

复方位阱的本征解

吴慧芳 余友文 张宗焯

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

为了研究 $\bar{p}p$ 系统的束缚态结构, 严格求解了有限深复方位阱的薛定谔方程. 计算了能级宽度 Γ 随位阱虚部深度 ξ 及其力程 a_1 的变化. 得到: (i) 束缚态的窄宽度结构; (ii) 对于一个复方位阱, 当位阱虚部的深度比其实部大得多时微扰方法不能用于计算能级宽度; (iii) 利用吸收位描写 $\bar{p}p$ 系统的湮灭不仅依赖于 ξ , 而且依赖于 a_1 .

一、引 言

近几年来进行了一系列质子(p)-反质子(\bar{p})和 $\bar{p}d$ 散射实验, $\bar{p}p$ 湮灭为带电粒子和质子素到重子素 γ 线的测量, 发现在阈能附近有一些宽度为几个到几十 MeV 的窄宽度的共振峰和束缚态结构^[1,2]. 从熟知的介子交换势理论可知核子-反核子的相互作用势是一个具有很强吸引力的吸引势. 因此可以想像到 $\bar{p}p$ 系统的束缚态有相当大的结合能, 并且具有比氦核多得多的束缚态和共振态. 但是要定量地解释能级的位置和宽度是很困难的. \bar{p} 与 p 结合在一起时有一定的几率会发生湮灭, 因此表现为每条能级有一定的宽度. 但是怎样来处理湮灭效应在理论上还没有一个很好的方法. 一个比较简单的方法是用势模型来处理, 即把复杂的湮灭效应用一个吸引的吸收位来表示. 在参考文献[3,4]中就是引进一个吸收位, 并用一级微扰理论来计算能级宽度. 这儿有一个问题, 他们选用的吸收位是由散射实验定出, 是深度很深的一个位, 计算值与切断半径的选取极为敏感, 并且宽度的计算值太大. 我们认为, 既然吸收位很强, 那么用微扰处理就可能不合适, 因而有必要来严格求解一个复作用势薛定谔方程的本征解问题.

为了简单起见, 我们选用有限深的复方位阱, 选取一定的参数做了定量的计算, 得到了一系列窄宽度的束缚态结构, 并且与用微扰论的计算结果作了一个比较. 当然, 选取方位阱是比较粗糙的, 因为它忽略了位阱的细节, 但作为初步的尝试, 还是可以得出一些定性的, 然而是有意义的结果. 在下面分别给出计算的结果和讨论.

二、复方位阱本征解

复方位阱径向方程是

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{\hbar^2} (E_{nl} - V(r)) \right] u_{nl}(r) = 0.$$

表1 $V'_0 = V_0 = 760\text{MeV}$, $a_2 = 2\text{fm}$, $a_1 = 0.4\text{fm}$

ξ	1S				1P				1D				2S	
	E_1	E_2	E_{pp}	Γ	E_1	E_2	E_{pp}	Γ	E_1	E_2	E_{pp}	Γ	E_1	E_2
0 ¹⁾	-678.2	-133.46	1199.8	266.92	-593.3	-11.80	1284.7	23.60	-487.0	-0.96	1391.0	1.92	-437.7	-425.02
0.1	-678.0	-2.69	1200.0	5.38	-593.3	-0.58	1284.7	1.16	-486.9	-0.08	1391.1	0.16	-437.1	-8.53
0.7	-670.0	-14.20	1208.0	28.40	-593.1	-3.38	1284.9	6.76	-486.9	-0.15	1391.1	0.30	-415.4	-53.57
1	-664.8	-15.95	1213.2	31.90	-592.8	-4.70	1285.2	9.40	-486.9	-0.20	1391.1	0.40	-394.7	-65.81
3	-651.2	-11.27	1226.8	22.54	-590.5	-9.92	1287.5	19.84	-486.8	-0.48	1391.2	0.96	-333.8	-43.42
5	-648.5	-8.62	1229.5	17.24	-588.8	-10.60	1289.2	21.20	-486.5	-0.63	1391.5	1.26	-324.8	-32.29
7	-647.1	-7.37	1230.9	14.74	-587.8	-10.06	1290.2	20.12	-486.4	-0.68	1391.6	1.36	-320.0	-27.45
9	-646.2	-6.58	1231.8	13.16	-587.2	-9.43	1290.8	18.86	-486.2	-0.68	1391.8	1.36	-316.8	-24.44
13	-645.0	-5.56	1233.0	11.12	-586.4	-8.42	1291.6	16.84	-486.0	-0.65	1392.0	1.30	-312.5	-20.58
15	-644.6	-5.20	1233.4	10.40	-586.1	-8.03	1291.9	16.06	-485.9	-0.63	1392.1	1.26	-311.0	-19.22

