

# 重子和介子的 $SU_n$ 波函数的 位相及表象变换

陈金全 高美娟 王 凡  
(南京大学)

## 摘 要

本文对层子模型中重子和介子的波函数提出了一种合理的位相约定, 澄清了位相上存在的混乱, 并给出了  $SU_3$  的  $I$ 、 $U$ 、 $V$  三种表象之间的变换关系。

## 一、引 言

层子模型中重子和介子波函数早已有不少人给出过。但以往波函数的选取及位相约定无统一的标准, 存在着严重的混乱和错误。Lipkin<sup>[1]</sup> 曾说过, 在基本粒子理论中简直无位相约定可言, 有的只是位相混乱, 甚至认为这种混乱和错误是无法消除的, 人们必须学会和这种混乱局面打交道。他还认为  $I$  旋,  $U$  旋,  $V$  旋之间只能有二者处于等价地位而不可能使三者都处于完全等价的地位。

本文建议用 Gelfand 基<sup>[2]</sup> Baird-Biedenharn 位相约定<sup>[3]</sup> 来统一层子模型中重子、介子波函数的选取。这种位相约定有以下优点:

1. 它是  $SU_n$  群 Condon-Shortley<sup>[4]</sup> 位相的自然推广。
2. 配分相同而  $n$  不同的各种  $SU_n$  波函数之间有简单的对应关系, 只需作简单的指标代换就能得到属于同一不可约表示的所有不同  $n$  的  $SU_n$  波函数(见第二节)。
3. 不同  $n$  的  $SU_n$  群 CG 系数 (Clebsch-Gordan Coefficient) 之间可以建立简单的递推关系<sup>[5]</sup>。
4. 各种表象处于等价地位(例如使  $SU_3$  的  $I$ 、 $V$ 、 $U$  旋表象处于完全等价地位), 可给出统一的表象变换公式。

根据这些, 本文重新给出这一合理位相约定下的重子、介子的  $SU_n$  波函数并给出了  $SU_3$  的  $I$ 、 $U$ 、 $V$  三种表象之间的变换矩阵。

## 二、重子和介子波函数

$SU_n$  群的 Gelfand 基有多种标志方法, 例如:

1. Gelfand 符号<sup>[2,3]</sup>  $\left| \left( \begin{matrix} (\nu) \\ (m) \end{matrix} \right) \right\rangle$ .

2. Weyl 盘<sup>[6]</sup>或称为  $\rho_m$  盘<sup>[7]</sup>.

3. 用一些具有物理意义的量子数来标志, 例如  $SU_3$  的  $I, U, V$  三种表象中的波函数可分别表为

$$\begin{aligned} |(pq)ab, c\rangle &= |(pq)II_0, Y\rangle, \\ |(pq)ab, c\rangle^U &= |(pq)UU_0, -Q\rangle, \\ |(pq)ab, c\rangle^V &= |(pq)VV_0, Q - Y\rangle. \end{aligned}$$

这里  $(pq)$  为标志  $SU_3$  不可约表示的量子数,  $Y, Q$  分别为超荷和电荷. 又如  $SU_4$  的  $I$  旋表象波函数可表为<sup>[8]</sup>  $|\nu\rangle(\mu)_Z, II_0, Y\rangle$ ,  $[\nu], (\mu)$  分别为  $SU_4$  和  $SU_3$  的  $IR$  的标志,  $Z$  为可加量子数,  $Z = \frac{1}{4}(n_1 + n_2 + n_3 - 3n_4)$ ,  $n_i$  为  $i$  类层子数.

本节讨论全取  $I$  旋表象, 即四种层子态的编号取为

$$\psi_1 = p, \quad \psi_2 = n, \quad \psi_3 = \lambda, \quad \psi_4 = c. \quad (1)$$

