第2卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 4
1978年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1978

SU_N 规范场中的 U_1 规范场和其对偶荷的量子化数值

谷超豪
（复旦大学）

摘要

本文证明，SU_N 规范场联系了适当的 Higgs 场之后，必然能出现一个 U_1 规范场. 文中计算出这个 U_1 规范场的对偶荷的量子化数值，并证明这个数值只依赖于 Higgs 场的拓扑性质. 此外也指出 $N>2$ 的情形和 $N=2$ 的情形之间的实质性差别.

一、引言

在研究磁单极时，'t Hooft 在 SU_2 规范场中引入了 Higgs 场，从而导出电磁场强度和相应的量子化磁荷[1]. 这项工作引起了不少的研究. 已经知道，SU_2 场的量子化磁荷值取决于 Higgs 场的拓扑性质，相应于闭曲面到球面映象的 Kronecker 指标[2,3]. 又已弄清这种 SU_2 磁荷和[4]中阐明的 U_1 规范场磁荷的关系[5]. 有人试用这项理论来研究强子结构等问题（见[6]及其引文)，也有人得出了一个特殊的球对称 SU_3 规范场的对偶荷的数值，但未解决量子化的问题[6].

本文对 SU_N 规范场讨论其中的 U_1 规范场和其对偶荷的量子化数值. 如果采用 't Hoobt 形的电磁场强度公式，在 $N>2$ 时，对 Higgs 场必须作一定的限制(在 $N=3$ 时，Higgs 场应和“超荷”相联系). 然后，我们就可以利用这个 Higgs 场作出相应的 U_1 规范场，计算出其对偶荷的量子化数值，并且证明这种量子化数值只和 Higgs 场的拓扑性质有关. 在 $N>3$ 时，这样的 U_1 规范场不止一类. 我们通过球对称的 Higgs 场，证明了所求出的对偶荷的最小量子化值确能被取到. 作为附带的结果，从这里也导出了一般微分流形 M_n 上的某些二次闭形式或整数上同调类 $H^2(M_n, I)$ 中的某些元素，同时也得到二维闭曲面到 $SU_N/SU_s \times SU_{N-s} \times U_1$ 的映照的一种同伦不变量，它是二维闭曲面到二维球面映象的 Kronecker 指标的一个推广.

二、Higgs 场和 U_1 规范场强度

设在时空流形 M_4 上给定了 SU_N 规范场，其规范势 $b_\lambda(x)(\lambda=0, 1, 2, 3)$ 是迹数为

本文1976年9月7日收到. 作者在这一方向上的进一步结果将另文发表.

0 的反厄米阵。是在整个 M_4 上充分光滑的函数，规范场强度为

$$f_{\lambda\mu} = b_{\lambda,\mu} - b_{\mu,\lambda} - g[b_\lambda, b_\mu] \quad \left(b_{\lambda,\mu} = \frac{\partial b_\lambda}{\partial x^\mu}\right), \tag{1}$$

它也是迹数为 0 的反厄米阵*. 式中 $g \neq 0$, 是偶合常数. 引入迹数为 0 的 $N \times N$ 反厄米阵 $Q(x)$ 作为 Higgs 场，记成立 $Q(x) \neq 0$ 的子流形为 M'_4, 定义

$$\phi(x) = Q(x)/(-\mathrm{tr}Q^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

为单位 Higgs 场，选一适当常数 k 作张量

$$F_{\lambda\mu} = -\mathrm{tr}\left(\phi\left(f_{\lambda\mu} + \frac{k}{g}[D_\lambda\phi, D_\mu\phi]\right)\right), \tag{3}$$

这里 $D_\lambda\phi$ 为规范导数:

$$D_\lambda\phi = \phi_{,\lambda} + g[b_\lambda, \phi]. \tag{4}$$

又令

$$F = \frac{1}{2} F_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu. \tag{5}$$

对 SU_N 规范场，当 $N > 2$ 时，一般不能选到常数 k 使 $F_{\lambda\mu}$ 满足 Bianchi 恒等式(即第一套 Maxwell 方程)，这就是说，F 一般不能为闭形式，因而有必要对 ϕ 作一些限制.