1) $\xi = 0$ 相应于实位阱所求得之本征值,而对应的 r 是用 $-i\xi V_0$ 作微扰(取 $\xi = 5$) 所计算的。

表2 $V'_0 = V_0 = 560\text{MeV}$, $a_2 = 2\text{fm}$, $a_1 = 0.4\text{fm}$

ξ	1S				1p				1D	
	E_1	E_2	E_{pp}	Γ	E_1	E_2	E_{pp}	Γ	E_1	E_2
0 ¹⁾	-481.2	-92.61	1396.8	185.22	-399.6	-7.89	1478.4	15.78	-298.0	-0.61
0.1	-481.0	-1.93	1397.0	3.86	-399.6	-0.35	1478.4	0.70	-298.0	-0.07
0.7	-476.4	-11.16	1401.6	22.32	-399.5	-1.95	1478.5	3.90	-298.0	-0.11
1	-472.7	-13.70	1405.3	27.40	-399.3	-2.72	1478.7	5.44	-297.9	-0.13
3	-458.1	-12.40	1419.9	24.80	-397.8	-6.39	1480.2	12.78	-297.9	-0.33
5	-454.6	-9.41	1423.4	18.82	-396.2	-7.50	1481.8	15.00	-297.7	-0.47
7	-453.1	-7.92	1424.9	15.84	-395.2	-7.45	1482.8	14.90	-297.6	-0.55
9	-452.1	-7.04	1425.9	14.08	-394.5	-7.09	1483.5	14.18	-297.4	-0.58
13	-450.9	-5.77	1427.1	11.54	-393.7	-6.38	1484.3	12.76	-297.3	-0.59
15	-450.4	-5.59	1427.6	11.18	-393.5	-6.10	1484.5	12.20	-297.2	-0.58

1) 说明同表1。

M 是 pp 的约化质量, $V(r)$ 是有限深复方位阱,将其选为

$$V(r) = \begin{cases} -(V'_0 + i\xi V_0), & r \leq a_1 & \text{(I 区)} \\ -V_0, & a_1 < r \leq a_2 & \text{(II 区)} \\ 0, & r > a_2 & \text{(III 区)} \end{cases}$$

其解可用球贝塞尔函数和球诺依曼函数展开,

I 区的解是

$$\psi_{nl}^I(r) = A_{nl}^I K_{nl}^I j_l(K_{nl}^I r),$$

$$K_{nl}^I \equiv (K_{nl}^I)^2 = \frac{2M}{\hbar^2} [E_{nl} + (V'_0 + i\xi V_0)].$$

II 区的解是

$$\psi_{n_l}^{II}(r) = A_{n_l}^{II} K_{n_l}^{II} j_l(K_{n_l}^{II} r) + B_{n_l}^{II} K_{n_l}^{II} n_l(K_{n_l}^{II} r),$$

时 $\bar{p}p$ 复方位阱本征解(表中均以 MeV 为单位)

		2P				2D				3S			
$E_{\bar{p}p}$	Γ	E_1	E_2	$E_{\bar{p}p}$	Γ	E_1	E_2	$E_{\bar{p}p}$	Γ	E_1	E_2	$E_{\bar{p}p}$	Γ
1440.3	850.04	-278.7	-62.58	1599.3	125.16	-105.3	-9.51	1772.7	19.02	-69.13	-568.1	1808.9	1136.62
1440.9	17.06	-278.7	-1.96	1599.3	3.92	-105.3	-0.22	1772.7	0.44	-68.8	-11.42	1809.2	22.84
1462.6	107.14	-276.7	-12.18	1601.3	24.36	-105.1	-1.34	1772.9	2.68	-46.8	-84.68	1831.2	169.36
1483.3	131.62	-274.7	-16.40	1603.3	32.80	-104.9	-1.86	1773.1	3.72	-13.2	-125.20	1864.8	250.40
1544.2	86.84	-257.7	-28.23	1620.3	56.46	-103.0	-4.54	1775.0	9.08				
1553.2	64.58	-247.8	-27.39	1630.2	54.78	-100.8	-5.62	1777.2	11.24				
1558.0	54.90	-242.9	-25.29	1635.1	50.58	-99.0	-5.80	1779.0	11.60				
1561.2	48.88	-240.0	-23.59	1638.0	47.18	-97.8	-5.66	1780.2	11.32				
1565.5	41.16	-236.6	-21.23	1641.4	42.46	-96.2	-5.20	1781.8	10.40				
1567.0	38.44	-235.4	-20.35	1642.6	40.70	-95.7	-4.99	1782.3	9.98				

