

偶偶核高自旋态的三带交叉模型

廖 继 志
(四川 大学)

摘 要

本文提出了一个描述偶偶核高自旋态的三带交叉模型。这个模型能够解释某些偶偶核的转动惯量与转动角速度关系(即是 $\mathcal{I}-\omega^2$ 图)中的回弯现象。

一、引 言

近几年来,由于实验技术的改进和重离子复合核——级联中子蒸发反应的应用,已成功地研究了稀土区及其附近若干偶偶变形核的高速转动^[1,2]。通过 γ 跃迁能的测量,确定了那些原子核的 $I \sim 22\hbar$ 以下的转晕态的激发能。实验发现,当 I 在 12 到 $16\hbar$ 之间时,相邻能级间的能量差反常地减小。如果引入转动角速度 ω 和转动惯量 \mathcal{I} :

$$\hbar\omega = dE/d\sqrt{I(I+1)}, \quad \mathcal{I}\omega = \hbar\sqrt{I(I+1)},$$

则这种反常现象可作如下的表述:转动惯量在较低自旋值下随转动角速度的增加而平缓地单调地增大,当自旋超过某一数值后,转动惯量急剧增大,角速度反而减小;对某些核,如 ^{156}Dy , ^{170}W 等,当 I 大于 $18\hbar$ 时转动惯量随 ω 增大而减小。因而 $\mathcal{I}-\omega^2$ 曲线出现回弯和下弯现象。在回弯区 \mathcal{I} 是 ω 的多值函数。在几篇评论^[3-5]中介绍了对于这些现象的一些理论研究工作。这些工作大体上可分成两类,一类是从分析高速转动的机理出发,即认为在高速转动中可能出现对崩溃效应^[6],或转动排列效应^[7],或形状相变^[8],然后求解带有单粒子或对关联耦合项的转动哈密顿^[9,10];另一类方法,撇开核的内部运动,唯象地认为这些反常现象是由于不同转动带的混杂引起的^[11,12]。本文沿着后一方向,提出了一个可以考虑两个带或三个带相互混杂的带交叉模型。

二、三带交叉模型

设偶偶转动体的哈密顿量为 $H = H_0 + H'$, 其中 H_0 是不引起混合的部分, H' 是引起带间混合的部分。假定 H_0 产生三个转动带

$$H_0\phi_{gI} = E_{gI}\phi_{gI}, \quad H_0\phi_{sI} = E_{sI}\phi_{sI}, \quad H_0\phi_{iI} = E_{iI}\phi_{iI} \quad (1)$$

通过 H' 在它们之间的三个混合项

本文 1978 年 9 月 25 日收到, 1980 年 3 月 4 日收到修改稿。

$$\begin{aligned}\langle \phi_{gl} | H' | \phi_{sl} \rangle &= \langle \phi_{sl} | H' | \phi_{gl} \rangle \equiv a_{gs}^I; \\ \langle \phi_{gl} | H' | \phi_{il} \rangle &= \langle \phi_{il} | H' | \phi_{gl} \rangle \equiv a_{gi}^I; \\ \langle \phi_{sl} | H' | \phi_{il} \rangle &= \langle \phi_{il} | H' | \phi_{sl} \rangle \equiv a_{si}^I,\end{aligned}\quad (2)$$

这三个带发生混合. 设混合后波函数为

$$\begin{aligned}\phi_{bl} &= R_{11}\phi_{gl} + R_{12}\phi_{sl} + R_{13}\phi_{il}; \\ \phi_{ul} &= R_{21}\phi_{gl} + R_{22}\phi_{sl} + R_{23}\phi_{il}; \\ \phi_{vl} &= R_{31}\phi_{gl} + R_{32}\phi_{sl} + R_{33}\phi_{il},\end{aligned}\quad (3)$$

混合后的三带能量是

$$E_{bl} = \langle \phi_{bl} | H | \phi_{bl} \rangle, \quad E_{ul} = \langle \phi_{ul} | H | \phi_{ul} \rangle, \quad E_{vl} = \langle \phi_{vl} | H | \phi_{vl} \rangle \quad (4)$$

