的自旋方向一定沿 p_W 方向, 故其自旋矢量的一般形式为

$$s^\mu = b(p_W^\mu - ap_t^\mu), \quad (28)$$

其中 a, b 为常数. 由 $s \cdot s = -1$ 以及 $p_W \cdot s = 0$, 可得到 $a = \frac{2m_W^2}{m_t^2 + m_W^2}$, $b = \frac{m_t^2 + m_W^2}{m_W(m_t^2 - m_W^2)}$. 故

$$s^\mu = -\frac{2m_W}{m_t^2 - m_W^2} \left(p_t^\mu - \frac{m_t^2 + m_W^2}{2m_W^2} p_W^\mu \right). \quad (29)$$

将 s^μ 的表达式应用到投影算子 (20) 式, 即可得文献[11]所提供的投影算子的形式. 进一步, 利用 $\varepsilon_0^\mu(k, s)\varepsilon_0^{\nu*}(k, s) = s^\mu s^\nu$, 可得

$$\frac{1}{2} |\mathcal{M}|_{t \rightarrow bW_0}^2 = \frac{g^2}{4} \frac{m_t^2}{m_W^2} (m_t^2 - m_W^2). \quad (30)$$

这个结果和 (27) 式的结果是相同的. 当然, 在计算 $t \rightarrow bW_0$ 过程时, 也可以利用 (5) 式进行数值计算, 将会得到同样的结果.

2) $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$ 过程的计算.

在微扰的任意阶, $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$ 过程的振幅都可以写为如下形式^[12]

$$\mathcal{M} = (M_{\mu\nu} + k_{1\mu}B_\nu + k_{2\nu}C_\mu)\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2), \quad (31)$$

其中 $M_{\mu\nu}$ 为不含 $k_{1\mu}$ 和 $k_{2\nu}$ 的洛伦兹群的二阶张量, B_ν 和 C_μ 为洛伦兹矢量. 规范不变性要求它们满足

$$k_1 \cdot C k_{2\nu} = -k_1^\mu M_{\mu\nu}, \quad k_{1\mu} B \cdot k_2 = -M_{\mu\nu} k_2^\nu.$$

由该式还可以得到如下有用式子

$$\begin{aligned} k_1 \cdot M \cdot k_2 &= 0, \\ k_1 \cdot C k_2 \cdot B^* &= \frac{1}{k_1 \cdot k_2} (k_1 \cdot M)^\nu (M^* \cdot k_2)_\nu, \\ (k_1 \cdot M)^\nu (k_1 \cdot M^*)_\nu &= 0, \\ (\eta \cdot M)^\nu (k_1 \cdot M^*)_\nu &= k_1 \cdot \eta k_1 \cdot C^* k_2 \cdot B, \\ &\dots \end{aligned} \quad (32)$$

现在来看该过程的矩阵元平方. 由 (11) 式可知它的完整形式为

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}^2 &= (M_{\mu\nu} + k_{1\mu}B_\nu + k_{2\nu}C_\mu) \times \\ &\left(-g^{\mu\mu'} - \frac{\eta \cdot \eta k_1^\mu k_1^{\mu'}}{(\eta \cdot k_1)^2} + \frac{\eta^\mu k_1^{\mu'} + \eta^{\mu'} k_1^\mu}{\eta \cdot k_1} \right) \times \\ &\left(-g^{\nu\nu'} - \frac{\eta \cdot \eta k_2^\nu k_2^{\nu'}}{(\eta \cdot k_2)^2} + \frac{\eta^\nu k_2^{\nu'} + \eta^{\nu'} k_2^\nu}{\eta \cdot k_2} \right) \times \\ &(M_{\mu'\nu'}^* + k_{1\mu'}B_{\nu'}^* + k_{2\nu'}C_{\mu'}^*) \end{aligned} \quad (33)$$

下边用两种方法来展开上式:

方法 1: 利用等式 $k_1^\mu (M_{\mu\nu} + k_{1\mu}B_\nu + k_{2\nu}C_\mu) = 0$ 和 $k_2^\nu (M_{\mu\nu} + k_{1\mu}B_\nu + k_{2\nu}C_\mu) = 0$. 此时 (33) 式可写为