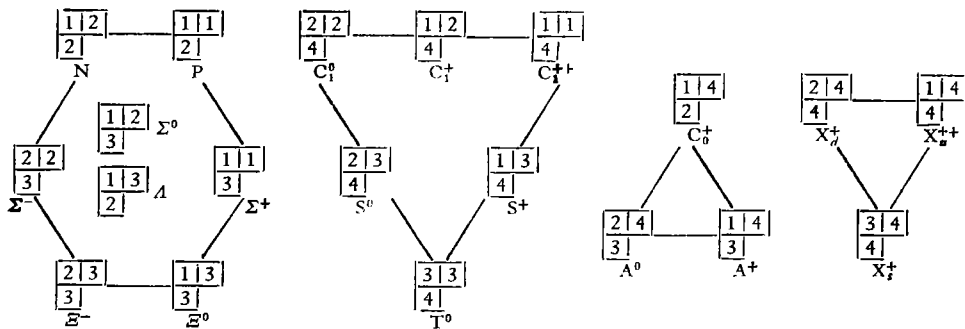
作为例子, 将  $SU_3$  8 维表示  $IR$  (不可约) 基的三种标志方法列在表 1.

表 1  $SU_3$  8 维表示  $IR$  基的三种标志方法

	P	N	$\Sigma^+$	$\Sigma^0$	$\Sigma^-$	$\Lambda$	$\Xi^0$	$\Xi^-$
$(I I_0, Y)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$	1 1, 0	1 0, 0	1 -1, 0	0 0, 0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$
Weyl 盘	$\begin{matrix} p & p \\ n & \end{matrix}$	$\begin{matrix} p & n \\ n & \end{matrix}$	$\begin{matrix} p & p \\ \lambda & \end{matrix}$	$\begin{matrix} p & n \\ \lambda & \end{matrix}$	$\begin{matrix} n & n \\ \lambda & \end{matrix}$	$\begin{matrix} p & \lambda \\ n & \end{matrix}$	$\begin{matrix} p & \lambda \\ \lambda & \end{matrix}$	$\begin{matrix} n & \lambda \\ \lambda & \end{matrix}$
Gelfand 符号	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 2 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 0 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{matrix} \right)$	$\left( \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{matrix} \right)$

文献中常见的一些  $SU_3$  和  $SU_4$  波函数, 全对称波函数的位相都是一致的, 也和本文一致, 即取 Baird-Biedenharn 位相约定: 规定酉群无穷小算符  $E_{i, i+1}$  的矩阵元全大于等于

表 2  $SU_4$  混合对称重子波函数(均用 Weyl 盘标志 Gelfand 基)



零<sup>1)</sup>。但混合对称波函数的位相就非常混乱,而且同一个作者自己给的波函数也存在混乱,有些态满足 Condon-Shortly 位相约,有些又不满足。满足 Baird-Biedenharn 位相约的混合对称波函数由表 2 给出。

用 Gelfand 基代表重子波函数,一般不必知道它的单粒子乘积态展开式,可直接利用 Gelfand 矩阵元处理问题。如果需要知道它的明显表达式,则可以有多种方法得到。为此首先要注意,前述种种 Gelfand 基的标志,都只确定了它在  $SU_n$  群元作用下的变换性质,一般说还没有把波函数完全确定下来,要唯一确定一个波函数还要指明它在坐标置换群作用下的变换性质,即要同时用一个 Weyl 盘和一个 Young 盘来唯一确定一个波函数<sup>[6,7]</sup>,例如

$$\left| \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right\rangle_1 \equiv \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right| \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \rangle, \quad \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right\rangle_2 \equiv \left| \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right| \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array} \rangle. \quad (2)$$

上式右边第一个盘为 Weyl 盘,第二个盘为 Young 盘。这种基既是  $SU_n$  的 Gelfand 基又是置换群的 Young-Yamanouchi 标准基。

可采用以下四种方法得到 Gelfand 基的显示式。

### 1. 建筑方法

利用 Baird-Biedenharn 位相约的  $SU_n$  群 CG 系数<sup>[10]</sup>一步步由低往高做。

### 2. 递降算符法<sup>[11,12]</sup>

从最高权态出发,利用递降算符求出同一  $IR$  内所有的态。

### 3. 投影算符法<sup>[6,7]</sup>

利用置换群投影算符作用在合适的单粒子乘积态(文献[6]称它为正序态)上得出。

### 4. 本征函数法<sup>[6,13,14]</sup>

方法 1 不仅要预先知道 CG 系数而且不能保证作出的基是置换群标准基。方法 2 预先知道最高权态的显示式。方法 3 在层子数较小时用起来较方便,但层子数较大时不方便。而方法 4 则可以克服上述种种缺点,文献[14]用本征函数法算得的结果列在表 3。