定义 设阵 $\phi(x)$ 的特征值和 x 无关，记为 $i\sigma_1, i\sigma_2, \cdots, i\sigma_N$, 则称 $\phi(x)$ 属于 W_σ, 这里 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ 为实数，满足 $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_N = 0$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_N^2 = 1$.

我们就用 σ 表示以 $i\sigma_a (a = 1, 2, \cdots, N)$ 为元素的对角阵，由定义可知，$\phi(x) \in W_\sigma$ 的充要条件是 M'_4 的每点必有一邻域 Ω, 使在其中

$$\phi(x) = (\mathrm{ad}\zeta(x))\sigma = \zeta\sigma\zeta^{-1} \quad (\zeta \in SU_N). \tag{6}$$

定理 1 对于任何的 b_λ, $F_{\lambda\mu}$ 均满足第一套 Maxwell 方程的充要条件是 $\phi \in W_\sigma$, σ 中只能有两个互不相等的对角元素，且

$$k = \frac{s(N-s)}{N}, \tag{7}$$

式中 s 和 $N - s$ 分别代表 σ 的二个特征值的重数.

证明 在 M'_4 的任一点，必有一邻域，可在其中作规范变换，使 ϕ 化为对角阵，$i\phi_1, \cdots, i\phi_N$ 为其对角元素，在规范变换中，$F_{\lambda\mu}$ 为不变的. 记 $b_\lambda = i(b^b_{\lambda a})$. 选 b_λ 为对角阵，则 $[b_\lambda, b_\mu] = 0$, $[b_\lambda, \phi] = 0$, $[D_\lambda\phi, D_\mu\phi] = 0$, 又选 b^1_{11} 使满足 $b^1_{11,2} \neq 0$, $b^1_{11,3} = 0$, 而其余的 $b^a_{\lambda b}$ 均为 0. 那末

$$F_{12} = \phi_1 b^1_{11,2}, \quad F_{31} = 0, \quad F_{23} = 0.$$

为使 Bianchi 恒等式成立，就应有 $\phi_{1,3} = 0$. 由此可见，对一切 a 和 λ 均应成立 $\phi_{a,\lambda} = 0$. 所以若对一切 b_λ, Bianchi 恒等式成立，则 ϕ 的特征值必为常数，即 $\phi \in W_\sigma$. 从而(3)化为:

$$F_{\lambda\mu} = -\mathrm{tr}(\sigma(f_{\lambda\mu} + kg[[b_\lambda, \sigma], [b_\mu, \sigma]])). \tag{8}$$

由直接运算可得

* 如果考虑到 M_4 有可能要用多个坐标区域覆盖的话，那末就要假设 $b_\lambda dx^\lambda$ 是 M_4 上的充分光滑的微分形式，但我们仍假设坐标区域之间只有平凡的规范变换(更一般的情形见第五部分说明 6).

$$F_{\lambda\mu} = B_{\lambda,\mu} - B_{\mu,\lambda} - ig\sum_a\sum_c \sigma_a(1 - k(\sigma_c - \sigma_a)^2)(b^a_{\lambda c}b^c_{\mu a} - b^c_{\lambda a}b^a_{\mu c}), \tag{9}$$

式中

$$B_\lambda = \sum_a \sigma_a b^a_{\lambda a}. \tag{10}$$

由于对所有 b_λ, $F_{\lambda\mu}$ 满足 Bianchi 恒等式，再选

$$b^1_{12} = \alpha,\ b^2_{11} = \bar\alpha,\ b^1_{22} = \beta,\ b^2_{21} = \bar\beta,$$

这里的 α, β 满足 $\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta \neq 0$, $(\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta)_{,3} \neq 0$，而其余的 $b^b_{\lambda a}$ 均为 0. 从而得

$$F_{12} = B_{1,2} - B_{2,1} - ig(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - k(\sigma_1 - \sigma_2)^2)(\alpha\bar\beta - \bar\alpha\beta),$$

$$F_{23} = B_{2,3} - B_{3,2},\quad F_{31} = B_{3,1} - B_{1,3},$$

代入 Bianchi 恒等式，得到

$$g(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - k(\sigma_1 - \sigma_2)^2) = 0.$$