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}^2 &= (M_{\mu\nu} + k_{1\mu}B_\nu + k_{2\nu}C_\mu) g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \times \\ &(M_{\mu'\nu'}^* + k_{1\mu'}B_{\nu'}^* + k_{2\nu'}C_{\mu'}^*) = \\ &M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^* + k_1^\mu M_{\mu\nu}^* B^\nu + k_2^\nu M_{\mu\nu}^* C^\mu = \\ &M^{\mu\nu} M_{\mu\nu}^* - k_1 \cdot C^* k_2 \cdot B - k_1 \cdot C k_2 \cdot B^* = \\ &M_{\mu\nu} M^{*\mu\nu} - \frac{1}{k_1 \cdot k_2} (k_1 \cdot M)^\mu (M^* \cdot k_2)_\mu - \\ &\frac{1}{k_1 \cdot k_2} (k_1 \cdot M^*)^\mu (M \cdot k_2)_\mu, \end{aligned} \quad (34)$$

这种做法对应于方法 II, 只不过就 QED 而言, 鬼粒子的贡献为零因而不予以考虑. 从这个例子可以看到, 当利用 (24) 式的求和规则时, 矩阵元中正比 $k \cdot \varepsilon$ 的项也会产生贡献. 这是因为当应用 (24) 式后, $k \cdot \varepsilon$ 将不会自动为零.

方法 2: 利用等式

$$k^\mu \left(-g_{\mu\nu} - \frac{\eta \cdot \eta k_\mu k_\nu}{(\eta \cdot k)^2} + \frac{\eta_\nu k_\mu + \eta_\mu k_\nu}{\eta \cdot k} \right) = 0,$$

此时 (33) 式可写为

$$\begin{aligned} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}^2 &= M_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\mu'} - \frac{\eta \cdot \eta k_1^\mu k_1^{\mu'}}{(\eta \cdot k_1)^2} + \frac{\eta^\mu k_1^{\mu'} + \eta^{\mu'} k_1^\mu}{\eta \cdot k_1} \right) \times \\ &\left(-g^{\nu\nu'} - \frac{\eta \cdot \eta k_2^\nu k_2^{\nu'}}{(\eta \cdot k_2)^2} + \frac{\eta^\nu k_2^{\nu'} + \eta^{\nu'} k_2^\nu}{\eta \cdot k_2} \right) M_{\mu'\nu'}^* = \\ &M_{\mu\nu} M^{*\mu\nu} - \frac{1}{k_1 \cdot k_2} (k_1 \cdot M)^\mu (M^* \cdot k_2)_\mu - \\ &\frac{1}{k_1 \cdot k_2} (k_1 \cdot M^*)^\mu (M \cdot k_2)_\mu, \end{aligned} \quad (35)$$

在得到最后一个等式的时候, 应用式子 (32). 从这个例子可以看到, 当应用 (11) 式的求和规则后, 可以很安全地丢掉振幅中正比 $k \cdot \varepsilon$ 的项. 此外, 还可以看到, 由于理论的规范不变, 上式的最终结果不依赖于 η 的选取.

3) 在 QCD 中计算 $gf \rightarrow gf$ 过程.

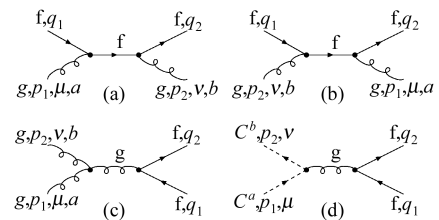


图 1 过程 $gf \rightarrow gf$ 的费曼图

在 QCD 中, $gf \rightarrow gf$ 过程的费曼图如图 1 所示. 为

简洁起见, 忽略夸克质量, 则每个图的振幅可以写为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= M_1^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2) = -ig_s^2 T^b T^a \times \\ &\quad \frac{1}{(p_1 + q_1)^2} \bar{u} \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{q}_1) \gamma_\mu u \times \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2), \\ \mathcal{M}_2 &= M_2^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2) = -ig_s^2 T^a T^b \times \\ &\quad \frac{1}{(q_2 - p_1)^2} \bar{u} \gamma_\mu (q_2 - \not{p}_1) \gamma_\nu u \times \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2), \\ \mathcal{M}_3 &= M_3^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2) = -g_s^2 f^{bac} T^c \times \\ &\quad \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} [(p_2 + p_1)_\lambda g_{\mu\nu} - (2p_1 - p_2)_\nu g_{\mu\lambda} + \\ &\quad (p_1 - 2p_2)_\mu g_{\nu\lambda}] \bar{u} \gamma_\lambda u \times \varepsilon_\mu^a(p_1) \varepsilon_\nu^b(p_2),\end{aligned}\quad (36)$$

上式中应当注意在 \mathcal{M}_3 中保留正比 $p \cdot \varepsilon$ 的项.

下边用两种方法来计算矩阵元平方.