表 3  $SU_n$ [21] 表示 Gelfand 基的显示式

(a)

	$(\alpha \beta \gamma)$	$(\beta \alpha \gamma)$	$(\beta \gamma \alpha)$	$(\alpha \gamma \beta)$	$(\gamma \alpha \beta)$	$(\gamma \beta \alpha)$
$\left  \begin{array}{ c c } \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right\rangle_1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$
$\left  \begin{array}{ c c } \hline \alpha & \beta \\ \hline \gamma & \end{array} \right\rangle_2$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\left  \begin{array}{ c c } \hline \alpha & \gamma \\ \hline \beta & \end{array} \right\rangle_1$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\left  \begin{array}{ c c } \hline \alpha & \gamma \\ \hline \beta & \end{array} \right\rangle_2$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$

1) Swart<sup>[9]</sup> 的  $SU_3$  CGC 位相约为  $E_{21}, E_{13}$  的矩阵元大于等于零,与本文不同。

Haacke<sup>[8]</sup> 的  $SU_3$  CGC 位相约为  $E_{21}, E_{32}, E_{43}$  的矩阵元大于等于零,与本文相同。

(b)			(c)				
	$(\alpha\alpha\beta)$	$(\alpha\beta\alpha)$	$(\beta\alpha\alpha)$		$(\alpha\ \beta\ \beta)$	$(\beta\ \alpha\ \beta)$	$(\beta\ \beta\ \alpha)$
$ \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta}\rangle_1$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$ \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{\beta}\rangle_1$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
$ \frac{\alpha}{\beta} \frac{\alpha}{\beta}\rangle_2$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$ \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta}{\beta}\rangle_2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

令表 3 (a) 中的态指标  $\alpha, \beta, \gamma$  分别等于<sup>1)</sup> 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 3, 4; 2, 3, 4; 令表 3 (b, c) 中的态指标  $\alpha, \beta$  分别等于 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4 就能得出表 2  $SU_4$  混合对称重子波函数的显示式。

表 4 给出文献 [11, 15—19] 得到的重子波函数和本文结果的对照表。

表 4 各种重子波函数对照表

(a)

	P	N	$\Sigma^+$	$\Sigma^0$	$\Sigma^-$	$\Xi^0$	$\Xi^-$	$\Lambda$
朱重远	$ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_2$
$\sqrt{\frac{2}{3}} \text{冼鼎昌}\rangle_1$	$ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_1$	$ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_1$	$ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$ \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_1$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_1$
$\sqrt{\frac{3}{8}} \text{冼鼎昌}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_2$
$ \text{Feld}\rangle_1$	$- \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_1$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_1$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_1$
$ \text{Feld}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_2$
Zweig 和 Berman	$ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\rangle_2$

(b)

	$C_1^{++}$	$C_1^+$	$C_1^0$	$S^+$	$S^0$	$T^0$
朱重远	$ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{4}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$- \frac{2}{4}\ \frac{2}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{4}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{2}{4}\ \frac{3}{2}\rangle_2$	$ \frac{3}{4}\ \frac{3}{2}\rangle_2$
	$C_1^+$	$A^+$	$A^0$	$X_2^{++}$	$X_2^+$	$X_2^0$
朱重远	$ \frac{1}{2}\ \frac{4}{2}\rangle_2$	$- \frac{1}{3}\ \frac{4}{2}\rangle_2$	$- \frac{2}{3}\ \frac{4}{2}\rangle_2$	$ \frac{1}{2}\ \frac{4}{2}\rangle_2$	$- \frac{2}{4}\ \frac{4}{2}\rangle_2$	$ \frac{3}{4}\ \frac{4}{2}\rangle_2$

1) 注意, 态序号必须满足  $\alpha < \beta < \gamma$ , 因此例如令  $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 2$  是不许可的<sup>[6]</sup>。

表4(a)中用 Weyl 盘标志 Gelfand 基  $|W\rangle_i$ , 其意义见(2)式. 表中第四到第七行给出的不是置换群标准基, 它们和置换群标准基的关系为:

$$|W\rangle_i = -\frac{1}{2}|W\rangle_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}|W\rangle_2, \quad \begin{pmatrix} |W\rangle'_1 \\ |W\rangle'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |W\rangle_1 \\ |W\rangle_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

由表4(a)可知, Feld 的第二套波函数虽满足  $SU_2$  Condon-Shortley 位相约定, 但不满足 Baird-Biedenharn 位相约定, 由它算得的  $E_{32}$  矩阵元

$$\langle E^0 | E_{32} | \Lambda \rangle = -\sqrt{\frac{3}{2}} \langle 0.$$

表4其余波函数都不满足 Condon-Shortley 位相约定.