波函数(3)的正交归一性要求变换矩阵 R 满足条件:

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik}^2 = 1, \quad (i = 1, 2, 3) \text{ 和 } \sum_{k=1}^3 R_{ik}R_{jk} = 0, \quad (1 \leq i < j \leq 3).$$

假定存在一类特殊的哈密顿 H , 它的变换矩阵 R 是含有一个参量的转动矩阵 $d^l(\beta)$

$$R = d^l(\beta_l) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \beta_l) & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta_l & \frac{1}{2}(1 - \cos \beta_l) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta_l & \cos \beta_l & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta_l \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \beta_l) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta_l & \frac{1}{2}(1 + \cos \beta_l) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

将(3)式代入(4)式, 用了(2)式和(5)式, 考虑到 H' 在 H_0 的本征态中没有对角项, 以及 H 在波函数(3)中没有非对角项的条件, 可求出混合后各带能谱的表示式

$$\begin{aligned}E_{bl} &= \frac{1}{4}(2E_{sl} + E_{gl} + E_{il}) - \frac{1}{2\cos \beta_l}(E_{il} - E_{gl}) \\ &\quad - \frac{\cos^2 \beta_l + 1}{4(3\cos^2 \beta_l - 1)}(2E_{sl} - E_{gl} - E_{il}); \\ E_{ul} &= E_{sl} + \frac{\sin^2 \beta_l}{3\cos^2 \beta_l - 1}(2E_{sl} - E_{gl} - E_{il}), \\ E_{vl} &= \frac{1}{4}(2E_{sl} + E_{gl} + E_{il}) + \frac{1}{2\cos \beta_l}(E_{il} - E_{gl}) \\ &\quad - \frac{\cos^2 \beta_l + 1}{4(3\cos^2 \beta_l - 1)}(2E_{sl} - E_{gl} - E_{il}),\end{aligned}\quad (6)$$

作为 β_l 的函数, 在 0 到 π 间, (6)式有三个奇点, 即 $\beta_l = \arccos(\pm\sqrt{1/3})$ 和 $\pi/2$. 这些奇点正好是三个带的交叉点. 考虑下面两种特殊情形可以证明这一点.

1. 如果 $2E_{sl} = E_{gl} + E_{il}$, 则(6)式简化成

$$\begin{aligned}E_{bl} &= \frac{1}{2}(E_{gl} + E_{il}) - \frac{1}{2\cos \beta_l}(E_{il} - E_{gl}), \\ E_{ul} &= E_{sl} = \frac{1}{2}(E_{gl} + E_{il}),\end{aligned}$$

$$E_{sl} = \frac{1}{2} (E_{gl} + E_{il}) + \frac{1}{2 \cos \beta_l} (E_{il} - E_{gl}) \quad (7)$$

这时三带交于一点。s带不受混合的影响也不影响别的带。(7)式事实上是一种两带交叉公式。从 E_{bl} 的表示式可得

$$\cos \beta_l = \frac{E_{il} - E_{gl}}{E_{il} + E_{gl} - 2E_{bl}}, \quad (8)$$

当 $E_{sl} = E_{gl}$ 时,即在t带和g带的交叉点, $\cos \beta_{lc} = 0$, 故 $\beta_{lc} = \pi/2$ 。

2. 如果 $E_{sl} = E_{gl}$, 即t带与g带重合, 则有

$$E_{bl} = E_{vl} = \frac{1}{2} (E_{sl} + E_{gl}) - \frac{\cos^2 \beta_l + 1}{2(3\cos^2 \beta_l - 1)} (E_{sl} - E_{gl}),$$

$$E_{ul} = E_{sl} + \frac{2\sin^2 \beta_l}{3\cos^2 \beta_l - 1} (E_{sl} - E_{gl}), \quad (9)$$

这是另一种两带交叉的情形。从(9)式第一式得

$$\cos \beta_l = \pm \sqrt{(E_{sl} - E_{bl}) / (E_{sl} + 2E_{gl} - 3E_{bl})}. \quad (10)$$