σ_1, σ_2 换为任何的 σ_a, σ_b 上式也应成立．设有 $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ 互不相等，那末就应有

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 = (\sigma_b - \sigma_c)^2 = (\sigma_b - \sigma_c)^2,$$

但这是不可能的，所以 σ 只能有两个不同的特征值．反过来，设 $\phi \in W_\sigma$，又 σ 只有两个不同的特征值，那末不妨设

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_s = A > 0,\quad \sigma_{s+1} = \cdots = \sigma_N = B < 0, \tag{11}$$

这里

$$A = \sqrt{\frac{N-s}{Ns}},\quad B = -\sqrt{\frac{s}{N(N-s)}}. \tag{12}$$

由 $1 - k(\sigma_a - \sigma_b)^2 = 0(\sigma_a \neq \sigma_b)$ 就得出 k 的表达式(7)，由(9)式知 $F_{\lambda\mu} = B_{\lambda,\mu} - B_{\mu,\lambda}$，因而必满足 Bianchi 恒等式．定理 1 证毕．

在 $N = 2$ 时定理 1 中的条件自然满足，此时不必对 ϕ 有任何限制，这是 $N = 2$ 和 $N > 2$ 的一个实质性的差别．

三、对偶荷的量子化数值

设 S 为 M'_4 中的二维闭曲面(物理上要求为类空的)，$\int_S F$ 就是 S 所包含的对偶荷所产生的通量，除以 4π 就是对偶荷的数值．

定理 2　设 $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ 满足条件 (11)，$\phi \in W_\sigma$，k 由(7)定义，那末 S 所包含的对偶荷为 lq'，l 为整数，

$$q' = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{N}{(N-s)s}}. \tag{13}$$

证明　可将流形 M'_4 分解为若干同胚于欧氏空间的区域 Ω_A 的和集，在每一 Ω_A 中存在 $\zeta_A \in SU_N$，使 $\sigma = (\mathrm{ad}\zeta_A)\phi$，又依定理 1 证明的过程可见

$$F_{\lambda\mu} = \underset{A}{B}_{\lambda,\mu} - \underset{A}{B}_{\mu,\lambda}, \tag{14}$$

这里

$$\underset{A}{B}_\lambda = \sum_a \sigma_a \underset{A}{b}^a_{\lambda a}, \tag{14'}$$

式中 $\underset{A}{b_\lambda}$ 是由 b_λ 经过 ζ_A 所定义的规范变换而得到的规范势，在 $\Omega_A \cap \Omega_B$ 处，成立

$$\underset{B}{b_\lambda} = (\mathrm{ad}\underset{BA}{\zeta})\underset{A}{b_\lambda} - \frac{1}{g}(\partial_\lambda \underset{BA}{\zeta})\zeta_{BA}^{-1}, \tag{15}$$

式中 $\underset{BA}{\zeta} = \zeta_B \zeta_A^{-1}$. 因为

$$(\mathrm{ad}\underset{BA}{\zeta})\sigma = (\mathrm{ad}\zeta_B)(\mathrm{ad}\zeta_A^{-1})\sigma = \sigma,$$

所以

$$\underset{BA}{\zeta} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix},$$