$SU_4$  群的15个无穷小算符构成伴随表示  $[\nu] = [211]$  的基, 可将它们线性组合成不可约张量  $T_m^{[\nu]}$ , 使其构成  $SU_4$  群的 Gelfand 基, 即要求

$$[E_{\alpha\beta}, T_m^{[\nu]}] = \sum_{m'} T_{m'}^{[\nu]} \left\langle \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m') \end{pmatrix} \middle| E_{\alpha\beta} \middle| \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (4)$$

这里  $(m)$  代表量子数集  $(\mu) Z, II_0, Y^{[8]}$ ,  $(\mu)$  为  $SU_3$   $IR$  的标志, 以下用维数标志:

$\left| \begin{pmatrix} [\nu] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle$  为对应的 Gelfand 符号. 利用对易式  $[E_{\alpha\beta}, E_{\gamma\delta}] = \delta_{\beta\gamma} E_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\delta} E_{\gamma\beta}$ , 以及

Gelfand 矩阵元的表达式<sup>[2,12]</sup>, 立刻可得:

$$\begin{aligned} T_{(8)0, 1/2, 1/2, 1}^{[211]} &= E_{13}, & T_{(8)0, 1/2, -1/2, 1}^{[211]} &= E_{23}, & T_{(8)0, 11, 0}^{[211]} &= -E_{12}, \\ T_{(8)0, 10, 0}^{[211]} &= \sqrt{\frac{1}{2}}(E_{11} - E_{22}), & T_{(8)0, 1-1, 0}^{[211]} &= E_{21}, & T_{(8)0, 1/2, 1/2, -1}^{[211]} &= -E_{32}, \\ T_{(8)0, 1/2, -1/2, -1}^{[211]} &= E_{31}, & T_{(8)0, 00, 0}^{[211]} &= \sqrt{\frac{1}{6}}(2E_{33} - E_{11} - E_{22}), & & \\ T_{(3)1, 1/2, 1/2, 1/3}^{[211]} &= -E_{14}, & T_{(3)1, 1/2, -1/2, 1/3}^{[211]} &= -E_{24}, & T_{(3)1, 00, -2/3}^{[211]} &= -E_{34}, \\ T_{(3^*)_{-1, 00, 2/3}^{[211]} &= E_{43}, & T_{(3^*)_{-1, 1/2, 1/2, -1/3}^{[211]} &= -E_{42}, & T_{(3^*)_{-1, 1/2, -1/2, -1/3}^{[211]} &= E_{41}, \\ T_{(1)0, 00, 0}^{[211]} &= \sqrt{\frac{1}{12}}(E_{11} + E_{22} + E_{33} - 3E_{44}). \end{aligned} \quad (5)$$

由此可得出  $SU_3$  重子矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}, & -\Sigma^+, & P \\ \Sigma^-, & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda}{\sqrt{6}}, & N \\ \Xi^-, & -\Xi^0, & \frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix} \quad (6)$$

和文献[11]的结果相比,  $\Sigma^+$ ,  $\Lambda$  的位相相反, 和 Berman 等<sup>[18,19]</sup>的结果相比,  $\Sigma^+$ ,  $\Xi^0$ ,  $\Lambda$  的位相反号, 这和表4得到的结论一致.