由此可得两带交叉点($E_{sl} = E_{gl}$ 处)的 $\cos \beta_{lc}$ 值等于 $\pm \sqrt{1/3}$, 即 $\beta_l \approx 54^\circ 44', 125^\circ 16'$ 。由此可见, 三个奇点都是带间的交叉点。在计算中, 只要使交叉点的 l 不为偶数, 就可避开奇点。

三、计算结果和讨论

假设混合后的b带就是实验观察到的基带, 根据(6)式中第一式可以求出 $\cos \beta_l = y_l$ 满足下面的三次方程

$$y_l^3 + p_l y_l^2 + q_l y_l - p_l/3 = 0, \quad (11)$$

其中

$$p_l = 1.5(E_{il} - E_{gl}) / (3E_{bl} - E_{gl} - E_{sl} - E_{il}),$$

$$q_l = (E_{sl} - E_{bl}) / (3E_{bl} - E_{gl} - E_{sl} - E_{il}), \quad (12)$$

p_l 和 q_l 都是实数, 方程(11)至少有一个实根。

关于混合前带, 我们选用 Holmberg 等人的转动能公式^[13]

$$E_{kl} = A_k (\sqrt{1 + B_k l(l+1)} - 1) + E_{k0}, \quad k \text{ 代表 } b, g, t \quad (13)$$

其中 A_k, B_k 是可调参量, E_{k0} 是 $l=0$ 时的能量。参量旋转角 β_l 与 l 的关系, 可以有各种选择, 计算表明将 β_l 按 $\sqrt{l(l-2)} \equiv x_l$ 的幂展开比较好

$$\beta_l = ax_l + bx_l^2 + cx_l^3. \quad (14)$$

这样用基带能谱的实验数据代替(12)式中的 E_{sl} , 即可用最小二乘法决定(14)式中的 a, b 和 c (在选定了诸 A, B 和 E_0 时)。由此即可从(6)式计算混合后各带能谱和按通用的公式计算转动惯量 \mathcal{I} 和角速度 ω :

1) 基带不同于 yrast 带, 参看 Y. EL Masri, Nucl. Phys., **A279** (1977) 223.

$$\mathcal{J}/\hbar^2 = (2I_i - 1)/(E_{I_i} - E_{I_i-2}),$$

$$(\hbar\omega)^2 = (I_i^2 - I_i + 1)[(E_{I_i} - E_{I_i-2})/(2I_i - 1)]^2.$$

两带混合的计算可根据 (7)、(8) 式或 (9)、(10) 式按类似步骤进行。

我们对 ^{170}Hf , ^{170}W , $^{166, 168, 170}\text{Yb}$, $^{156, 158}\text{Dy}$, $^{158, 160, 162}\text{Er}$ 等十种核素进行了两带混合计算, 对 ^{154}Gd 和 ^{156}Dy 进行了三带混合计算。结果都能再现 $\mathcal{J}-\omega^2$ 图中的回弯和下弯。但两带计算得到的交叉点 I 值太大, 约为 $23\hbar$; 而且 yrare 带能量也太高。三带交叉计算结果有明显的改进。

表 1 ^{154}Gd 和 ^{156}Dy 的能谱(以 MeV 为单位)