式中 $K_1 \in U_s$, $K_2 \in U_{N-s}$. 记

$$\tau_1 = \det K_1, \quad \tau_2 = \det K_2.$$

那么 $\tau_1 \in U_1$, $\tau_2 \in U_1$, $\tau_1\tau_2 = 1$, 从而也有

$$\frac{1}{\tau_1}\tau_{1,\lambda} + \frac{1}{\tau_2}\tau_{2,\lambda} = 0.$$

由(14′)和(15)得到:

$$\underset{B}{B_\lambda} - \underset{A}{B_\lambda} = \frac{1}{g}\mathrm{tr}(\sigma\partial_\lambda \underset{BA}{\zeta}\,\underset{BA}{\zeta}^{-1}) = \frac{i}{g}(A\mathrm{tr}(K_{1,\lambda}K_1^{-1}) + B\mathrm{tr}(K_{2,\lambda}K_2^{-1}))$$

$$= \frac{i}{g}\left(\frac{A}{\tau_1}\tau_{1,\lambda} + \frac{B}{\tau_2}\tau_{2,\lambda}\right) = \frac{i}{g}\sqrt{\frac{N}{s(N-s)}}\frac{1}{\tau_1}\tau_{1,\lambda}, \tag{16}$$

这式子表明，$F_{\lambda\mu}$ 是一个 U_1 规范场的强度，τ_1 是确定 U_1 规范的转换函数，由 U_1 规范场中磁荷量子化条件(见[4]和[8]，但现在用常数 $g\sqrt{\frac{s(N-s)}{N}}$ 代替那里的 e)，就得出对偶荷的量子化数值 lq'. 至于 q' 是能够取到的一个数值，我们将在第四部分中证明.

现在要得出 $F_{\lambda\mu}$ 的一个整体表达式.

定理 3　在定理 2 的条件下，在整个 M_4' 上成立

$$F_{\lambda\mu} = B_{\lambda,\mu} - B_{\mu,\lambda} - \frac{k}{g}\mathrm{tr}(\phi[\phi_{,\lambda}, \phi_{,\mu}])^*, \tag{17}$$

这里 $B_\lambda = -\mathrm{tr}(\phi b_\lambda)$, 因而磁荷的量子化值只和 Higgs 场 ϕ 有关.

证明　由(3)式易见

$$F_{\lambda\mu} = B_{\lambda,\mu} - B_{\mu,\lambda} - \frac{k}{g}\mathrm{tr}(\phi[\phi_{,\lambda}, \phi_{,\mu}]) + g\mathrm{tr}(\phi([b_\lambda, b_\mu] - k[[b_\lambda, \phi], [b_\mu, \phi]]))$$

$$- \mathrm{tr}(\phi_{,\lambda}b_\mu + \phi k[\phi_{,\lambda}[b_\mu, \phi]]) + \mathrm{tr}(\phi_{,\mu}b_\lambda + \phi k[\phi_{,\mu}, [b_\lambda, \phi]]), \tag{18}$$

因 $\phi = \zeta\sigma\zeta^{-1}$, 所以

$$\phi_{,\lambda} = \zeta[\zeta^{-1}\zeta_{,\lambda}, \sigma]\zeta^{-1}.$$

---

* 在 M_4' 由若干坐标系统覆盖时，此式应写作

$$F = -d\beta - \frac{k}{g}\mathrm{tr}(\phi[d\phi, d\phi]),$$

这里 $[d\phi, d\phi] = \frac{1}{2}[\phi_{,\lambda}, \phi_{,\mu}]dx^\lambda \wedge dx^\mu$, $\beta = -\mathrm{tr}(\phi b_\lambda dx^\lambda)$.

记

$$b'_\mu = \zeta^{-1} b_\mu \zeta = (\beta_a^b), \quad \eta_\lambda = \zeta^{-1}\zeta_{,\lambda} = (\eta_a^b),$$

利用 $\mathrm{tr}(PQR) = \mathrm{tr}(QRP)$, $\mathrm{tr}(\zeta P \zeta^{-1}) = \mathrm{tr} P$ 等事项（这里 P, Q, R 为任意 $N \times N$ 阵），易见

$$\mathrm{tr}(\phi_{,\lambda} b_\mu + k\phi[\phi_{,\lambda}, [b_\mu, \phi]]) = i \sum_{b,a} (\sigma_a - \sigma_b)(1 - k(\sigma_a - \sigma_b)^2)\eta_a^b \beta_b^a,$$