关于重子的  $SU_8 \supset SU_2 \times SU_4$  分类波函数的构造及位相问题我们已在文献[20]讨

论过了。

下面讨论介子波函数。根据层子模型, 介子由一个层子和一个反层子组成, 它的波函数应该是混合张量并构成  $SU_4$  伴随表示的基。我们又知道  $SU_4$  群的无穷小算符  $E_{\alpha\beta}$  也是混合张量, 也构成  $SU_4$  伴随表示的基, 因此只要把 (5) 式中的无穷小算符  $E_{\alpha\beta}$  换成一个  $\alpha$  层子和  $\beta$  反层子波函数的积

$$E_{\alpha\beta} \rightarrow \alpha\bar{\beta},$$

(5) 式就给出 Baird-Biedenharn 位相约定下的介子波函数。按 (5) 式从左到右的次序, 这 15 个介子为  $K^+, K^0, \pi^+, \pi^0, \pi^-, \bar{K}^0, K^-, \eta^0, \bar{D}^0, D^-, F^-, F^+, D^+, D^0, \eta_c$ 。由此又立即得出介子矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}}, & -\pi^+, & K^+, & -\bar{D}^0 \\ \pi^-, & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}}, & K^c & -D^- \\ K^-, & -\bar{K}^0, & \frac{2\eta^0}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_c}{\sqrt{12}}, & -F^- \\ D^0, & -D^+, & F^+, & -\frac{3\eta_c}{\sqrt{12}} \end{pmatrix},$$

和文献 [15] 相比,  $\pi^+, \eta^0, \bar{D}^0, D^-, F^-, \bar{K}^0, D^+$  的位相相反; 和文献 [19] 的结果相比,  $\pi^+, \eta^0, \bar{K}^0$  及  $\rho^+\varphi^0, \bar{K}^{0*}$  的位相相反。

从介子的  $SU_4$  波函数作以下代换就立即得到介子的  $SU_6 \supset SU_4 \times SU_2$  波函数。

$SU_4$	$SU_6$			
	$(JM) = (0 \ 0)$	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(1, -1)$
$\alpha\bar{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{1/2}\bar{\beta}_{-1/2} - \alpha_{-1/2}\bar{\beta}_{1/2})$	$\alpha_{1/2}\bar{\beta}_{1/2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{1/2}\bar{\beta}_{-1/2} + \alpha_{-1/2}\bar{\beta}_{1/2})$	$\alpha_{-1/2}\bar{\beta}_{-1/2}$

由此得到的波函数和 Feld<sup>[16]</sup> 的结果相比,  $\pi^+, \bar{K}^0, \eta^0, \rho^+, \bar{K}^{0*}$  的位相相反。

### 三、表象变换

上一节我们都在  $I$  旋表象中讨论问题。令上节中层子态

$$\psi_1 = n, \quad \psi_2 = \lambda, \quad \psi_3 = p \tag{7}$$

并对量子数作代换  $I \rightarrow U, I_0 \rightarrow U_0, Y \rightarrow -Q$ , 就得到  $U$  旋表象中的波函数。类似地, 令上节中层子态

$$\psi_1 = \lambda, \quad \psi_2 = p, \quad \psi_3 = n \tag{8}$$

并对量子数作代换  $I \rightarrow V, I_0 \rightarrow V_0, Y \rightarrow Q - Y$ , 就得到  $V$  旋表象中的波函数。

我们也可利用表象变换矩阵从一个表象的波函数变到另一个表象波函数。分两种情形讨论:

### 1. 最高权态

最高权态或和最高权等价的态(即权为单纯的那些态)的表象变换很简单,至多只有位相改变。位相的改变可根据以下规则确定: Weyl 盘中同一列的两个态指标交换引入一负号,同一行的两个态指标交换不变,例如  $SU_3(8)$  维表示中  $U$  旋  $= \frac{1}{2}, U_0 = \frac{1}{2}, -Q = -1$  的态和质子态只差一个负号

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -1 \right\rangle^U = \left| \frac{1}{3} \frac{3}{3} \right\rangle^U = \left| \frac{n}{p} \frac{p}{p} \right\rangle = - \left| \frac{p}{n} \frac{p}{p} \right\rangle = - \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle^I = -|P\rangle. \quad (9)$$

### 2. 非最高权态

对权为非单纯的态,表象变换矩阵可用以下方法得到。

根据文献[6],  $f$  个层子的 Gelfand 基可用置换群  $S_f$  的投影算符  $\hat{p}^{(\nu)i}$  作用在正序态  $(\omega)$  上得出:

$$\left| \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m) \end{matrix} \right) \right\rangle^\sigma = [R^{[\nu]i}(\omega)^\sigma]^{-1} \hat{p}^{(\nu)i}(\omega)^\sigma, \quad R^{[\nu]i}(\omega) = \left( \sqrt{\frac{f!}{h_\nu}} \langle \omega | \hat{p}_i^{(\nu)i} | \omega \rangle \right)^{1/2}. \quad (10)$$