时 $\bar{p}p$ 复方位阱本征解(表中均以 MeV 为单位)

		2S				2p			
$E_{\bar{p}p}$	Γ	E_1	E_2	$E_{\bar{p}p}$	Γ	E_1	E_2	$E_{\bar{p}p}$	Γ
1580.0	1.22	-252.1	-135.95	1625.9	271.90	-105.6	-46.41	1772.4	92.82
1580.0	0.14	-251.8	-5.83	1626.2	11.66	-105.6	-1.04	1772.4	2.08
1580.0	0.22	-240.3	-38.31	1637.7	76.62	-104.6	-6.62	1773.4	13.24
1580.1	0.26	-228.5	-50.67	1649.5	101.34	-103.6	-9.14	1774.4	18.28
1580.1	0.66	-166.2	-46.50	1711.8	93.00	-92.6	-18.33	1785.4	36.66
1580.3	0.94	-155.0	-33.26	1723.0	66.52	-83.9	-18.95	1794.1	37.90
1580.4	1.10	-150.4	-27.59	1727.6	55.18	-79.0	-17.58	1799.0	35.16
1580.6	1.16	-147.4	-24.37	1730.6	48.74	-76.2	-16.20	1801.8	32.40
1580.7	1.18	-143.3	-20.49	1734.7	40.98	-73.0	-14.20	1805.0	28.40
1580.8	1.16	-141.8	-19.15	1736.2	38.30	-72.0	-13.28	1806.0	26.56

$$K_2^2 \equiv (K_{n_l}^{II})^2 = \frac{2M}{\hbar^2} [E_{n_l} + V_0],$$

III 区的解是

$$\phi_{n_l}^{III}(r) = A_{n_l}^{III} K_{n_l}^{III} j_l(K_{n_l}^{III} r) + B_{n_l}^{III} K_{n_l}^{III} n_l(K_{n_l}^{III} r),$$

$$K_3^2 \equiv (K_{n_l}^{III})^2 = \frac{2M}{\hbar^2} E_{n_l}.$$

其中 j_l 和 n_l 分别为球贝塞尔函数和球诺依曼函数, A, B 为归一化系数.

由于 $V(r)$ 是复位阱, 因此本征值 E_{n_l} 是复的 $E_{n_l} \equiv E = E_1 + iE_2$, E_1 表示能级的位置, $-2E_2$ 表示能级的宽度.

我们这样来选择边界条件, 使 III 区解有一个随 r 指数衰减的因子, 并且当 $\xi = 0$ 时回到通常的束缚态边条件和通常的束缚态解.

根据上述边条件、波函数及其导数在边界上相接的条件,可以导出复本征值所满足的方程

$$(\alpha_1\beta_2)\{(\alpha_2\beta_3) + i(\alpha_2\alpha_3)\} - (\alpha_1\alpha_2)\{(\beta_2\beta_3) + i(\beta_2\alpha_3)\} = 0.$$

其中

$$\begin{aligned} (\alpha_1\alpha_2) &= j_l(K_1a_1)j'_l(K_2a_1) - j'_l(K_1a_1)j_l(K_2a_1), \\ (\alpha_1\beta_2) &= j_l(K_1a_1)n'_l(K_2a_1) - j'_l(K_1a_1)n_l(K_2a_1), \\ (\alpha_2\alpha_3) &= j_l(K_2a_2)j'_l(K_3a_2) - j'_l(K_2a_2)j_l(K_3a_2), \\ (\alpha_2\beta_3) &= j_l(K_2a_2)n'_l(K_3a_2) - j'_l(K_2a_2)n_l(K_3a_2), \\ (\beta_2\alpha_3) &= n_l(K_2a_2)j'_l(K_3a_2) - n'_l(K_2a_2)j_l(K_3a_2), \\ (\beta_2\beta_3) &= n_l(K_2a_2)n'_l(K_3a_2) - n'_l(K_2a_2)n_l(K_3a_2), \\ j'_l(Ka) &= \left. \frac{dj_l(Kr)}{dr} \right|_{r=a}. \end{aligned}$$

求解上述的复本征方程,即可得到复方位阱束缚态解的能级位置及宽度.我们选择了一定的参数,数值求解了 $l = 0, 1, 2$ 时的本征解.讨论了 $V'_0 = V_0$ 和 $V'_0 > V_0$ (有吸引心情况)两种解的差别,同时也研究了束缚态能级位置及宽度随 ξ 及 a_1 变化的趋势.为了清楚起见,把有些计算结果列在下面几个表内.