根据对 σ 的假设和 k 的值，就知道这个式子为 0，因而(18)式最后二项为 0．它们前面一项也易见为 0，从而得到了(17)式．

因为 $\frac{1}{2}(B_{\lambda,\mu} - B_{\mu,\lambda})dx^\lambda \wedge dx^\mu$ 在整个 M'_4 上为 $-B_\lambda dx^\lambda$ 的外微分，所以对于对偶荷无贡献．因此，任一闭曲面 S 所包含的对偶荷必为

$$-\frac{k}{8\pi g}\int_S \mathrm{tr}(\phi[\phi_{,\lambda}, \phi_{,\mu}])dx^\lambda \wedge dx^\mu, \tag{19}$$

它单和 Higgs 场 ϕ 有关．定理 3 证毕．

对 $N = 2$ 和 3 的情况，可见 [2], [3], [7].

四、球对称 Higgs 场的对偶荷数值

现通过球对称的 Higgs 场来证明对偶荷的最小量子化值(13)确能被取到．设 $C \in SO_3$, $C \to \zeta_C$ 为 SO_3 在 SU_N 中的一个表示，如果 Higgs 场 $\phi(x)$ 满足 $\phi(Cx) = (\mathrm{ad}\zeta_C)\phi(x)$（对任何 $C \in SO_3$），那末 $\phi(x)$ 就是球对称的．

记点 (0, 0, 1) 为 x_0（时间坐标不写出），ϕ 在 x_0 的值为 $\underset{0}{\phi}$, SO_3 的李代数的标准基为

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在表示 $C \to \zeta_C$ 中*，Y_1, Y_2, Y_3 相应算符 A_1, A_2, A_3，其具体表达式可见[9]，因为

$$(\delta x_1 Y_2 - \delta x_2 Y_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以在 $(\delta x_1, \delta x_2, 1)$ 点的 ϕ 值为

$$\phi(\delta x_1, \delta x_2, 1) = \underset{0}{\phi} + [\delta x_1 A_2 - \delta x_2 A_1, \underset{0}{\phi}],$$

由此得

$$\partial_1 \underset{0}{\phi} = [A_2, \underset{0}{\phi}], \quad \partial_2 \underset{0}{\phi} = -[A_1, \underset{0}{\phi}], \tag{20}$$

由 ϕ 的球对称性，知 $\mathrm{tr}(\phi[\partial_\lambda \phi, \partial_\mu \phi])dx^\lambda \wedge dx^\mu$ 为 SO_3 的不变外形式，所以若 S 为单位球面，则

* 阵 ζ_C 的元素是广义球谐函数，表达式见[9]，$C \to \zeta_C$ 有时是双值的，但 $C \to \mathrm{ad}\zeta_C$ 仍然单值．

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\int_S \mathrm{tr}(\phi[\partial_\lambda\phi,\partial_\mu\phi])dx^\lambda\wedge dx^\mu=\mathrm{tr}(\underset{0}{\phi}[\partial_1\underset{0}{\phi},\partial_2\underset{0}{\phi}]). \tag{21}$$

又 $\underset{0}{\phi}$ 必须和 A_3 可交换*，A_3 具对角形式，所以我们取 $\underset{0}{\phi}$ 为对角阵

$$\underset{0}{\phi}=i\begin{bmatrix}\phi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \phi_N\end{bmatrix},$$

其中 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N$ 中有 s 个取 A 值，有 $N-s$ 个取 B 值. 若记 $A_1=(c_a^b)$，$A_2=(d_a^b)$，由于 A_1, A_2 只有和对角线相邻接的元素不为 0，所以

$$\mathrm{tr}(\underset{0}{\phi}[[A_2,\underset{0}{\phi}],[A_1,\underset{0}{\phi}]])=i\sum_{a=1}^{N-1}(\phi_a-\phi_{a+1})^3(d_{a+1}^a c_a^{a+1}-c_{a+1}^a d_a^{a+1}). \tag{22}$$

从此就可根据 $\underset{0}{\phi}$ 中 A, B 的不同排列和 SO_3 的不同表示，计算出对偶荷的各种量子化值. 特别，取

$$A_1=-\frac{i}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix},$$

$$A_3=\frac{i}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix},\quad \underset{0}{\phi}=i\begin{bmatrix}A & & & & \\ & B & & & \\ & & \phi_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \phi_N\end{bmatrix},$$

未写出的元素均为 0，从(12)式和(22)式就给出

$$-\frac{k}{8\pi g}\int_S \mathrm{tr}(\phi[\phi_{,\lambda},\phi_{,\mu}])dx^\lambda\wedge dx^\mu=\frac{1}{2g}\sqrt{\frac{N}{s(N-s)}}, \tag{23}$$

从而得出了具最小量子化值的对偶荷**.