这里  $R^{[\nu]i}(\omega)$  为归一系数<sup>[10]</sup>, 上标  $\sigma$  代表  $I, U, V$  三种表象。由于三种表象中粒子态编号不同:

$$I \text{ 表象: } \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ p & n & \lambda \end{matrix}, \quad U \text{ 表象: } \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ n & \lambda & p \end{matrix}, \quad V \text{ 表象: } \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & p & n \end{matrix}.$$

因此  $\rho$  表象中的正序态  $(\omega)^\rho$  对  $\sigma$  表象来说就不再是正序态。但可以利用坐标置换算符  $p_{\sigma\rho}$  将  $(\omega)^\rho$  变到  $(\omega)^\sigma$ :  $(\omega)^\sigma = p_{\sigma\rho}(\omega)^\rho$ , 例如

$$(\omega)^U = (n\lambda p), \quad (\omega)^I = (p n \lambda), \quad (\omega)^V = p_{132}(\omega)^I. \quad (11)$$

利用(10)及文献[6](15)式可以导出  $\rho$  表象和  $\sigma$  表象 Gelfand 基之间的普遍变换公式:

$$\left| \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m) \end{matrix} \right) \right\rangle^\sigma = [R^{[\nu]i}(\omega)^\sigma]^{-1} \hat{p}^{[\nu]i}(\omega)^\sigma = [R^{[\nu]i}(\omega)^\sigma]^{-1} \hat{p}^{[\nu]i} p_{\sigma\rho}(\omega)^\rho$$

$$= [R^{[\nu]i}(\omega)^\sigma]^{-1} \sum_k D_{ik}^{[\nu]}(p_{\sigma\rho}) \hat{p}^{[\nu]k}(\omega)^\rho = \sum_{(m')} \left| \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m') \end{matrix} \right) \right\rangle^\rho \cdot {}^\rho \langle \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m') \end{matrix} \right) | \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m) \end{matrix} \right) \rangle^\sigma, \quad (12)$$

$${}^\rho \langle \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m') \end{matrix} \right) | \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m) \end{matrix} \right) \rangle^\sigma = \sum_k \frac{R^{[\nu]k}(\omega)^\rho}{R^{[\nu]i}(\omega)^\sigma} D_{ik}^{[\nu]}(p_{\sigma\rho}). \quad (13)$$

(13) 式中带撇和号表示只对

$$[R^{[\nu]k}(\omega)^\rho]^{-1} \hat{p}^{(\nu)k}(\omega)^\rho = \left| \left( \begin{matrix} [\nu] \\ (m') \end{matrix} \right) \right\rangle^\rho$$

的那些  $k$  求和,  $D^{[\nu]}$  为置换群  $IR$  矩阵。例如对  $SU_3$  8 维表示中  $I_0 = Y = 0$  态的表象变换由上式可求得

$$\begin{pmatrix} |10, 0\rangle \\ |00, 0\rangle \end{pmatrix}_U = D^{[21]}(132) \begin{pmatrix} |10, 0\rangle \\ |00, 0\rangle \end{pmatrix}_I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |10, 0\rangle \\ |00, 0\rangle \end{pmatrix}_I. \quad (14)$$

由于  $I, U, V$  三种表象完全等价, 将(14)式指标  $I, U, V$  轮换仍成立。附带指出,

Feld 波函数不满足他自己给的表象变换公式(见文献 [16] p. 286 (2f) 式)而且对他的二套波函数, 没有一个统一的表象变换公式, 这也说明了 Feld 波函数的位相是十分混乱的。

用类似的方法可求出  $SU_3$  27 维和 35 维表示的表象变换矩阵。

对 27 维表示的双态和三态引入以下记号:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &= \begin{pmatrix} |20, 0\rangle \\ |10, 0\rangle \\ |00, 0\rangle \end{pmatrix}, & |1\rangle &= \begin{pmatrix} |21, 0\rangle \\ |11, 0\rangle \end{pmatrix} \\
 |2\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{2}{3} - \frac{1}{2}, 1\rangle \\ |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1\rangle \end{pmatrix}, & |3\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, -1\rangle \\ |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, -1\rangle \end{pmatrix}, \\
 |i\rangle &= \begin{pmatrix} |a_1 b_1, c_1\rangle \\ |a_2 b_2, c_2\rangle \end{pmatrix}, & |\bar{i}\rangle &= \begin{pmatrix} |a_1 - b_1, -c_1\rangle \\ |a_2 - b_2, -c_2\rangle \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