表1是 $V'_0 = V_0 = 760\text{MeV}$, $a_2 = 2\text{fm}$, $a_1 = 0.4\text{fm}$, ξ 取各种值时各分波本征解 E_1 和 E_2 等的值.表中 E_{pp} 是相应于 pp 的能谱, $E_{\text{pp}} = Q + E_1$, $Q = 1878\text{MeV}$ 是两个核子的质量, $\Gamma = -2E_2$ 为能级宽度. $\xi = 0$ 相应于实位阱情况,它的本征值是实的,而表

表3 $V'_0 = V_0 = 760\text{MeV}$, $a_2 = 2\text{fm}$, $\xi = 1$ 时 S 波的本征解(在这个表中可看到随着 a_1 的增加能级位置显著上升,能级宽度显著加宽)

a_1 (fm)	1S		2S		3S	
	$E_1(\text{MeV})$	$E_2(\text{MeV})$	$E_1(\text{MeV})$	$E_2(\text{MeV})$	$E_1(\text{MeV})$	$E_2(\text{MeV})$
0.2	-677.4	-3.31	-434.9	-12.23		
0.4	-664.9	-15.94	-394.7	-65.82	-64.6	-20.46
0.6	-638.1	-25.50	-267.5	-118.83	-13.2	-125.19
0.8	-604.8	-33.79	-144.1	-109.30		
1.0	-560.5	-48.50	-6.1	-145.72		
1.2	-495.2	-76.19				

表4 $V_0 = 760\text{MeV}$, $a_2 = 2\text{fm}$, $a_1 = 0.2\text{fm}$, $\xi = 5$ 时 $V'_0 = V_0$ 和 $V'_0 = 3V_0$ (有吸引心情况)解的比较(从表中可看到有吸引心时,能级位置变化甚微,能级宽度有所增加)

nl	$V'_0 = V_0$		$V'_0 = 3V_0$	
	$E_1(\text{MeV})$	$E_2(\text{MeV})$	$E_1(\text{MeV})$	$E_2(\text{MeV})$
1s	-669.8	-6.71	-668.3	-9.28
1p	-593.2	-0.73	-593.3	-0.95
1D	-487.0	-0.01	-487.0	-0.01
2s	-405.6	-26.19	-399.0	-36.55
2p	-277.8	-3.12	-278.6	-4.09
2D	-105.2	-0.09	-105.3	-0.11

中 $\xi = 0$ 处的 Γ 的数值是用实位阱波函数, 把 $-i\xi V_0 (\xi = 5)$ 当作微扰时的一级微扰能量, 即 $\Gamma = 2 \int_0^a \phi_{nl}^1 \xi V_0 \phi_{nl}^1 r^2 dr$ (式中 ϕ_{nl}^1 为实位阱波函数). 其它表中的符号是类似的, 在此就不一一说明了.

三、几点讨论

1. 从表 1 和表 2 可知, 当固定其它参数, 而 ξ 由小变大时, 能谱的位置逐渐提高, 而宽度 Γ 随 ξ 的增大开始时是由小增大, 但到达一个极大值后随着 ξ 的增大反而减小了. 对于不同的参量, 不同的分波 Γ 到达极大的 ξ 值是不一样的, 如图 1 所示. 这个趋势是容易理解的, 因为宽度是由二个因素决定的, 一个是位阱的深度和宽度, 另一个是这个宽度范围内的波函数的大小. 复位阱的严格解中虚部起的作用是减小束缚, 好像起着排斥作用^[2], 把能级往上推, 也就是说把波函数向 r 大处推. 当虚位较小时对波函数的影响较小, 此时 Γ 随 ξ 增加而增大是显然的. 但当虚位增加到足够大时, 对波函数有相当大的影响, 使得波函数在内区的比例减小, 因此宽度反而减小. 这是一个很有趣的结果, 它与微扰计算的结果截然不同. 在表 1 和表 2 中可看到, 只有在 ξ 小时严格解与微扰解才基本一致, 而当 ξ 增大时两者的差别就加大了, 尤其当宽度达到极大值后两者的差别就更为显著, 因为一级微扰宽度总是随着 ξ 线性变化的. 这个结果说明, 虚部的深度加大到一定程度时微扰的计算是不适用的. 这儿有一个问题需要特别指出, 因为按照原来的模型, 把复杂的湮灭效应用吸收位来表示, 那么应该是吸收位愈强能级宽度也愈大才符合原来的物理想法. 而