附带指出，如取 SO_3 的不可约表示，又取

$$\underset{0}{\phi}=i\begin{bmatrix}A & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A & & \\ & & & B\ddots & \\ & & & & B\end{bmatrix},$$

那末对偶荷所取的数值为 $\frac{1}{2g}\sqrt{\frac{N}{s(N-s)}}\,s(N-s)$.

---

* 易证，在此条件下，由 $\phi(x)=(\mathrm{ad}\xi_C)\underset{0}{\phi}$，$x=Cx_0$ 能单值地定出一个球对称的 Higgs 场.

** 由上述方法得到的 Higgs 场的表达式可为

$$\phi(t,r,\theta,\varphi)=i\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(A+B)+\frac{1}{2}(A-B)\cos\theta & \frac{1}{2}(B-A)\sin\theta e^{-i\varphi} & & & & \\ \frac{1}{2}(B-A)\sin\theta e^{-i\varphi} & \frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(A-B)\cos\theta & & & & \\ & & A & & & \\ & & & \ddots A & & \\ & & & & B\ddots & \\ & & & & & B\end{bmatrix},$$

未写出的元素为 0，(r,θ,φ) 为空间的球面坐标，且 $\phi_3,\cdots,\phi_N$ 已作适宜的排列.

五、几点说明

(1) $N=2$ 时，我们这里得到对偶荷最小量子化数值为 $\frac{1}{\sqrt{2}g}$. 这结果其实和 't Hooft 的结果[1]一样，只是单位选取不同而已．我们这里的 g 就是那里的 e. 选取定理 1 证明 ϕ 的规范，由于 $A=-B=\sqrt{\frac{1}{2}}$，得

$$F_{\lambda\mu}=\sqrt{2}\,(b^1_{\lambda 1,\mu}-b^1_{\mu 1,\lambda}),$$

而[1]中的 $b^3_\lambda=2b^1_{\lambda 1}$，电磁场张量 $F'_{\lambda\mu}=b^3_{\lambda,\mu}-b^3_{\mu,\lambda}=\sqrt{2}\,F_{\lambda\mu}$*，所以在他的单位的选取下，磁荷的最小量子化值为 $\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}g}=\frac{1}{g}$.

(2) $N=3$ 时对偶荷能取得的最小量子化值为 $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}g}$. SO_3 不可约表示相应的球对称 Higgs 场的对偶荷值为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}g}$. [7] 中的特解所取的荷值 $\frac{\sqrt{3}}{g_M}$ 其实和此一致，这里 $g_M=2g$ 是那里的偶合常数，又那里的 $b^8_\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}(b^1_{\lambda 1}+b^2_{\lambda 2})$. 在特殊的规范下，本文的

$$F_{\lambda\mu}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,(b^1_{\lambda 1,\mu}+b^2_{\lambda 2,\mu}-b^1_{\mu 1,\lambda}-b^2_{\mu 2,\lambda})=\sqrt{2}\,F'_{\lambda\mu},$$

$F'_{\lambda\mu}$ 为那里的电磁场张量，因而其对偶荷值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}g}=\frac{\sqrt{3}}{2g}=\frac{\sqrt{3}}{g_M}$.