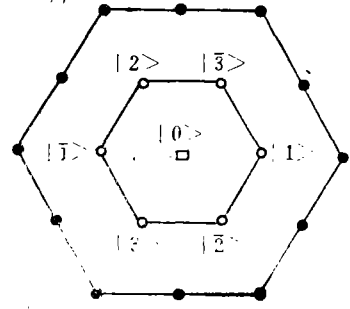


图 1  $SU_3$  27 维表示, ●, ○ 和 □, 分别代表单态, 双态和三态

所求得表象变换矩阵可写成:

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \sqrt{\frac{5}{12}} & \sqrt{\frac{5}{9}} \\ -\sqrt{\frac{5}{12}} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{5}{9}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{5}{6}} \\ -\sqrt{\frac{5}{6}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{\frac{5}{3}} \\ -\sqrt{\frac{5}{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

得出的表象变换公式为:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_U &= M_0 |0\rangle_I, \\
 |1\rangle_U &= M_1 |2\rangle_I, & |2\rangle_U &= -M_2 |3\rangle_I, & |3\rangle_U &= M_1 |1\rangle_I, \\
 |\bar{1}\rangle_U &= M_1 |\bar{2}\rangle_I, & |\bar{2}\rangle_U &= M_2 |\bar{3}\rangle_I, & |\bar{3}\rangle_U &= -M_1 |\bar{1}\rangle_I,
 \end{aligned}$$

上式对  $I, U, V$  轮换仍成立. 容易检验 (16) 式的矩阵  $M$  满足自治条件:

$$M_0^3 = 1, \quad -M_1 M_1 M_2 = -M_1 M_2 M_1 = -M_2 M_1 M_1 = 1,$$

这里 1 为单位矩阵. 上式表示对任一个态从任一表象出发, 相继按次序  $I \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow I$ , 或按次序  $U \rightarrow V \rightarrow I \rightarrow U$ , 或按次序  $V \rightarrow I \rightarrow U \rightarrow V$  经过三次表象变换, 必定回到起始态。

对 35 维表示引入记号:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} |21, 0\rangle \\ |11, 0\rangle \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} |\frac{5}{2} - \frac{1}{2}, 1\rangle \\ |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, 1\rangle \end{pmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 |3\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{3}{2} - \frac{1}{2}, -1\rangle \\ |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, -1\rangle \end{pmatrix}, & |0\rangle &= \begin{pmatrix} |20, 0\rangle \\ |10, 0\rangle \end{pmatrix} \\
 |1'\rangle &= \begin{pmatrix} |2 - 1, 0\rangle \\ |1 - 1, 0\rangle \end{pmatrix} & |2'\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{3}{2} \frac{1}{2}, -1\rangle \\ |\frac{1}{2} \frac{1}{2}, -1\rangle \end{pmatrix} & |3'\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{5}{2} \frac{1}{2}, 1\rangle \\ |\frac{3}{2} \frac{1}{2}, 1\rangle \end{pmatrix} \\
 |4\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{5}{2} \frac{3}{2}, 1\rangle \\ |\frac{3}{2} \frac{3}{2}, 1\rangle \end{pmatrix} & |5\rangle &= \begin{pmatrix} |\frac{5}{2} - \frac{3}{2}, 1\rangle \\ |\frac{3}{2} - \frac{3}{2}, 1\rangle \end{pmatrix} & |6\rangle &= \begin{pmatrix} |10, -2\rangle \\ |00, -2\rangle \end{pmatrix} \quad (19)
 \end{aligned}$$