I	^{154}Gd					^{156}Dy				
	yrast 带		yrare 带		第三带计算	yrast 带		yrare 带		第三带计算
	计算	实验	计算	实验		计算	实验	计算	实验	
0	0.0000	0	0.6807	0.6807	1.0820	0.0000	0	0.6950	0.6754	1.3470
2	0.1231	0.1231	0.7774	0.8155	1.1500	0.1378	0.1378	0.7893	0.8287	1.4033
4	0.3682	0.3712	1.0063	1.0475	1.3180	0.3962	0.4041	1.0343	1.0886	1.5653
6	0.7160	0.7179	1.3496	1.3658	1.5619	0.7656	0.7703	1.3897	1.4374	1.7919
8	1.1498	1.1447	1.7888	1.7566	1.8668	1.2195	1.2155	1.8562	1.8589	2.0528
10	1.6426	1.6375	2.2092	2.1944	2.3098	1.7308	1.7249	2.3355	2.3158	2.4226
12	2.1826	2.1851	2.5842	2.6225	2.8906	2.2831	2.2860	2.6505	2.7071	3.0568
14	2.7685	2.7781	3.0004	3.0282	3.4920	2.8767	2.8878	3.0268	3.0660	3.7016
16	3.4062	3.4053	3.4764	3.4924	4.0653	3.4916	3.4988	3.5156	3.5235	4.3088
18	4.0165	4.0170	4.0878	4.0889	4.5966	4.0378	4.0266	4.1873	4.1789	4.8800
20	4.6015		4.7878		5.1167	4.6473	4.6361	4.8747	4.8598	5.4382
22						5.3149	5.3208	5.5681		5.9971
24						6.0036		6.2613		6.5726

表 2 混合前各带数据和拟合参量值 (A, E_0 单位 MeV, a, b, c 单位弧度)

核素	带	A	B	E_0	交叉点			β_i 的系数	
					I_{it}	I_{gt}	I_{gt}	a	b
^{154}Gd	g	2.9881	0.014017	0				a	0.11107
	i	5.6754	0.0040185	1.0820	11.462	16.941	23.710	b	4.2887×10^{-3}
	s	3.4788	0.0094028	0.6807				c	2.0114×10^{-3}
^{156}Dy	g	2.5802	0.018267	0				a	0.14748
	i	14.575	0.0012871	1.3470	11.614	15.691	23.418	b	8.9373×10^{-3}
	s	3.2438	0.010789	0.6950				c	1.8071×10^{-4}

表 1 列出了 ^{154}Gd 和 ^{156}Dy 的计算能谱和对应的实验值。实验数据取自文献 [14, 15]。表 2 列出混合前各带的数据和最小二乘拟合得到的 β_i 展式中的系数 a, b, c 。图 1 是 ^{154}Gd 和 ^{156}Dy 的 $\mathcal{J}-\omega^2$ 标绘与实验数据的比较。从表 1 得知, 计算能量与实验能量的最大偏差, 在 yrast 带或转晕带中约为 11 KeV, 在 yrare 带中约为 57 KeV。至于第三带, 还没有可靠的实验数据以供比较。与 Broglia 等人的结果 [10] 比较, 我们得到的 ^{154}Gd 的第三带能量约比他们的值低 0.8 MeV。

关于 $\mathcal{J}-\omega^2$ 标绘,从图看出,除 yrare 带的低自旋部分外,计算与实验基本上符合.在低自旋部分主要是 $I = 8$ 和 12 两点与实验点偏离较大.混合前带交叉点的位置也是合理的: s 带与 t 带在 I 为 $11-5\hbar$ 附近相交,对应于 yrare 带的回弯点; g 带与 t 带交叉点在 $15\hbar$ 到 $17\hbar$ 间,对应于转晕带的回弯点和 yrare 带的下弯点.图中还描出了 ^{154}Gd 第三带的 $\mathcal{J}-\omega^2$ 图,在 $I = 12\hbar$ 附近也出现回弯. ^{156}Dy 的第三带有完全类似的 $\mathcal{J}-\omega^2$ 图,回弯点也与 ^{154}Gd 的一样.我们的结果与 Broglia 等人^[10] 给出的 ^{156}Dy 第三带的 $\mathcal{J}-\omega^2$ 图十分不同,他们的图不显示上述特性.由于这些结果都是外推的,它们在多大程度上反映客观情况,只有靠未来的实验数据来判断.