(3) 在 SU_N 规范场中，$N>2$ 时，令

$$Q'=\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}\{f_{\lambda\nu},f_{\mu\sigma}\}-\mathrm{tr}(\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}\{f_{\lambda\nu},f_{\mu\sigma}\})I/N,$$

式中 $\eta^{\lambda\mu}$ 是 M_4 的时空度规，{　}是反对易算符，I 是单位阵，那末 Q' 是 SU_N 规范场内禀地决定的 Higgs 场．如果 Q' 符合定理 2 的条件，或者虽有二个以上的不同特征值，但由它可以用某种代数方法作出满足这种条件的 Higgs 场(例如在 $N=3$ 时见[7])，那末就可以有“内禀”的对偶荷．但这种对偶荷不是任何时候都可唯一地作出的，其物理意义也还不够明白，在本文中宁可作一般性的讨论而不限于这种“内禀”的 Higgs 场．

(4) 在[6]中对于某些有奇弦的特殊的可化约的 SU_N 规范场，根据奇弦在“测量”中不起作用这一要求，提出了另一种条件，该文的作者也称之为“量子化条件”**．但是满足这种条件的规范场未必能够通过规范变换消去奇弦而成为乘积型的 SU_N 规范场．例如，由[4]中关于 SU_2 球对称磁荷的讨论就可推出：满足这种量子化条件(对偶荷值取最小)的规范场并不能化为普通的 SU_2 规范场，实际上它是 SO_3 的非平凡的整体规范场．

(5) 对于一个已给定的特殊的规范场，除定理 1 所指出的那种 Higgs 场之外，也还可

* 和原文所用的正负号不一样．

** [10]中也有类似想法．

能存在另外的 Higgs 场，使由(3)所定义的 $F_{\lambda\mu}$ 也满足 Bianchi 恒等式.

(6) 如果我们所讨论的 SU_N 规范场不是 M_4 上的乘积规范场(乘积丛)，那末定理1和定理2仍然成立. 定理1是局部性的，当然不会有问题，在定理2的证明中，我们考虑到 b_λ, ϕ 在 Ω_A 和 Ω_B 中有不同的表达式 $\underset{A}{b'_\lambda}$, $\underset{B}{b'_\lambda}$, $\underset{A}{\phi}$, $\underset{B}{\phi}$, 它们由转换函数 $\underset{BA}{S}$ 相联系，改取 $\underset{BA}{\zeta} = \zeta_B \underset{BA}{S} \zeta_A^{-1}$, 定理2的证明仍有效，容易见到，对偶荷的数值仍只依赖于 Higgs 场*，但(17)式失效.

六、Kronecker 指标的推广

从上述论述中可以推出有关微分流形 M_n (n 任意)的若干事项. 首先，若 ϕ 在 M_n 上定义，$\phi \in W_\sigma$, σ 只有两个不同的特征值，那末

$$\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\phi[d\phi, d\phi])$$

必为 M_n 上的闭形式，其周期为 $l\sqrt{\dfrac{N^3}{(N-s)^3 s^3}}$ (l=整数). 由于这时 W_σ 是商空间 $SU_N/SU_s \times SU_{N-s} \times U_1$, (即 AIII 型对称空间[10])所以形式 Σ 是由 M_n 到这商空间的映象所给出的.

其次，若 S 为 M_n 中任一二维可定向闭曲面，那末 $\frac{1}{4\pi}\int_S \Sigma$ 是 S 到商空间 $SU_N/SU_s \times \times SU_{N-s} \times U_1$ 的映照 $\phi(x)$ 的同伦不变量. 当 $N = 2$ 时，这不变量就是 S 到球面的映象的 Kronecker 指标.

此外，我们也可通过计算证明：对任何 $\phi \in W_\sigma$, Σ 均为流形 M_n 上的闭形式的充要条件是 σ 只能有两个不同的特征值.