方法一: 利用 (11) 式对胶子极化态求和. 所得结果如下

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_a|^2 &= -\frac{16}{3} \times 8 + \dots, \\ |\mathcal{M}_b|^2 &= -\frac{16}{3} \times 8 + \dots, \\ |\mathcal{M}_c|^2 &= 12 \times 16 \times \left(-\frac{su}{t^2}\right) + \dots, \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_a) &= \frac{2}{3} \times 8 \times \frac{(s-u)^2}{su} + \dots, \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_c) &= -6 \times 8 \times \frac{t^2 - 2u^2}{st} + \dots, \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_c) &= 6 \times 8 \times \frac{2s^2 - t^2}{ut} + \dots.\end{aligned}\quad (37)$$

其中 $s = (p_1 + q_1)^2$, $t = (p_1 - p_2)^2$, $u = (p_2 - q_1)^2$. 上式中 \dots 代表和 η 相关的项, 它的形式非常复杂 (就本例而言, 每一个图的贡献都包含几十项 η 相关项), 但最终它们将被完全抵消掉. 事实上, 利用这一性质, 通过变动 η , 可以检验结果是否维持规范不变性.

方法二: 在 't Hooft-Feynman 规范下进行计算. 此时胶子的极化求和规则为 (24) 式, 并且为了消除非物理极化态的效应, 需要减去 $C^a f \rightarrow C^b f$ (C 为鬼场 (如费曼图 (d) 所示)) 的贡献. 所得结果如下

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{16}{3} \times 8 \times \left(-\frac{u}{s}\right), \\ |\mathcal{M}_b|^2 &= \frac{16}{3} \times 8 \times \left(-\frac{s}{u}\right), \\ |\mathcal{M}_c|^2 &= 12 \times 16 \times \left(1 - \frac{5su}{4t^2}\right), \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_a) &= 0, \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_c) &= 6 \times 16 \times \frac{s}{t}, \\ 2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_c) &= 6 \times 16 \times \frac{t}{u}, \\ |\mathcal{M}_{\text{ghost}}|^2 &= -4 \times \frac{us}{t^2}.\end{aligned}\quad (38)$$

很容易验证这两种方法能给出相同的振幅平方. 从上述结果可以看出, 方法一的计算结果往往比较复杂, 计算量也较大, 而方法二则计算相对简单. 还可以看出在不同的计算方法中, 同一个图的贡献往往也有很大的不同.

对于过程 $gf \rightarrow gf$ 的树图预言而言, 一个很有趣的现象就是如果略去 \mathcal{M}_3 中正比 $p \cdot \varepsilon(p)$ 的项, 在不考虑鬼粒子贡献的情况下, 应用求和规则 (24) 式也能给出正确的结果 (事实上, 这往往给人造成一种误解). 具体计算结果如下

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{16}{3} \times 8 \times \left(-\frac{u}{s}\right), \\ |\mathcal{M}_b|^2 &= \frac{16}{3} \times 8 \times \left(-\frac{s}{u}\right), \\ |\mathcal{M}_c|^2 &= 12 \times 16 \times \left(-\frac{su}{t^2}\right),\end{aligned}\quad (39)$$

$$2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_a) = 0,$$

$$2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_c) = -6 \times 16 \times \frac{u}{t},$$

$$2 \times \text{Re}(\mathcal{M}_b^* \mathcal{M}_c) = -6 \times 16 \times \frac{s}{t}.$$

这恰好对应于文献 [13] 的结果.

对此可以理解如下: 如果将 $M^{\mu\nu} = M_1^{\mu\nu} + M_2^{\mu\nu} + M_3^{\mu\nu}$ (见 (36) 式) 写为如下形式