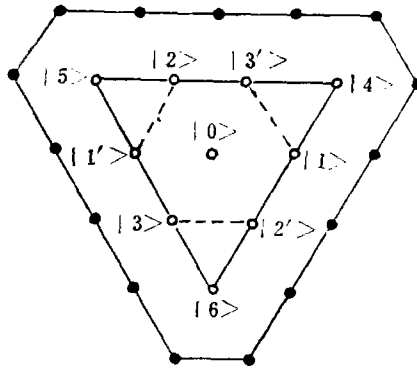


图2  $SU_3$  37 维表示。图中●和○分别代表单态和双态

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{10}} & -\sqrt{\frac{9}{10}} \\ \sqrt{\frac{9}{10}} & -\sqrt{\frac{1}{10}} \end{pmatrix} & N_2 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{5}} & -\sqrt{\frac{4}{5}} \\ \sqrt{\frac{4}{5}} & -\sqrt{\frac{1}{5}} \end{pmatrix} & N_3 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\
 N_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & N_4 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{\sqrt{24}}{5} \\ \frac{\sqrt{24}}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} & N_5 &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \sqrt{\frac{3}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix} \quad (20)
 \end{aligned}$$

表象变换公式为:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_U &= N_0 |0\rangle_I, \\
 |1\rangle_U &= N_1 |2\rangle_I, & |2\rangle_U &= N_2 |3\rangle_I, & |3\rangle_U &= N_3 |1\rangle_I, \\
 |1'\rangle_U &= N_3 |2'\rangle_I, & |2'\rangle_U &= N_2 |3'\rangle_I, & |3'\rangle_U &= N_1 |1'\rangle_I, & I, U, V \text{ 轮换} \quad (21) \\
 |4\rangle_U &= N_4 |5\rangle_I, & |5\rangle_U &= N_5 |6\rangle_I, & |6\rangle_U &= N_5 |4\rangle_I.
 \end{aligned}$$

(21) 式的表象变换矩阵满足自洽条件:

$$N_3^2 = 1, \quad N_4 N_5 N_5 = N_5 N_4 N_5 = N_2 N_5 N_4 = 1,$$

$$\rho(N_1 N_2 N_3) = 1, \quad (22)$$

这里  $\rho \in S_3$  为指标 1, 2, 3 的任意置换.

作者感谢陆焱、罗辽复、阮图南等同志有益的讨论

### 参 考 文 献

- [1] H. J. Lipkin, Lie Group For Pedestrians, Appendix B, D. 1965.
- [2] I. M. Gelfand and M. L. Zetlin, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 71 (1950), 825.
- [3] G. E. Baird and L. C. Biedenharn, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1723.
- [4] E. U. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, 1935.
- [5] 陈金全、于祖荣、王凡, 高能物理与核物理, 3 (1979), 216.
- [6] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, 26 (1977), 427.
- [7] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, 1 (1969).
- [8] E. M. Haacke, J. W. Moffat and P. Savaria, *J. Math. Phys.*, 17 (1976), 2041.
- [9] J. J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.*, 35 (1963), 916.
- [10] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, 27 (1978), 31.
- [11] 冼鼎昌、李炳安, 原子能, 第三期 (1965), 205.
- [12] 侯伯宇, *Scientia Sinica*, 15 (1966), 763.
- [13] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, 26 (1977), 307.
- [14] 陈金全、王凡、高美娟, 南京大学学报, 2(1978), 110.
- [15] 朱重远, 物理学报, 24 (1975), 351.
- [16] B. T. Feld, *Models of Elementary Particles Chapter*, 14 (1969), 15.
- [17] G. Zweig, *Symmetries in Elementary Particle Physics*, Ed. Zichichi, (1965), 214.
- [18] S. M. Berman, *Symmetries in Elementary Particle Physics*, Ed. Zichichi, (1965), 82.
- [19] 北京大学学报, 2 (1966), 124; 189.
- [20] 陈金全、王凡、高美娟, 物理学报, 27 (1978), 204.

## ON THE PHASE AND THE REPRESENTATION TRANSFORMATIONS OF $SU_n$ BARYON AND MESON WAVE FUNCTIONS

CHEN JIN-QUAN    GAO MEI-JUAN    WANG FAN

(Nanjing University)

### ABSTRACT

The baryon and meson wave functions of  $SU_n$  symmetry under the Baird-Biedenharn phase convention are given explicitly. The phase confusion is clarified and the matrices of transformations between  $I$ -spin,  $U$ -spin and  $V$ -spin representations are given for the IR(8), (27), (35) of  $SU_3$ .