参考资料

[1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276.
[2] 侯伯宇、段一士、葛墨林，兰州大学学报(自然科学版)，1975, **2**, 26.
[3] J. Arafune, P. G. O. Freund and C. J. Goebel, *Jour. Math. Phys.*, **16**(1975), 433.
[4] T. T. Wu, C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 3845; C. N. Yang, "Gauge Fields", (Proc. 1975 Hawaii Conf.).
[5] 谷超豪、杨振宁，中国科学，1976, **6**, 610; *Scientia Sinica*, **20** (1977), 177.
[6] Z. F. Ezawa and H. C. Tze, *Nucl. Phys.*, **B100**(1975), 1.
[7] W. J. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 1093.
[8] 谷超豪，复旦学报(自然科学版)，1975, **4**, 82; 中国科学，1976, **3**, 320.
[9] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, и З. Я. Шапиро, "Представления группы Вращений и группы Лоренца, их применения", (1958, Москва), 33—34.
[10] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press (1962), 354.

* 这因为，规范势连续可微地变化时，对偶荷数值必须作连续的变化，但已证对偶荷数值是量子化的，所以它不会改变.

THE U_1 GAUGE FIELD IN A SU_N GAUGE FIELD AND THE QUANTIZED VALUES OF DUAL CHARGES

GU CHAO-HAO

(*Futan Univercity*)

ABSTRACT

Let F be a SU_N gauge field on the space-time manifold M_4, $b_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, 2, 3)$ the gauge potentials,

$$f_{\lambda\mu} = b_{\lambda,\mu} - b_{\mu,\lambda} - g[b_\lambda, b_\mu]$$
$$\left(b_{\lambda,\mu} = \frac{\partial b_\lambda}{\partial x_\mu}, \qquad g = \text{coupling const.}\right) \tag{1}$$

the field strengths and $Q(x)$ a Higgs field. All quantities b, $f_{\lambda\mu}$ and $Q(x)$ are SU_N'-valued, i.e. they are represented by $N \times N$ anti-hermitian traceless matrices.

Let M_4' be the set of x such that $Q(x) \neq 0$ and define

$$\phi(x) = Q(x)/(-\mathrm{tr}Q), \tag{2}$$
$$F_{\lambda\mu} = -\mathrm{tr}\left(\phi\left(f_{\lambda\mu} + \frac{k}{g}[D_\lambda\phi, D_\mu\phi]\right)\right) \ (k = \text{const}) \tag{3}$$

on M_4', where

$$D_\lambda\phi = \phi_{,\lambda} + g[b_\lambda, \phi].$$

The following results are obtained:

Theorem 1. The 1st set of Maxwell equations

$$F_{\lambda\mu,\nu} + F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} = 0$$

are satisfied for arbitrary b_λ if and only if

$$\phi(x) = (\mathrm{ad}\zeta(x))i\begin{bmatrix} A & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A & & & \\ & & & -B & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -B \end{bmatrix}\begin{matrix} \}s \\ \\ \}N-s \end{matrix}$$

with

$$k = \frac{s(N-s)}{N}, \qquad A = \sqrt{\frac{N-s}{Ns}}, \qquad B = \sqrt{\frac{s}{N(N-s)}}.$$

Here s is an integer, $1 \leqslant s \leqslant N-1$.

Suppose the conditions in theorem 1 are satisfied.

Theorem 2. If s is a space-like two-dimensional surface, the value of dual charges contained in s defined by

$$\frac{1}{8\pi}\int_s F_{\lambda\mu}dx^\lambda \wedge dx^\mu$$

is equal to lq', where l is an integer and

$$q' = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{N}{(N-s)s}}.$$

Theorem 3. The value of dual charges contained in S is equal to the integral

$$-\frac{k}{8\pi g}\int_S \mathrm{tr}(\phi[\phi_{,\lambda}, \phi_{,\mu}])dx^\lambda \wedge dx^\mu$$

which is independent of the gauge potentials.

Theorem 4. The least positive value q' of dual charge can be attained by some Higgs fields.

Remarks

(a) When $N=2$, the results obtained are consistent with those of 't Hooft, Arafune and Hou etc.

(b) For $N=3$, we give an answer to the question of quantized values of dual charges which was discussed by Marciano and Pagels.

(c) The Higgs field $\phi(x)$ is a mapping from M_4' into the AIII type symmetric space $SU_N/S(U_s \times U_{N-s})$ and the integral is an extension of Kronecker index for $N=2$.