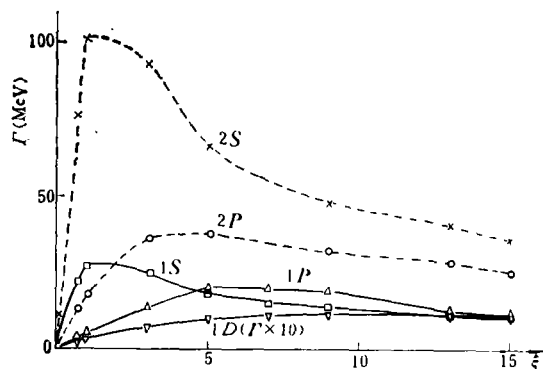


图 1 $V_0' = V_0 = 560 \text{ MeV}$, $a_2 = 2 \text{ fm}$, $a_1 = 0.4 \text{ fm}$ 时 $\Gamma - \xi$ 之关系

表 1、2 是把 a_1 固定单纯加大 ξ 所得的计算结果, 这个结果正说明了在把湮灭效应用一个唯象虚位来描述的模型中, 不能光靠加大虚位的深度来表示有更强的吸收, 而应该把深度的加深和虚位宽度的加宽同时结合起来考虑(在表 3 中可看到随着虚位半径的增加, 能级宽度是迅速增大的)才有可能得到与原来设想相符的结果.

2. 参数的选取并不是很确定的, 湮灭半径约是一个核子的康普顿波长 0.2 fm , 在计算中把它选为 0.4 fm 左右. a_2 选为 2 fm , 与一般力程范围相一致. V_0 和 ξ 的选取是为了使得在阈能以下 $500 - 600 \text{ MeV}$ 处还有窄宽度束缚态存在. 例如从表 1 可知, 当 ξ 取为 5 附近就可得到这个结果. 由于模型过于简单, 这些参数的选取不一定能表示 $\bar{p}p$ 系统的真实情况. 更理想的计算是应该从 $\bar{p}p$ 其它实验中把核力形式和参数确定下来再来严格求解. 而我们这儿只是选用比较简单的有限深的方位阱, 大致给定一些参数, 通过定量的计算获得一些定性的结果. 来探讨用复势模型来描述这类问题的可能性. 而我们的结果表明这种可能性是存在的, 在阈能以下是可能给出窄宽度束缚态结构的.

3. 这儿只计算到 $l = 2$ 的波. 从表 1 和表 2 中可知, 对于给定的一组参数, l 愈大

宽度愈小,并且对于固定的 l 值,如 S 波, $2S$ 态宽度比 $1S$ 态宽度大, $3S$ 态宽度比 $2S$ 态宽度大,如此等等.并且位阱 V_0 的深度不一样,束缚态能级的数目也不一样, V_0 愈深束缚态能级的数目也愈多.对于更高次波同样也会有这些性质.因为对更高次波由于相对运动的轨道角动量较大,可想像到其位于能量更高处而且宽度更窄.

4. 这儿的复势模型可能可以用于 \bar{p} -核系统上去,可用它来预言 \bar{p} -核的窄宽度结构.

作者感谢赵维勤同志有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] K. Kilian and B. Pietrzyk, 第七次高能物理与核结构会议集.
- [2] L. Montanet, 第五次实验介子谱会议集.
- [3] C. B. Dover and M. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1997.
- [4] I. S. Shapiro, *Phys. Rep.*, **35C** (1978), 131.
- [5] R. A. Bryan and R. J. N. Phillips, *Nucl. Phys.*, **B5** (1968), 201.

THE EIGENVALUES OF THE COMPLEX SQUARE WELL POTENTIAL

WU HUI-FANG YU YOU-WEN ZHANG ZONG-YIE

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In order to study the structure of the bound states of the \bar{p} - p system, a Schrödinger equation of a complex square well with finite depth is solved exactly. We have calculated the variation of the widths Γ of the energy levels with the depth ξ and the range a_1 of the virtual part of the potential and compared them with the perturbation results. We come to the conclusion that (i) the narrow widths of the bound states are obtained; (ii) the perturbation method can not be used to calculate the widths of the levels for a complex square well when the depth of the virtual part of the potential is much larger than the real part; (iii) to describe annihilation of \bar{p} - p system by means of the absorption potential not only depends on ξ , the depth of the virtual part of the potential, but also on the range a_1 .