$$M^{\mu\nu} = \tilde{M}^{\mu\nu} + p_1^\mu B^\nu + p_2^\nu C^\mu, \quad (40)$$

那么利用 $T^a T^b = T^b T^a + if^{abc} T^c$, 很容易证明 $\tilde{M}^{\mu\nu}$ 满足

$$p_{1\mu} \tilde{M}^{\mu\nu} = \tilde{M}^{\mu\nu} p_{2\nu} = 0. \quad (41)$$

根据这个性质, 可知过程的振幅平方为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 &= (\tilde{M}_{\mu\nu} + p_{1\mu} B_\nu + p_{2\nu} C_\mu) \times \\ &\quad \left(-g^{\mu\mu'} - \frac{\eta \cdot \eta p_1^\mu p_1^{\mu'}}{(\eta \cdot p_1)^2} + \frac{\eta^\mu p_1^{\mu'} + \eta^{\mu'} p_1^\mu}{\eta \cdot p_1}\right) \times \\ &\quad \left(-g^{\nu\nu'} - \frac{\eta \cdot \eta p_2^\nu p_2^{\nu'}}{(\eta \cdot p_2)^2} + \frac{\eta^\nu p_2^{\nu'} + \eta^{\nu'} p_2^\nu}{\eta \cdot p_2}\right) \times \\ &\quad (\tilde{M}_{\mu'\nu'}^* + p_{1\mu'} B_{\nu'}^* + p_{2\nu'} C_{\mu'}^*) = \\ &\quad \tilde{M}_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\mu'} - \frac{\eta \cdot \eta p_1^\mu p_1^{\mu'}}{(\eta \cdot p_1)^2} + \frac{\eta^\mu p_1^{\mu'} + \eta^{\mu'} p_1^\mu}{\eta \cdot p_1}\right) \times \\ &\quad \left(-g^{\nu\nu'} - \frac{\eta \cdot \eta p_2^\nu p_2^{\nu'}}{(\eta \cdot p_2)^2} + \frac{\eta^\nu p_2^{\nu'} + \eta^{\nu'} p_2^\nu}{\eta \cdot p_2}\right) \tilde{M}_{\mu'\nu'}^* = \\ &\quad \tilde{M}_{\mu\nu} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \tilde{M}_{\mu'\nu'}^* = \tilde{M}^{\mu\nu} \tilde{M}_{\mu\nu}^*,\end{aligned}\quad (42)$$

其中在得到第三个等式时, 用到 (41) 式.

4 结论

在本文中, 对规范粒子的极化矢量做了较为系统的论述. 首先给出极化矢量的具体形式和性质, 讨论

它和规范传播子之间的关系以及由其构成的投影算子的形式; 然后通过若干例子, 演示计算初、末态含规范粒子过程时采用的基本方法和应当注意事项. 上述讨论对从事粒子唯象研究者, 尤其是初学者, 而言具有一定的帮助作用.

参考文献(References)

- 1 Lurié David. Particles and Field. Beijing: Science Press, 1978
- 2 CHENG Tai-Pei, LI Ling-Fong. Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Oxford: Clarendon Press, 1989
- 3 Peskin M E, Schroeder D V. An Introduction to Quantum Field Theory. Fifth Printing. Addison-Wesley Publishing Company, 1997
- 4 Weinber Steven. The Quantum Theory of Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 5 DAI Yuan Ben. Gauge Interaction Theory. Second Edition. Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese)
(戴元本. 相互作用的规范理论. 第二版. 北京: 科学出版社, 2005)
- 6 YOUNG Bing-Lin. An Introduction to Quantum Field Theory. Beijing: Science Press, 1986
- 7 Bjorken J D, CHEN M C. Phys. Rev., 1966, **154**: 1335;
- De Causmaecker P et al. Phys. Lett., 1981, **B105**: 215;
- Berends F A, Daverveldt P H, Kleiss R. Nucl. Phys., 1985, **B253**: 441; XU Z, ZHANG D H, CHANG L. Nucl. Phys., 1987, **B291**: 392; Mangano M L, Parke S J. Phys. Rept., 1991, **200**: 301
- 8 Field R D. Application of Perturbative QCD. Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- 9 Cutkosky R E. J. Math. Phys., 1960, **1**: 429
- 10 Cornwall J M, Levin D N, Tiktopoulos G. Phys. Rev., 1974, **D10**: 1145; Vayonakis C E. Lett. Nuov. Cim., 1976, **17**: 383; Lee B W, Quigg C, Thacker H. Phys. Rev., 1977, **D16**: 1519
- 11 Fischer M et al. Phys. Rev., 2002, **D65**: 054036
- 12 CAO J J, LIU G L, YANG J M. Eur. Phys. J., 2005, **C41**: 381
- 13 Barger V. Collider Physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1989

Polarization Vectors of Gauge Bosons^{*}

CAO Jun-Jie^{1,1)} CHEN Lan-Li^{1,2} YANG Jin-Min³

1 (Henan Normal University, Xinxiang 453002, China)

2 (Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China)

3 (Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract We investigate the properties of polarization vectors for gauge bosons, including their forms with arbitrary polarization direction in laboratory frame, their different sum rules, and the projection operators they constitute. Then by some examples, we illustrate techniques in calculating processes involving gauge bosons. Our discussion is beneficial for the understanding of the essence of gauge bosons.

Key words polarization vector, helicity state, sum rule, propagator, projection operator

Received 23 March 2006

* Supported by National Natural Science Foundation of China (10475107, 10505007)

1) E-mail: junjiec@physics.technion.ac.il