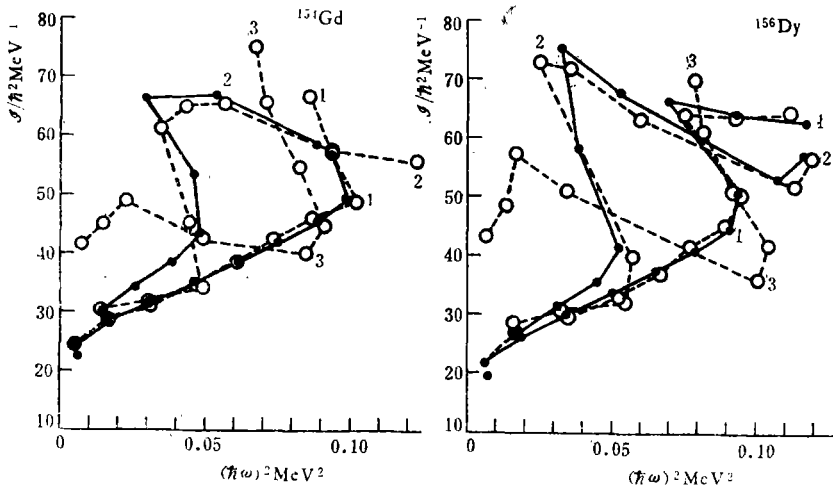


图1 ^{154}Gd 和 ^{156}Dy 的 $\mathcal{J}/\hbar^2 - (\hbar\omega)^2$ 图

1——转晕带, 2——yrare带, 3——第三带; ●——实验值, ○——计算值

以上的讨论表明,用基带 $4 \leq I \leq 20$ 各能级的实验能量决定的参量 β_i ,能够给出基本上与实验符合的能谱和 $\mathcal{J}-\omega^2$ 图,并预言第三带的 $\mathcal{J}-\omega^2$ 标绘也有回弯特性.所以本文提出的模型简单而直观地显示了带的交叉能解释原子核高速转动运动中的一些异常现象,相当好地模拟了微观效应的宏观表现.但是由于它是一个唯象模型,因而不可避免地具有某些缺点.例如,它不能揭示回弯的物理根源,在进行计算的时候不得不引入一些自由参量等等.

参 考 文 献

- [1] A. Johnson et al., *Nucl. Phys.*, **A179** (1972), 753.
- [2] P. Thieberger et al., *Phys. Rev. Lett.*, **28** (1972), 972.
- [3] A. Johnson and Z. Szymanski, *Phys. Rep.*, **7C** (1973), 181.
- [4] F. S. Stephens, *Rev. Mod. Phys.*, **47** (1975), 43.
- [5] A. Bohr, *Rev. Mod. Phys.*, **48** (1976), 365.
- [6] B. R. Mettelson, J. G. Valatin, *Phys. Rev. Lett.*, **5** (1960), 511.
- [7] F. S. Stephens, R. Simon, *Nucl. Phys.*, **A183** (1972), 257.
- [8] C. K. Ross et al., *Nucl. Phys.*, **A211** (1973), 145.
- [9] 朱耀银、张邦国、吴成礼,原子核物理(1974年会议资料选编)原子能出版社,1977年318页.
- [10] R. A. Broglia et al., *Phys. Lett.*, **50B** (1974), 295; *Phys. Lett.*, **57B** (1975), 113.
- [11] 张敬业、李君清、高元义,高能物理与核物理,2(1978),67.

- [12] A. Molinari and T. Regge, *Phys. Lett.*, **41B** (1972), 93.
[13] P. Holmberg et al., *Nucl. Phys.*, **A117** (1968), 552.
[14] D. Ward et al., *Phys. Lett.*, **44B** (1973), 39; T. L. Khoo et al., *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 1146.
[15] R. M. Lieder, *Phys. Lett.*, **49B** (1974), 161.

THREE BAND INTERSECTION MODEL DESCRIBING THE HIGH SPIN STATES OF EVEN-EVEN NUCLEI

LIAO JI-ZHI

(Sichuan University)

ABSTRACT

In this paper a three bands intersection model describing the high spin states of even-even nuclei have been proposed. This model has the ability to explain the back-bending behaviour in the plot of the moments of inertia versus the rotational angular velocity, i.e. $\mathcal{J} - \omega^2$ curve, of some even-even nuclei.